чения интегральной кривой уравнения (6) с кривой $f = (\xi^2 - 1)/\xi$. Значения ξ_0 и ξ_2 определяются из уравнений (8).

На рисунке представлены расчетные профили безразмерных скорости и плотности (линии *3*, *1*). Для сравнения приведены результаты решения аналогичной задачи для изотермического случая (линии *4*, *2*).

При $T = \mathrm{const}$ задача о закономерностях распространения скачка разрежения $x = -x_1 = -at$ имеет аналитическое решение

$$\rho = \rho_0 e^{-1-x/at},\ v = a(1 + x/at),\ -x_1 \leqslant x < \infty,\ t > 0.$$

Из представленных результатов видно, что в автомодельном решении, как и в изотермическом случае, скорость разлета границы газа в пустоту бесконечна ($\xi_2 = \infty$). Однако полная энергия остается конечной, так как при $\xi \to \infty$ плотность уменьшается быстрее ($g \sim e^{-\xi}$), чем возрастает квадрат скорости ($f^2 \sim \xi^2$). Скорость распространения скачка разрежения в обоих случаях равна скорости звука ($\beta = 1$), $\xi_0 = 0{,}448$ при $\gamma = 1{,}11$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кноулз К., Броуд Г.** Теория процессов кратерообразования.— В кн.: Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981.
2. **Григорян С. С., Евтерев Л. С.** О действии сильного взрыва на поверхности скального полупространства.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 3.
3. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
4. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах.— М.: Наука, 1973.
5. **Федоров В. Ф.** О гомотермической ударной волне, вызванной действием мгновенного монохроматического излучения.— ПМТФ, 1979, № 2.

Поступила 3/XII 1984 г.

УДК 532.6 + 631.432

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ И ВЗАИМОСВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

В. М. Солопенко

(*Киев*)

Изучение процессов влагопереноса (при неполном насыщении пористой среды водой) представляет собой сложную и актуальную задачу. Ее составная часть — надежное и быстрое экспериментальное определение параметров насыщенно-ненасыщенных грунтов. Этим целям служит исследование точных решений уравнений влагопереноса по методике групп Ли [1]. В экспериментах по обезвоживанию почвенного образца обнаружена общая закономерность экспоненциальной зависимости расхода жидкости от времени [2], которая встречалась и ранее [3]. Ее объяснение при наличии сильной нелинейности в уравнениях дается в рамках инвариантно-групповых решений. Условия расширения группы приводят к взаимосвязям коэффициента влагопереноса, основной гидрофизической зависимости и влажности, которые могут оказаться полезными для моделирования процессов переноса влаги.

1. Постановка задачи. Одномерное горизонтальное движение воды в ненасыщенной пористой среде описывается уравнением влагопереноса [4]

$$\theta'_t = [K(p)\,p'_x]'_x, \tag{1.1}$$

где p — давление в единицах водного столба ($p < 0$ при неполном насыщении); $K(p)$ — коэффициент влагопереноса; θ — объемная влажность; t — время; x — продольная координата.

Введем новую функцию, которую назовем обобщенным напором:

$$F(p) = \int K(p)\,dp. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) тогда примет вид

$$\theta'_t = F''_{x^2}. \tag{1.3}$$

Равновесное распределение обобщенного напора, как следует из (1.3), линейное: $F = ax + b$; оно будет предельным в процессе обезвоживания.

Для замыкания уравнения движения необходима еще основная гидрофизическая зависимость $\theta = \theta(p)$, которая имеет сильно нелинейный характер. При $p = 0$ происходит полное насыщение, т. е. система из трехфазной (твердый скелет, вода, воздух) становится двухфазной (твердый скелет, вода), а при $p \to -\infty$ $\theta \to 0$.

Наряду с коэффициентом влагопереноса в литературе часто рассматривают коэффициент диффузивности ([4], п. 9.10)

$$D = K/(d\theta/dp). \tag{1.4}$$

На основании экспериментальных данных строятся различные зависимости $D(\theta)$. Одной из них является экспоненциальная зависимость $D = D_0 \exp a\theta$, которая приемлема в средней части значений θ, исключая окрестность полного насыщения и область малых влажностей [4]. Ниже различные модификации параметров и их возможные взаимозависимости (некоторые из них предлагались эмпирически) будут получены чисто формально как условия существования инвариантно-групповых решений.

2. Групповая структура уравнения влагопереноса. Группа преобразований для уравнения нелинейной теплопроводности вычислена в [1] (§ 21). Поэтому инфинитезимальные операторы этой группы, естественно, эквивалентны полученным ниже. Однако в настоящей работе оказалось целесообразным явно проследить взаимосвязь характеристик влагопереноса.

Систему уравнений влагопереноса в одномерном случае возьмем в виде (для удобства обозначим $p = u$)

$$\theta'_t = [K(u)\, u'_x]'_x, \quad \theta = \theta(u)$$

и приведем к одному уравнению

$$\theta'(u)\, u'_t = [K(u)\, u'_x]'_x. \tag{2.1}$$

Предположим далее, что $\theta'(u) \neq \text{const}$, $K(u) \neq \text{const}$. Число независимых переменных $n = 2$, число искомых функций $m = 1$. Обозначим

$$u'_t = p, \; u'_x = q, \; u''_{x^2} = Q, \; u''_{tx} = P.$$

Второе продолжение оператора преобразований имеет вид [1]

$$\tilde{\tilde{X}} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial p} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial q} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial Q}.$$

Стандартным путем придем к следующей системе определяющих уравнений ($\xi^1 = \xi^1(t)$, $\xi^2 = \xi^2(t, x)$, $\eta = \eta(t, x, u)$):

$$[\eta'_u + (\ln K)'\, \eta]'_u = 0, \; [\eta'_u + (\ln K)'\, \eta]'_x = \frac{1}{2}\left(\xi^{2''}_{x^2} - \delta\xi'_t\right),$$

$$\xi^{1'}(t) = 2\xi^{2'}_x + \eta\delta'/\delta, \; \eta''_{x^2} = \delta\eta'_t.$$

Здесь $\delta(u) = \theta'(u)/K(u)$ и, очевидно, $\delta^{-1} = D$, заданному соотношением (1.4). Для расширения группы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \; X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \; X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}$$

необходимо потребовать наличие зависимости

$$\frac{\delta F'}{\delta'} = k_1 F + k_2. \tag{2.2}$$

При $k_1 = -1/4$ базис алгебры Ли содержит пять операторов, а если $k_1 \neq -1/4$, то четыре. Интегрирование (2.2) дает зависимость $\theta(u)$ от $K(u)$ и структуру коэффициента влагопереноса. Сводка всех вариантов, включая $\delta = \text{const}$, приведена в таблице.

Вариант	Вид зависимости $\delta = \theta' / K \left(F = \int K du\right)$	Значение коэффициента k_1	Взаимосвязь θ и F	Форма коэффициента влагопереноса	Базис операторов
I	Явно не определен	—	—	Явно не определена	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}$
II	$\delta \neq \mathrm{const}$, $\frac{\delta F'}{\delta'} = k_1 F + k_2$	1. $k_1 \neq 0; -1$	$\theta + \theta_0 = [c(k_1 F + k_2)]^{\frac{1+k_1}{k_1}}$	$K = \frac{1}{c(1+k_1)}(\theta+\theta_0)^{-\frac{1}{1+k_1}}\theta'$	$\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k_1 F + k_2}{F'}\frac{\partial}{\partial u}$
		2. $k_1 = -1/2$	$F - 2k_2 = \frac{c}{\theta_0 - \theta}$	$K = c(\theta_0 - \theta)^{-2}\theta'$	
		3. $k_1 = 0$	$\theta + \theta_0 = ce^{\frac{1}{k_2}F} k_2$	$K = \frac{k_2}{\theta + \theta_0}\theta'$	
		4. $k_1 = -1$	$\theta + \theta_0 = c\ln(F + k_2)$	$K = \frac{1}{c}e^{\frac{1}{c}(\theta+\theta_0)}\theta'$	
		5. $k_1 = -1/4$	$\theta_0 - \theta = [c(F - 4k_2)]^{-3}$	$K = \frac{1}{3c}(\theta_0 - \theta)^{-4/3}\theta'$	$\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4}\frac{F - 4k_2}{F'}\frac{\partial}{\partial u}$, $X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{F-4k_2}{F'}\frac{\partial}{\partial u}$
III	$\delta = \mathrm{const}$	—	$\theta + \theta_0 = cF$	$K = \frac{1}{c}\theta'$	$\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = \frac{F}{F'}\frac{\partial}{\partial u}$, $X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{2}x\frac{F}{F'}\frac{\partial}{\partial u}$

Ниже рассматриваются решения, у которых ранг подалгебры Ли $R = 1$ или 2. Число функционально независимых инвариантов тогда будет $t_0 = n + m - R = 2$ или 1. Задавая инвариантное многообразие соответствующей группы $I_2 = I_2(I_1)$ в первом случае и $I = \text{const}$ — во втором (число уравнений $\mu = 1$), видим, что необходимые условия существования инвариантного решения ($\delta_0 = m - \mu$) $\max\{R - n, 0\} \leqslant \delta_0 \leqslant \min\{R - 1, m - 1\}$ оказываются выполненными.

3. Некоторые решения уравнения влагопереноса.

А. К линейному уравнению движения приводит вариант III (см. таблицу):

$$c\theta'_t = \theta''_{x^2}, \quad c > 0,$$

оператор

$$X = \alpha X_1 + X_4 = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \frac{F}{F'} \frac{\partial}{\partial u}$$

имеет инварианты

$$I_1 = x, \; I_2 = e^{\alpha t} F,$$

что немедленно дает решение

$$\theta + \theta_0 = e^{-\alpha t} f(x), \tag{3.1}$$

а функция f удовлетворяет уравнению $f''(x) + c\alpha f(x) = 0$. Задача Штурма — Лиувилля для него будет отвечать чисто экспоненциальному процессу обезвоживания (3.1), который может служить для определения коэффициента влагопереноса в функции всасывающего давления, если параллельно в эксперименте определяется основная гидрофизическая зависимость [2].

Б. Вариант II. 2 приводит к точно разрешимой задаче, поскольку она преобразуется к линейному параболическому уравнению.

Уравнение движения влаги следующее:

$$\theta'_t = \left[c(\theta_0 - \theta)^{-2}\theta'_x\right]'_x. \tag{3.2}$$

В соответствии с методикой [5], рассматривая решение, удовлетворяющее граничному условию $\theta'_x|_{x=0} = 0$, сделаем замену переменных

$$\xi = \int_0^x g^{-1/2}(t, s)\, ds, \quad g(t, x) \equiv c[\theta_0 - \theta(t, x)]^{-2},$$

что приведет к

$$\theta'_t = \theta''_{\xi^2} + \left[(\sqrt{g})''_{\theta^2}/(\sqrt{g})'_\theta\right](\theta'_\xi)^2.$$

Пример точного решения уравнения (3.2) — распределение влажности

$$\theta = \theta_0 - 1/\sqrt{\exp 2t + x^2},$$

имеющее, очевидно, асимптотически экспоненциальный характер.

В. Решение неэкспоненциального типа можно получить в варианте II.5 на операторах ($R = 2$)

$$X_4 = -4t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{F - 4k_2}{F'}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\tilde{X}_5 = -\alpha^2 X_2 + X_5 = (x^2 - \alpha^2)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{F - 4k_2}{F'}\frac{\partial}{\partial u}$$

с общим инвариантом

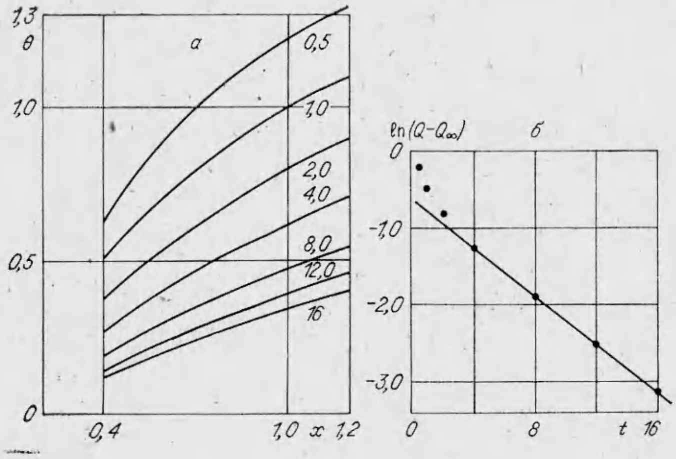
$$I = t^{1/4}(F - 4k_2)\sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

Отсюда находим решение

$$\theta = \theta_0 - (3c/4)^{-3/4}\alpha^{3/2}t^{3/4}(x^2 - \alpha^2)^{-3/2},$$

удовлетворяющее

$$\theta'_t = \left[(1/3c)(\theta_0 - \theta)^{-4/3}\theta'_x\right]'_x.$$



Таким образом, утверждение авторов [5] о том, что рассмотренное ими уравнение представляет собой наиболее общий класс точной разрешимости, неверно.

Г. И наконец, обратимся к наиболее интересному варианту II.4, отвечающему упомянутой выше зависимости для D, взяв инвариантное решение ранга $R = 1$, построенное на «классическом» операторе

$$X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Положив $F = e^{\theta}$, видим, что решение уравнения, вытекающего из (2.1),

$$\theta'_t = e^{\theta}\left[\theta''_{x^2} + (\theta'_x)^2\right]$$

следует искать в виде $\theta = \theta(t, x) = \theta(\rho)$, $\rho = t/x^2$, которое переходит тогда в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

(3.3) $$\varphi' = \varphi(e^{\theta}/4\rho^2 - 3/2\rho - \varphi), \quad \theta' = \varphi.$$

Многообразие, на котором рассматривается инвариантное решение, задается корректной на интервале $(0, \infty)$ задачей Коши для системы (3.3) при начальных условиях $\theta = 1$, $\varphi = -0{,}3$, $\rho = 1$. Задавая t в качестве параметра, можно найти распределение влажности по x в любой момент времени. Результаты расчета приведены на рисунке, *а*, где даны значения t. На рисунке, *б* в функции времени построена величина $\ln(Q - Q_{\infty})$, где $Q = \int\limits_{0,4}^{1,2} \theta dx$, $Q_{\infty} = 0{,}235$; асимптотически экспоненциальный характер процесса очевиден. Кривые рисунка, *а*, *б* в целом отвечают экспериментальным представлениям.

Из рисунка видно, что отклонение от экспоненциального закона быстро падает во времени. Действительно, если записать решение уравнения

$$\theta'_t = \left(e^{\theta}\right)''_{x^2}$$

в виде

$$\theta = \theta_0 + e^{-\alpha t} f_1(x) + e^{-2\alpha t} f_2(x) + \ldots$$

и разложить экспоненту в ряд, то легко получить

$$-\alpha e^{-\alpha t} f_1 - 2\alpha e^{-2\alpha t} f_2 - \ldots = e^{\theta_0} e^{-\alpha t}\left\{f''_1 + e^{-\alpha t}\left[f''_2 + \frac{1}{2}\left(f_1^2\right)''\right] + O\left(e^{-2\alpha t}\right)\right\}.$$

Пусть теперь $f_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$e^{\theta_0} f''_1(x) = -\alpha f_1(x),$$

тогда для определения следующего приближения $f_2(x)$ имеем

$$-2\alpha f_2(x) = \left[f_2''(x) + \frac{1}{2}(f_1^2)''\right] e^{\theta_0}.$$

Данные соотношения приводят к асимптотике

$$\theta = \theta_0 + e^{-\alpha t}\,[f_1(x) + O(e^{-\alpha t})].$$

Итак, групповая классификация решений уравнений влагопереноса в одномерном случае позволяет найти взаимосвязи коэффициента влагопереноса с влажностью и основной гидрофизической зависимостью, порождающие инвариантные решения. Эти решения приводят к экспоненциальному во времени расходу воды, что отвечает эксперименту. На указанные взаимосвязи не влияет вид основной гидрофизической зависимости, который, несомненно, меняется от грунта к грунту.

Полученные результаты могут служить указателем направления дальнейшего экспериментального и теоретического изучения для нахождения замкнутого феноменологического описания процессов влагопереноса. Актуальным является исследование многомерных решений, в частности, с учетом силы тяжести. В одномерном случае вертикального течения необходимые условия расширения группы при $\delta \neq \text{const}$ такие же, как и в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск, 1962.
2. **Дзекунов Н. Е., Солопенко В. М., Файбишенко Б. А.** Обоснование экспресс-метода определения параметров влагопереноса в пористых средах.— ДАН УССР. Сер. А, 1984, № 7.
3. **Gardner W. R.** Calculation of capillary conductivity from porous plate outflow data.— Soil. Sci. Am. Proc., 1956, v. 20, N 3.
4. **Бэр А., Заславски Д., Ирмей С.** Физико-математические основы фильтрации воды.— М.: Мир, 1971.
5. **Fokas A. S., Yortsos Y. C.** On the exactly solvable equation $S_t' = [(\beta S + \gamma)^{-2} S_x']_x' + \alpha(\beta S + \gamma)^{-2} S_x'$, occuring in the two-phase flow in porous media.— SIAM J. Appl. Math., 1982, v. 42, N 2.

Поступила 14/I 1986 г.

УДК 532.135 : 532.517.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ТЕЧЕНИЯ РАСТВОРА ПОЛИМЕРА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

А. Н. Кекалов, В. И. Попов, Е. М. Хабахпашева

(*Новосибирск*)

Анализ пульсирующего режима течения ньютоновской жидкости [1] показывает, что при одинаковых средних градиентах давления пульсирующего и стационарного течений средний расход жидкости не меняется. Теоретико-экспериментальные исследования течения неньютоновской жидкости показали [2—11], что пульсации градиента давления приводят к изменению расхода по сравнению с ньютоновским случаем. Это изменение принято определять относительной величиной $I = Q_п/Q_с - 1$, где $Q_п$, $Q_с$ — средние расходы пульсирующего и стационарного течений.

Цель данной работы — изучение влияния параметров внешнего воздействия (частоты, амплитуды пульсаций и величины осредненного градиента давления) на относительное изменение расхода при пульсирующем режиме течения концентрированных растворов высокополимеров в круглой трубе.

Проведем критериальный анализ системы уравнений, описывающих пульсирующее течение вязкоупругой жидкости на участке установившегося течения. Уравнение движения с синусоидально меняющимся во вре-