

УДК 539

СПЕКТР НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСЛОКАЦИОННОГО АНСАМБЛЯ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Н. В. Чертова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634821 Томск

В рамках калибровочной модели упругого тела с дефектами получены динамические уравнения дислокационного ансамбля. С учетом аналогии между полученными уравнениями и уравнениями Максвелла в электродинамике записано определяющее соотношение, связывающее поле дефектов с материальным континуумом. В феноменологических теориях пластичности данное соотношение соответствует определению вязкопластического тела. Рассчитаны дисперсионные соотношения и конфигурации нормальных колебаний дислокационного ансамбля в вязкопластической среде.

Введение. Континуальная теория дефектов изучает несовершенство кристаллической решетки в рамках механики сплошной среды. Обычной моделью кристалла с дислокациями является упругое тело с внутренними напряжениями, не зависящими от внешне-приложенных поверхностных и объемных сил. Преимущество этой модели заключается в возможности использования методов теории упругости для расчета полей смещений и напряжений, вызванных как изолированными дефектами, так и дефектами, характеризуемыми непрерывным тензором плотности дислокаций [1–3]. В некоторых работах [3, 4] наряду со статической характеристикой дислокационного ансамбля (тензором плотности дислокаций) рассматривается динамическая величина — тензор плотности потока дислокаций.

Полная система уравнений континуальной теории дислокаций включает геометрические уравнения упругого континуума с дефектами, закон Гука и уравнения движения среды [4]. Данная система уравнений позволяет исследовать динамику напряжений и скоростей упругой среды при заданных плотностях дислокаций и потока дислокаций. Идеи и методы калибровочных теорий поля [5–7] послужили основой дальнейшего развития континуальной теории дефектов. В рамках данного подхода можно построить замкнутую систему динамических уравнений упругого континуума с внутренними напряжениями [6] и систему динамических уравнений ансамбля дефектов [7]. На основе первых уравнений исследованы спектры нормальных колебаний упругой среды с дефектами и построено феноменологическое обобщение модели с учетом диссипации энергии [8].

В настоящей работе рассмотрены динамические уравнения дислокационного ансамбля и рассчитаны дисперсионные соотношения поля дефектов в вязкопластической среде.

Описание модели. Согласно [6, 7] упругое тело с дефектами можно исследовать на основе модели смеси двух континуумов, одним из которых является материальная среда, другим — поле дефектов. Плотность лагранжиана данной модели можно записать в виде

$$L = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - \beta : C : \beta + BI : I - S\alpha : \alpha, \quad (1)$$

где $\mathbf{V} = \partial \mathbf{u}^{ext} / \partial t + \mathbf{V}^{int}$ — эффективная скорость среды, $\beta = \nabla \mathbf{u}^{ext} + \beta^{int}$ — эффективная упругая дисторсия, определяемые упругими смещениями от внешних воздействий \mathbf{u}^{ext} , упругой дисторсией от дефектов материала β^{int} и скоростью смещений \mathbf{V}^{int} , обусловленной движением дефектов; $\alpha = \nabla \times \beta^{int}$ — тензор плотности дислокаций;

$I = \partial\beta^{int}/\partial t - \nabla\mathbf{V}^{int}$ — тензор плотности потока дислокаций; ρ — плотность; C — тензор упругих модулей четвертого ранга; B, S — константы. Знаки « \cdot », « $:$ » обозначают скалярную свертку по одному и двум индексам, « \times » — векторное произведение. Первые два члена лагранжиана (1) характеризуют упругий континуум, воспринимающий воздействия от внешних нагрузок и дефектов материала, последние два — поле дефектов.

Варьируя плотность лагранжиана (1) по независимым переменным \mathbf{u}^{ext} , β^{int} , \mathbf{V}^{int} , получим динамические уравнения упругой среды с дефектами

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} = \nabla\sigma; \quad (2)$$

$$B\nabla \cdot I = -\mathbf{P}, \quad S\nabla \times \alpha = -B \frac{\partial I}{\partial t} - \sigma, \quad (3)$$

где $\mathbf{P} = \rho\mathbf{V}$ — эффективный импульс среды; $\sigma = C : \beta$ — тензор напряжений. Уравнения (3) в совокупности с геометрическими соотношениями упругого континуума

$$\nabla \cdot \alpha = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \nabla \times I, \quad (4)$$

представляющими условие непрерывности тензора плотности дислокаций и выражение закона сохранения вектора Бюргера, определяют полную систему динамических уравнений дислокационного ансамбля. Уравнение динамического равновесия (2) является условием совместности данной системы. Однако уравнения (2)–(4) незамкнуты, поскольку неизвестно соотношение, связывающее упругий континуум и поле дефектов.

Используя формальную аналогию между данными уравнениями и уравнениями Максвелла в электродинамике [9], можно сопоставить тензор плотности потока дислокаций I с напряженностью электрического поля, тензор плотности α с напряженностью магнитного поля, эффективный импульс \mathbf{P} с зарядом, тензор напряжений σ с током и записать соотношение

$$\sigma = \eta I, \quad (5)$$

подобное связи электромагнитного поля с веществом в случае однородной проводящей среды. В феноменологических теориях пластичности [10] данное соотношение соответствует определению вязкопластического тела, из которого следует, что коэффициент η имеет смысл обобщенной вязкости среды.

Спектр нормальных колебаний дислокационного ансамбля в вязкопластической среде. Рассмотрим распространение плоской монохроматической волны поля дефектов в вязкопластической среде. Будем искать решение (2)–(5) в виде

$$I = I_0 \exp(i\omega t - ikx), \quad \alpha = \alpha_0 \exp(i\omega t - ikx). \quad (6)$$

Система характеристических уравнений, получающихся после подстановки (6) в соотношения (2)–(5), определяет 18 ветвей закона дисперсии

$$k_{1,\dots,14}^2 = \frac{B}{S} \omega^2, \quad k_{15,16}^2 = \frac{B}{S} \omega^2 - \frac{i\omega\eta}{S}, \quad k_{17,18}^2 = \left[\frac{B}{S} \omega^2 \left(\frac{\eta^2}{2B^2} + \omega^2 \right) - \frac{i\eta\omega^3}{2S} \right] / \left(\frac{\eta^2}{4B^2} + \omega^2 \right),$$

в безразмерном виде

$$K_{1,\dots,14}^2 = \omega^2, \quad K_{15,16}^2 = \omega^2 - i\omega, \quad K_{17,18}^2 = 2(\omega^2(1 + 2\omega^2) - i\omega^3)/(1 + 4\omega^2). \quad (7)$$

Соответствующие дисперсионные кривые для больших и малых частот приведены на рис. 1, 2. Поскольку два последних выражения (7) комплексны, то соответствующие дисперсионные кривые имеют действительную и мнимую части. Действительная часть $K(\omega)$, обозначаемая $R(\omega)$, определяет величину, обратную длине волны возникающих колебаний,

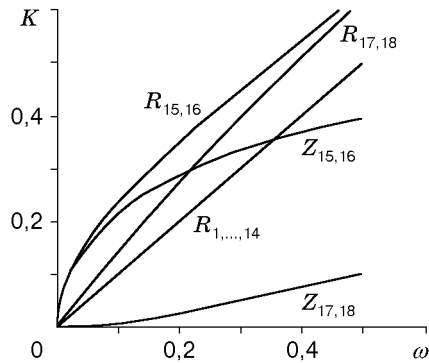


Рис. 1

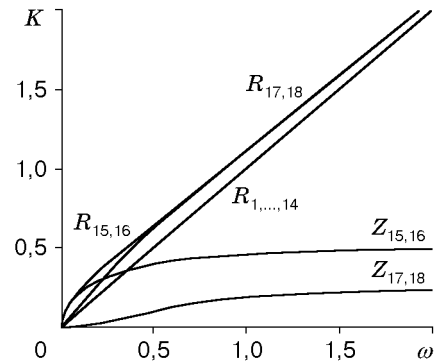


Рис. 2

мнимая часть $Z(\omega)$ определяет величину, обратную глубине проникновения волны данной частоты, т. е. коэффициент поглощения. На рис. 1, 2 кривые $R_j(\omega)$, $Z_j(\omega)$ (j — номер рассматриваемой ветви) представляют зависимость действительной и мнимой части от частоты.

Обсуждение результатов. Полученные результаты показывают, что спектр нормальных колебаний дислокационного ансамбля в вязкопластической среде состоит из трех групп волн, одна из которых (K_1, \dots, K_{14}) распространяется с постоянной скоростью без диссипаций, две другие группы волн (K_{15}, K_{16} и K_{17}, K_{18}) обладают дисперсией и диссипацией. Как следует из анализа кривых, представленных на рис. 1, 2, дисперсия волн существенна при малых частотах и практически отсутствует при больших. Для больших частот коэффициент поглощения также не зависит от частоты.

Анализ конфигураций нормальных колебаний позволил определить, колебания каких величин описывает каждая ветвь закона дисперсии. Ветви K_1, K_2, \dots, K_6 описывают колебания величин $\alpha_{zy}, \alpha_{yz}, \alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{xz}, I_{xx}$. Две пары K_7, K_8 и K_9, K_{10} представляют колебания $\alpha_{yx}, I_{zx}, I_{xz}$ и $\alpha_{zx}, I_{yx}, I_{xy}$ с конфигурациями $\alpha_{yx} = I_{zx} \sqrt{B/S}, I_{xz} = 0, \alpha_{zx} = I_{yx} \sqrt{B/S}, I_{xy} = 0$. Четыре ветви $K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}$ соответствуют колебаниям $I_{yz}, I_{zy}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}$, между которыми существует связь $I_{yz} = I_{zy}, \alpha_{yy} = I_{zy} \sqrt{B/S}, \alpha_{zz} = I_{zy} \sqrt{B/S}$. Ветви K_{15}, K_{16} соответствуют колебаниям величин α_{zy}, I_{yy} и α_{yz}, I_{zz} , конфигурации которых определяются выражением

$$\alpha_{zy} = \sqrt{\frac{B}{2S} \left(\frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\omega} + 1 \right)} I_{yy},$$

аналогичное соотношение связывает величины α_{yz}, I_{zz} . Ветви K_{17}, K_{18} описывают колебания α_{zx}, I_{yx} и α_{yx}, I_{zx} , для которых

$$\alpha_{zx} = \sqrt{\frac{(B/S) \sqrt{(1 + 2\omega^2)^2 + \omega^2} + 1 + 2\omega^2}{1 + 4\omega^2}} I_{yx}.$$

Подобное соотношение справедливо для величин α_{yx}, I_{zx} .

Таким образом, при распространении плоской волны дефектов в вязкопластической среде могут быть зарегистрированы колебания всех компонент тензора плотности дислокаций. Колебания диагональных компонент тензора плотности потока дислокаций I_{yy}, I_{zz} , определяющие движение дефектов в плоскости, не совпадающей с плоскостью фронта волны, по мере их распространения затухают. Затухают также колебания компонент I_{yx}, I_{zx} , определяемые потоком вектора Бюргера в направлении распространения волны дефектов, движущихся в плоскостях, перпендикулярных этому направлению. Отсутствуют колебания компонент тензора плотности потока I_{xy}, I_{xz} , представляющие поток вектора

Бюргерса вдоль осей, перпендикулярных направлению распространения волны дефектов, движущихся в плоскости волны. Полученные результаты могут быть использованы при анализе результатов акустической эмиссии в средах с дефектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кренер Э.** Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965.
2. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. Т. 7. Теоретическая физика. М.: Наука, 1987.
4. **Косевич А. М.** Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука, 1972.
5. **Kadic A., Edelen D. G. B.** A gauge theory of dislocations and disclinations. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.
6. **Гриняев Ю. В., Чертова Н. В.** Механические свойства материалов и предмет описания калибровочной модели // Журн. техн. физики. 1998. Т. 68, № 7. С. 70–74.
7. **Гриняев Ю. В., Панин В. Е.** Полевая теория дефектов на мезоуровне // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 37–39.
8. **Popov V. L., Chertova N. V.** Gauge theory of “plastically incompressible” medium. 2. Dispersion relations with dissipation // Intern. J. Engng Sci. 1992. V. 30, N 3. P. 335–340.
9. **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. М.: Наука, 1990.
10. **Пэжина П.** Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию 11/XI 1998 г.
