

УДК 532.5:533.6

## ПАРАДОКС УГЛОВОЙ КРОМКИ ПРОФИЛЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики СО РАН, 644099 Омск

Установлен парадокс угловой кромки профиля в нестационарном потоке идеальной жидкости, состоящий в том, что решение нелинейной задачи нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой при строгом выполнении граничных условий в этой кромке не имеет физического смысла. Парадокс является следствием принятой модели нестационарного течения жидкости в окрестности угловой кромки, допускающей излом линий тока. Установлено, что решение задачи на основе гипотезы о гладкости линий тока в окрестности задней кромки путем локальной замены угловой кромки на острую имеет физический смысл.

Влияние формы задней кромки профиля на течение жидкости в окрестности этой кромки в стационарном и нестационарном потоках проявляется по-разному. В модели плоского стационарного течения идеальной жидкости, удовлетворяющего постулату Кутты — Жуковского, форма задней кромки влияет только на скорость в этой кромке (она равна нулю в угловой кромке и отлична от нуля в острой). Иная ситуация имеет место в модели плоского нестационарного течения жидкости. Решение нелинейной начально-краевой задачи в рамках этой модели существенно зависит от формы задней кромки профиля, изменяющей не только локальные, но и интегральные характеристики течения вокруг профиля, включая циркуляцию скорости.

Большинство теоретических исследований плоского нестационарного течения жидкости посвящено решению задач обтекания профилей с острой кромкой. В этом случае нелинейная начально-краевая задача обычно сводится к последовательному решению линейных краевых задач для ряда дискретных значений времени, при которых положение профиля и форма вихревого следа за ним предполагаются заданными.

Нестационарное течение около профиля с угловой кромкой изучено недостаточно полно. Это связано, прежде всего, с тем, что в угловой кромке постулат Кутты — Жуковского дополняется условием равенства нулю относительной скорости жидкости в угловой точке, образованной вихревым следом и контуром профиля. В результате течение в малой окрестности угловой кромки становится существенно нелинейным. Следует отметить, что в известных алгоритмах решения соответствующей начально-краевой задачи либо игнорируется это дополнительное условие [1], либо требуется выполнение не самого условия, а его следствия (см., например, [2–5]).

В работе [6] предложен алгоритм численного решения нелинейной задачи нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой, в котором указанное условие выполнялось точно. При этом обнаружено, что строгое выполнение условия равенства нулю относительной скорости в угловой точке, образованной вихревым следом и контуром профиля, порождает разрывное решение как для локальных характеристик течения в окрестности задней кромки, так и для производной по времени от циркуляции скорости. Этот результат оказался неожиданным, так как он не соответствует реальной картине течения.

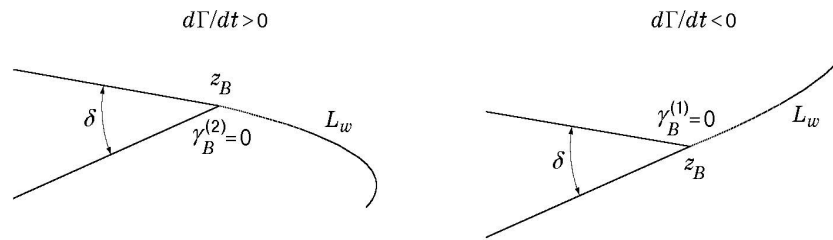


Рис. 1

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в [6]. Проведен более полный численный эксперимент по разработанным в [6] алгоритмам. Анализ результатов эксперимента позволил сделать вывод о наличии парадокса угловой кромки в нестационарном потоке в рамках принятой модели течения идеальной жидкости и необходимости уточнения этой модели в окрестности угловой кромки.

1. Сформулируем основные допущения в постановке нелинейной начально-краевой задачи нестационарного обтекания профиля с угловой задней кромкой. Жидкость идеальная и несжимаемая, течение вне профиля и вихревого следа, сходящего с него, потенциальное. Вихревой след образуется за счет изменения циркуляции скорости вокруг профиля  $\Gamma(t)$  с течением времени  $t$  и сходит с него по касательной к контуру профиля в задней кромке либо с верхней, либо с нижней стороны в зависимости от знака производной  $d\Gamma(t)/dt$  (рис. 1).

Вихревой след  $L_w(t)$  моделируется линией контактного разрыва, форма которой для каждого момента времени определяется решением задачи Коши при условии, что в начальный момент  $t = 0$  вихревой след отсутствует (при  $t < 0$  движение жидкости предполагается стационарным). Контур профиля моделируется вихревым слоем.

Обозначим через  $\gamma_B^{(1)}(t), \gamma_B^{(2)}(t)$  интенсивности вихревых слоев соответственно на верхней и нижней сторонах профиля в его задней кромке (точке  $z_B$ ). Тогда интенсивность вихрей  $\gamma_B(t)$ , сходящих с профиля, равна  $\gamma_B(t) = \gamma_B^{(1)}(t) + \gamma_B^{(2)}(t)$ . Эта интенсивность связана с циркуляцией скорости вокруг профиля соотношением

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = -\gamma_B(t)w_B(t), \quad w_B(t) = \frac{1}{2}(\gamma_B^{(2)}(t) - \gamma_B^{(1)}(t)), \quad (1.1)$$

где  $w_B(t)$  — скорость схода вихревого следа с профиля.

Соотношение (1.1) следует из постулата Кутты — Жуковского и теоремы Гомсона о сохранении циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру.

В работе [6] рассмотрены следующие три варианта задания дополнительных (к постулату Кутты — Жуковского) граничных условий в угловой задней кромке.

ВАРИАНТ 1. Условие

$$\gamma_B^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{d}{dt} \Gamma < 0, \quad \gamma_B^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{d}{dt} \Gamma > 0 \quad (1.2)$$

представляет собой равенство нулю относительной скорости жидкости в угловой точке, образуемой вихревым следом и контуром профиля (рис. 1).

ВАРИАНТ 2. Выполняется условие

$$w_B(t) = |\gamma_B(t)|/2. \quad (1.3)$$

Условие (1.3) следует из (1.2) и определения скорости схода вихревого следа с профиля. Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = -\frac{1}{2} \gamma_B(t) |\gamma_B(t)|. \quad (1.4)$$

Отметим, что в работах, посвященных исследованию нестационарного течения жидкости около профиля с угловой задней кромкой, обычно применяется соотношение (1.4), а не условие (1.2), из которого оно следует.

**ВАРИАНТ 3.** Дополнительное условие в угловой задней кромке не ставится. Этот вариант соответствует, по существу, предположению о локальной замене угловой кромки острой (точкой возврата).

**2.** В [6] предложен алгоритм решения нелинейной начально-краевой задачи нестационарного обтекания профиля с угловой задней кромкой для указанных выше вариантов задания дополнительных граничных условий в точке  $z_B$ . Этот алгоритм позволяет с высокой точностью определять локальные характеристики течения в задней кромке профиля. При этом краевая задача, возникающая на каждом шаге по времени, сводится к комбинированной системе интегральных уравнений, решаемой методом панелей. Начальный участок вихревого следа, сходящего с профиля, моделируется панелью с линейным распределением интенсивности вихревого слоя, а остальная часть вихревого следа заменяется системой дискретных вихрей. Строгое выполнение условий (1.2) осуществляется путем применения сплайна специального вида. Система нелинейных алгебраических уравнений, к которым сводится задача на каждом шаге по времени, решается методом итераций.

Численный эксперимент проводился для профилей Кармана — Трефтца в широком диапазоне параметров задачи. Основное внимание уделено оценке влияния угла  $\delta$  (угла между касательными к верхней и нижней сторонам профиля в задней кромке) на характеристики течения. Результаты расчета величин  $\gamma_B$ ,  $\gamma_B^{(1)}$ ,  $\gamma_B^{(2)}$ ,  $w_B$ ,  $\Gamma$  как функций времени  $t$  ( $0 < t \leq T$ ) при  $\delta = 0,1; 1,0; 2,5$  приведены на рис. 2–4 соответственно. Профиль совершал поступательные колебания по нормали к хорде с амплитудой  $0,1b$  и числом Струхала  $\omega b/v_\infty = \pi$  ( $b$  — хорда профиля;  $\omega$  — круговая частота колебаний;  $v_\infty$  — скорость набегающего потока). Результаты расчета по варианту 1 приведены на рис. 2–4 сплошными линиями, по варианту 3 — штриховыми. Результаты расчета по варианту 2 практически совпадают с результатами расчета по варианту 3 и на рис. 2–4 не представлены. На рис. 2–4 вверху показаны профили, для которых проводился расчет, и формы вихревых следов за ними в конце первого периода (темные точки — вариант 3, светлые точки — вариант 1).

**3.** Перейдем к анализу результатов, представленных на рис. 2–4. Прежде всего отметим особенности решения, полученного при выполнении условия (1.2). В предельном случае  $\delta \rightarrow 0$  оно не переходит в решение, соответствующее  $\delta = 0$ , и имеет разрывной характер для локальных характеристик течения в угловой кромке. Эти утверждения иллюстрируются данными, приведенными на рис. 2. Разрыв возникает при  $t/T = 0,45$ , где производная от циркуляции скорости по времени обращается в нуль. В интервале  $0 < t/T < 0,45$  производная  $d\Gamma/dt < 0$  и в соответствии с условием (1.2) интенсивность вихрей, сходящих в след с верхней стороны контура,  $\gamma_B^{(1)}(t)$  равна нулю. При переходе через точку  $t/T = 0,45$  функция  $\gamma_B^{(1)}(t)$  скачкообразно принимает отличное от нуля значение. Аналогично при  $0,45 < t/T < 1$  производная  $d\Gamma/dt > 0$  и интенсивность вихрей, сходящих с нижней стороны контура,  $\gamma_B^{(2)}(t)$  равна нулю.

Иной характер имеют решения, полученные по вариантам 2 и 3, которые, как показал численный эксперимент, практически не отличаются друг от друга. Граничное условие (1.4) накладывает ограничение на суммарную интенсивность вихрей  $\gamma_B$ , сходящих с задней кромки, тогда как условие (1.2) является более жестким, требующим равенства нулю интенсивности вихрей, сходящих либо с верхней, либо с нижней стороны профиля. Поэтому условие (1.4) позволяет отказаться от выполнения жесткого условия (1.2), сглаживая решение в окрестности угловой кромки. В частности, предельный случай  $\delta \rightarrow 0$

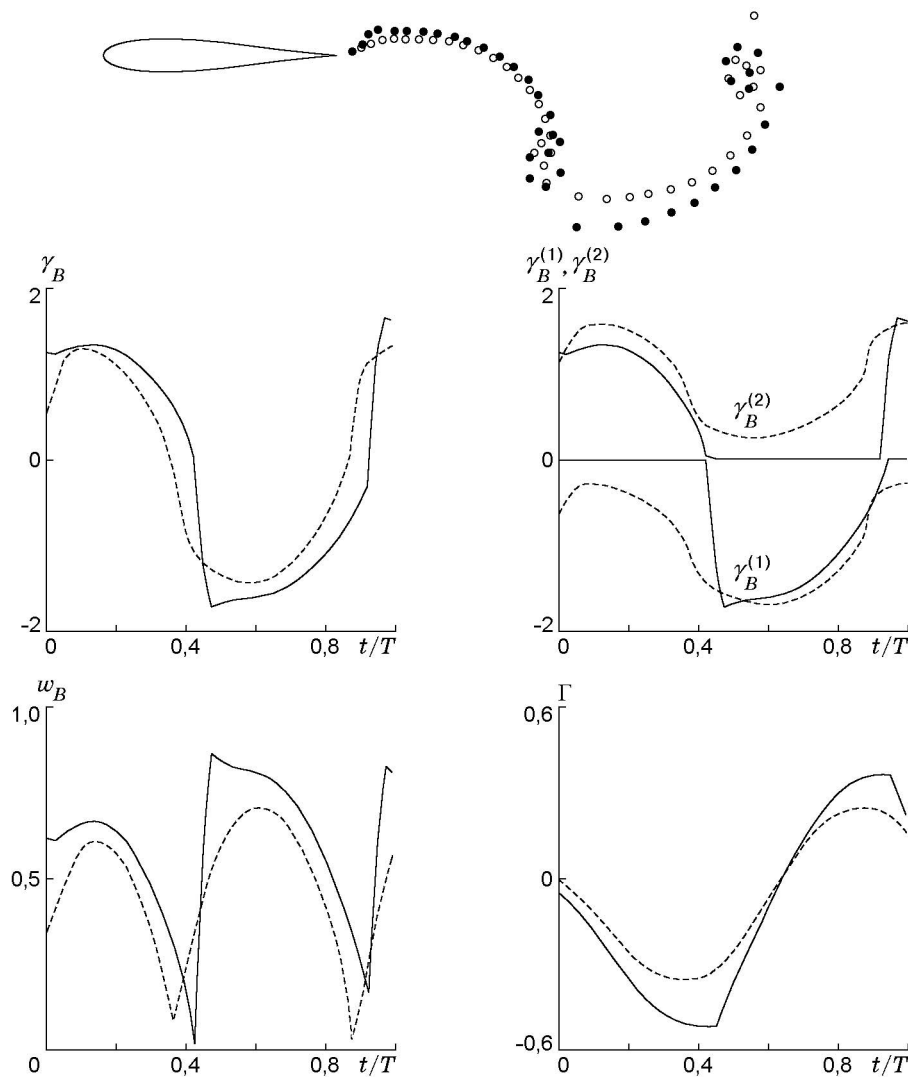


Рис. 2

соответствует  $\delta = 0$ . Такой характер решения получен во всех работах, в которых рассматривалась задача нестационарного обтекания профиля с условием (1.4).

Таким образом, условие (1.4) следует из условия (1.2), но полученное при этом решение не удовлетворяет исходному условию (1.2). Отметим, что с ростом угла  $\delta$  различие между этими решениями уменьшается, и при  $\delta > 2$  граничные условия (1.2) и (1.4) порождают практически одинаковые решения (см. рис. 4).

Анализ результатов численного эксперимента позволяет сделать следующие выводы.

Строгое выполнение условия (1.2) приводит к разрывному решению для локальных гидродинамических характеристик нестационарного течения жидкости в окрестности угловой кромки, что не соответствует физической картине течения.

Решение с условием (1.2) при  $\delta \rightarrow 0$  не переходит в решение задачи для профиля с острой кромкой ( $\delta = 0$ ), что, в частности, свидетельствует о существенной нелинейности задачи нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой и невозможности ее линейаризации при  $\delta \ll 1$  в рамках рассматриваемой модели течения.

Решение с условием (1.4), следующим из условия (1.2), имеет физический смысл и практически совпадает с решением задачи для профиля с острой кромкой во всем диапазоне значений угла  $\delta$  ( $0 < \delta < \pi$ ).

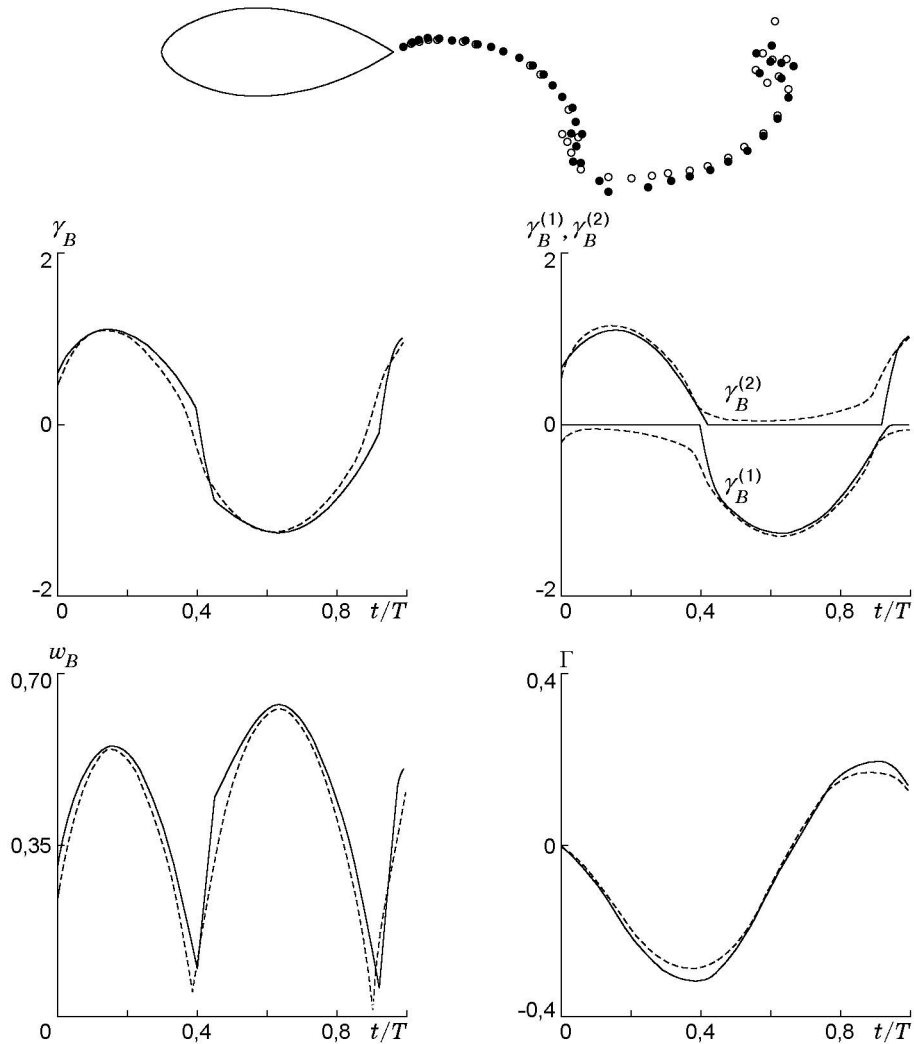


Рис. 3

Решение с условием (1.2) при  $\delta \rightarrow \pi$  совпадает с решением задачи для профиля с острой кромкой.

Приведенные выводы имеют парадоксальный характер, что позволяет говорить о парадоксе угловой кромки профиля в нестационарном потоке. Суть этого парадокса состоит в том, что решение нелинейной задачи нестационарного обтекания профиля с угловой кромкой при строгом выполнении граничных условий в этой кромке не имеет физического смысла, тогда как решение данной задачи для того же профиля с локальной заменой угловой кромки на острую имеет физический смысл для всех значений угла  $\delta$ , включая  $\delta = \pi$ .

Парадокс является следствием принятой модели нестационарного течения жидкости в окрестности угловой кромки, допускающей излом линий тока. Локальная замена угловой кромки острой равносильна гипотезе о гладкости линий тока в окрестности задней кромки профиля. Применение этой гипотезы изменяет математическую модель течения около профиля путем отказа от дополнительного условия (1.2). При этом постулат Кутты — Жуковского следует применять для профиля с острой кромкой.

Отметим, что локальная замена угловой кромки острой целесообразна и в стационарном потоке. Эта замена не изменяет циркуляцию скорости вокруг профиля, но приводит к

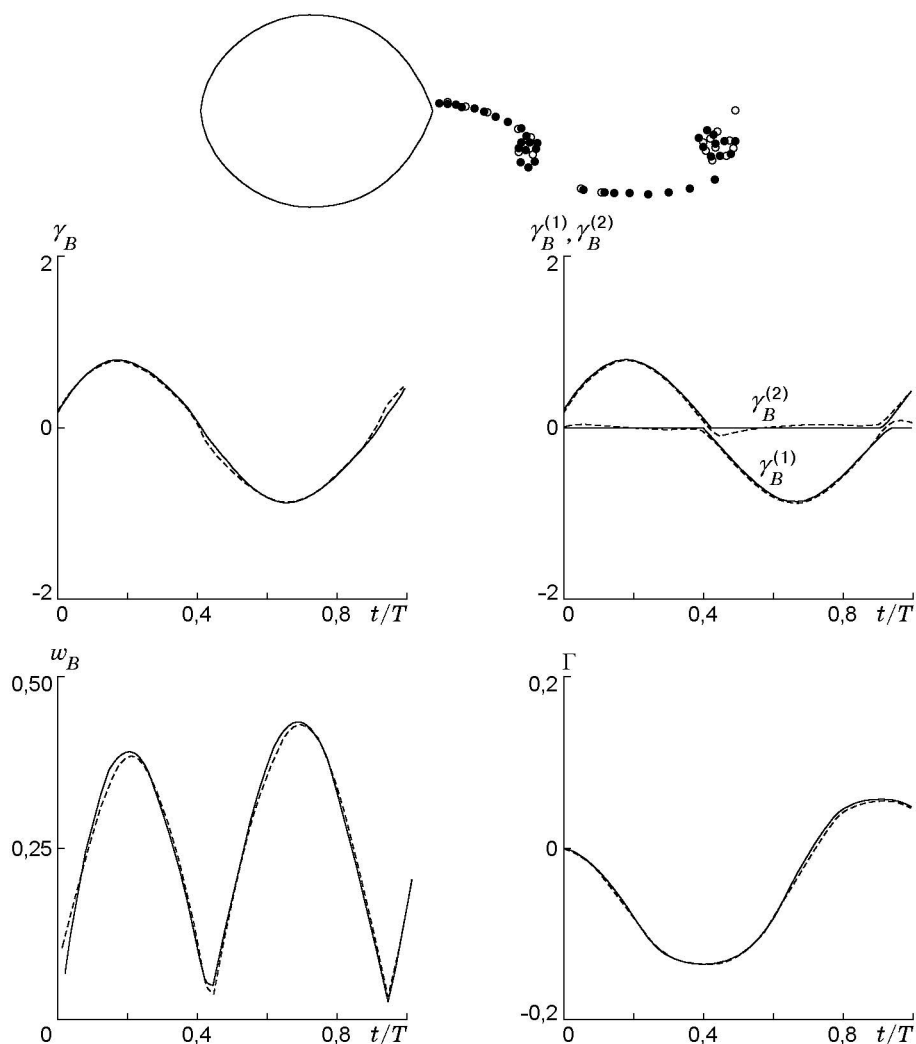


Рис. 4

отличной от нуля скорости жидкости в задней кромке, что имеет место в реальном потоке. Такая модель течения фактически имеет место при формулировке постулата Кутты — Жуковского как требования равенства скоростей жидкости на верхней и нижней сторонах профиля при подходе к задней кромке.

Автор выражает благодарность Ю. С. Смолину за помощь в проведении численного эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
2. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
3. Ильичев К. П., Постоловский С. Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 2. С. 72–82.
4. Головкин В. А. Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся вихревым следом // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 3. С. 1–11.

- 
5. **Зобнин А. И.** Моделирование начальной стадии развития вихревого следа за телесным профилем // Динамика жидкости со свободными границами: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 60. С. 51–59.
  6. **Горелов Д. Н., Смолин Ю. С.** Нестационарное обтекание профиля с угловой кромкой // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 3. С. 11–20.

*Поступила в редакцию 13/VI 2001 г.*

---