УДК 517.958+532.59

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ С НЕМОНОТОННЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ*

В. М. Тешуков[1], *М. М. Стерхова*[2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск*
[2] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск*

1. Постановка задачи. Рассматривается начально-краевая задача со свободной границей

$$\begin{gathered}\rho(U_T + UU_X + VU_Y) + p_X = 0, \quad 0 \le Y \le H(X,T),\\ U_X + V_Y = 0, \quad p_Y = -\rho g, \quad H_T + \Big(\int\limits_0^H U\,dY\Big)_X = 0,\\ p(X,H(X,T),T) = 0, \quad V(X,0,T) = 0,\\ U(X,Y,0) = U_0(X,Y), \quad H(X,0) = H_0(X),\end{gathered} \tag{1.1}$$

которая описывает в приближении теории длинных волн плоскопараллельное завихренное течение слоя однородной весомой жидкости глубины $H = H(X,T)$ над ровным дном $Y = 0$. Здесь U, V — компоненты вектора скорости жидкости; p — давление; ρ — плотность ($\rho = \text{const}$); g — ускорение свободного падения; $U_0(X,Y)$, $H_0(X)$ — заданные функции.

В работе [1] было показано, что задача (1.1) сводится к задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}u_t + uu_x + g\int\limits_0^1 h_x\,d\nu = 0, \quad h_t + (uh)_x = 0, \quad 0 \le \lambda \le 1,\\ u(x,0,\lambda) = U_0(x,\lambda H_0(x)), \quad h(x,0,\lambda) = H_0(x),\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $u(x,t,\lambda) = U(x,\Phi(x,t,\lambda),t)$; $h(x,t,\lambda) = \Phi_\lambda(x,t,\lambda)$; функция $\Phi(x,t,\lambda)$ определяется в результате решения задачи

$$\Phi_t + \Big(\int\limits_0^\Phi U(x,Y,t)\,dY\Big)_x = 0, \quad \Phi(x,0,\lambda) = \lambda H_0(x).$$

Введенные таким образом поверхности $\lambda = \text{const}$ являются контактными поверхностями, $\lambda = 0$ соответствует дну, $\lambda = 1$ — свободной поверхности. В случае, когда $U_Y \equiv 0$ (что отвечает в длинноволновом приближении безвихревому течению), система (1.2) переходит в хорошо известные уравнения теории мелкой воды, имеющие гиперболический тип. Возникает вопрос о типе уравнений (1.2) при рассмотрении завихренного течения, когда $U_Y \not\equiv 0$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17621).

В [1, 2] дано определение гиперболичности для системы с операторными коэффициентами и указаны условия гиперболичности системы уравнений (1.2) для монотонного профиля скорости ($U_Y \neq 0$). В настоящей работе получены условия гиперболичности уравнений (1.2) для немонотонного профиля скорости в предположении, что U_Y обращается в нуль в единственной точке $Y_*(X,T)$, $0 < Y_*(X,T) < H(X,T)$. При этом $U_{YY}(Y_*) \neq 0$.

Следует отметить, что условия гиперболичности играют важную роль при анализе устойчивости сдвиговых течений, так как их нарушение приводит к некорректности задачи Коши для системы уравнений движения жидкости.

Согласно [1], определение типа системы (1.2) сводится к отысканию собственных функционалов φ и собственных чисел k, удовлетворяющих уравнению

$$(\varphi, A\mathbf{f}) = k(\varphi, \mathbf{f}). \tag{1.3}$$

Оператор A определен равенством

$$A(f_1, f_2)^{\text{т}}(\lambda) = \Big(u(\lambda)f_1(\lambda) + g\int_0^1 f_2(\nu)\,d\nu, \quad h(\lambda)f_1(\lambda) + u(\lambda)f_2(\lambda)\Big)^{\text{т}}.$$

Здесь $(\varphi, \mathbf{f})$ обозначает действие функционала φ на пробную функцию $\mathbf{f}$; $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^{\text{т}}$ — достаточно гладкая функция; индекс т обозначает транспонирование.

В силу независимости f_1, f_2 равенство (1.3) эквивалентно следующим:

$$(\varphi_1, (u-k)f_1) + (\varphi_2, hf_1) = 0,$$

$$g\int_0^1 f_2\,d\nu(\varphi_1, 1) + (\varphi_2, (u-k)f_2) = 0.$$

Если функционал φ_1 известен, то действие функционала φ_2 задается формулой

$$(\varphi_2, f) = -(\varphi_1, (u-k)h^{-1}f).$$

Отыскание функционала φ_1 и собственных чисел k приводит к уравнению

$$-(\varphi_1, (u-k)^2h^{-1}f_2) + g\int_0^1 f_2\,d\nu(\varphi_1, 1) = 0.$$

Аргументы x, t опущены для краткости записи.

Для гиперболичности системы (1.2) необходимо, чтобы все собственные числа k^α, удовлетворяющие уравнению (1.3), были действительными, а набор соответствующих им собственных функционалов $\{\varphi^\alpha\}$ обладал свойством полноты: из равенств $(\varphi^\alpha, \mathbf{f}) = 0$ должно следовать равенство $\mathbf{f} \equiv 0$. Если условия гиперболичности выполнены, то уравнения (1.2) можно привести к эквивалентному характеристическому виду $(\varphi^\alpha, \mathbf{u}_t + k^\alpha \mathbf{u}_x) = 0$, где $\mathbf{u} = (u, h)^{\text{т}}$, k^α — собственные числа, отвечающие φ^α.

2. Построение собственных функций.

Лемма 2.1. *Собственные числа k_i дискретного спектра определяются уравнением*

$$g\int_0^1 h(\nu)(u(\nu)-k_i)^{-2}\,d\nu = 1. \tag{2.1}$$

Доказательство этой леммы проводится непосредственной проверкой того факта, что собственные функционалы $\varphi^i = (\varphi_1^i, \varphi_2^i)$ удовлетворяют уравнению (1.3) , если k_i являются корнями уравнений (2.1). Действие φ^i на произвольную гладкую функцию $\mathbf{f}(\mathbf{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}})$ определяется формулами

$$(\varphi_1^i, f_1) = \int_0^1 f_1(\nu)h(\nu)(u(\nu)-k_i)^{-2}\,d\nu, \quad i = 1,2,$$

$$(\varphi_2^i, f_2) = -\int_0^1 f_2(\nu)(u(\nu)-k_i)^{-1}\,d\nu, \quad i = 1,2.$$

Уравнение (2.1) всегда имеет два действительных корня вне отрезка $[\min_\lambda u(x,t,\lambda), \max_\lambda u(x,t,\lambda)]$; вообще говоря, оно может иметь и комплексные корни.

Рассматривается профиль скорости, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} &u_\lambda > 0 \ \text{при} \ 0 < \lambda < \lambda_1(x,t), \quad u_\lambda < 0 \ \text{при} \ \lambda_1(x,t) < \lambda < 1, \\ &u_{\lambda\lambda}(\lambda_1(x,t)) \neq 0, \quad u(0) < u(1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть $\lambda_2(x,t)$ — точка из отрезка $[0,1]$, где достигается равенство $u(\lambda_2) = u(1)$. Для каждой точки λ из отрезка $[\lambda_2, \lambda_1]$ введем функцию $\lambda_s = \lambda_s(\lambda, x, t)$ $(\lambda_s \geq \lambda_1)$, определяемую равенством $u(\lambda, x, t) = u(\lambda_s(\lambda, x, t), x, t)$. В дальнейшем в обозначениях функций $\lambda(x,t)$, $\lambda_s(x,t)$ аргументы x, t опускаются для краткости записи. Произвольной гладкой функции ψ сопоставим полином третьей степени от переменной ν $Q(\nu, \lambda, \lambda_s, \psi)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} &Q(\lambda,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi(\lambda), \quad Q(\lambda_s,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi(\lambda_s), \\ &Q_\nu(\lambda,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi_\nu(\lambda), \quad Q_\nu(\lambda_s,\lambda,\lambda_s,\psi) = \psi_\nu(\lambda_s). \end{aligned}$$

Этот полином представим в виде

$$\begin{aligned} Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi) = &\frac{1}{2}(\psi(\lambda)+\psi(\lambda_s)) - \frac{1}{8}(\psi_\nu(\lambda)-\psi_\nu(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s) + \\ &+(-\frac{1}{4}(\psi_\nu(\lambda)+\psi_\nu(\lambda_s)) + \frac{3}{2}(\psi(\lambda)-\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1})(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s)) + \\ &+\frac{1}{2}(\psi_\nu(\lambda)-\psi_\nu(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1}(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))^2 + \\ &+((\psi_\nu(\lambda)+\psi_\nu(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-2} - 2(\psi(\lambda)-\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-3})(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))^3. \end{aligned}$$

Полином $Q(\nu, \lambda, \lambda_s, \psi)$ построен таким образом, чтобы разность значений $Q(\nu, \lambda, \lambda_s, \psi)$ и $\psi(\nu)$ в окрестности точки λ_1 (где $\lambda \to \lambda_s$) имела оценку $(\psi(\nu) - Q(\nu, \lambda, \lambda_s, \psi)) = O((\nu - \lambda_1)^4)$.

Введем еще один полином третьей степени от переменной ν $Q_1(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)$ формулой

$$Q_1(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)=\frac{1}{8}(\omega(\lambda)\psi(\lambda)-\omega(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)+$$
$$+\frac{1}{4}(\omega(\lambda)\psi(\lambda)+\omega(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))-$$
$$-\frac{1}{2}(\omega(\lambda)\psi(\lambda)-\omega(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1}(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))^2-$$
$$-(\omega(\lambda)\psi(\lambda)+\omega(\lambda_s)\psi(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-2}(\nu-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_s))^3,$$

где функция $\omega(\lambda)=u_\nu(\lambda)/h(\lambda)$.

Введем функционалы $\delta(\lambda)$, $\delta'(\lambda)$ [4], $P_{10}(\lambda)$ ($\lambda\in(0,\lambda_2)$), $P_{11}(\lambda)$ ($\lambda\in(0,\lambda_2)$), $P_0(\lambda)$ ($\lambda\in(\lambda_2,1)$), $P_1(\lambda)$ ($\lambda\in(\lambda_2,1)$), действующие на гладкую пробную функцию ψ по следующим правилам:

$$(\delta(\lambda),\psi)=\psi(\lambda),\quad (\delta'(\lambda),\psi)=-\psi_\nu(\lambda),$$

$$(P_{10}(\lambda),\psi)=\int\limits_0^1 h(\nu)\frac{\psi(\nu)-\psi(\lambda)}{(u(\nu)-u(\lambda))^2}\,d\nu,\quad \lambda\in(0,\lambda_2),$$

$$(P_{11}(\lambda),\psi)=\int\limits_0^1 \frac{\psi(\nu)\,d\nu}{u(\nu)-u(\lambda)},\quad \lambda\in(0,\lambda_2),$$

$$(P_0(\lambda),\psi)=\int\limits_0^{\lambda_2} h(\nu)\frac{\psi(\nu)-\psi(\lambda)}{(u(\nu)-u(\lambda))^2}\,d\nu+\int\limits_{\lambda_2}^1 h(\nu)\frac{\psi(\nu)-Q(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)}{(u(\nu)-u(\lambda))^2}\,d\nu,$$
$$\lambda\in(\lambda_2,1),$$

$$(P_1(\lambda),\psi)=\int\limits_0^{\lambda_2}\frac{\psi(\nu)\,d\nu}{u(\nu)-u(\lambda)}+\int\limits_{\lambda_2}^1\frac{\psi(\nu)(u(\nu)-u(\lambda))-h(\nu)Q_1(\nu,\lambda,\lambda_s,\psi)}{(u(\nu)-u(\lambda))^2}\,d\nu,$$
$$\lambda\in(\lambda_2,1).$$

Лемма 2.2. *Каждому из характеристических чисел $k^\lambda=u(x,t,\lambda)$, ($\lambda\in(0,\lambda_2)$) соответствуют два собственных функционала ($\varphi^{11\lambda}$ и $\varphi^{21\lambda}$), задаваемых формулами*

$$\varphi^{11\lambda}=\Big(\delta'(\lambda),\omega(\lambda)\delta(\lambda)\Big),\quad \varphi^{21\lambda}=\Big(gP_{10}(\lambda)+\delta(\lambda),\ -gP_{11}(\lambda)\Big).$$

Лемма 2.3. *Каждому из характеристических чисел $k^\lambda=u(x,t,\lambda)$ ($\lambda\in(\lambda_2,1)$) соответствуют четыре собственных функционала ($\varphi^{1\lambda}$, $\varphi^{2\lambda}$, $\varphi^{3\lambda}$ и $\varphi^{4\lambda}$), задаваемых формулами*

$$\varphi^{1\lambda}=\Big((\delta'(\lambda)+\delta'(\lambda_s))+6(\delta(\lambda)-\delta(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1},(\omega(\lambda)\delta(\lambda)+\omega(\lambda_s)\delta(\lambda_s))\Big),$$

$$\varphi^{2\lambda}=\Big((\delta'(\lambda)-\delta'(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1},(\omega(\lambda)\delta(\lambda)-\omega(\lambda_s)\delta(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-1}\Big),$$

$$\varphi^{3\lambda} = \Big((\delta'(\lambda)+\delta'(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-2}+2(\delta(\lambda)-\delta(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-3},\ (\omega(\lambda)\delta(\lambda)+ +\omega(\lambda_s)\delta(\lambda_s))(\lambda-\lambda_s)^{-2}\Big),$$

$$\varphi^{4\lambda} = \Big(gP_0(\lambda)+\delta(\lambda), -gP_1(\lambda)\Big).$$

Доказательство получается прямой подстановкой указанных собственных функционалов в уравнение (1.3).

3. Условия гиперболичности уравнений (1.2). Проверим свойство полноты построенного набора собственных функционалов. Получим условие, обеспечивающее равенство $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}} = 0$ как следствие соотношений

$$\begin{aligned} &(\varphi^{11\lambda}, \mathbf{f}) = 0, \quad (\varphi^{21\lambda}, \mathbf{f}) = 0, \quad (\varphi^{1\lambda}, \mathbf{f}) = 0, \quad (\varphi^{2\lambda}, \mathbf{f}) = 0, \\ &(\varphi^{3\lambda}, \mathbf{f}) = 0, \quad (\varphi^{4\lambda}, \mathbf{f}) = 0, \quad (\varphi^{1}, \mathbf{f}) = 0, \quad (\varphi^{2}, \mathbf{f}) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для $\lambda \in (0, \lambda_2)$ из (3.1) вытекает, что $f_2 = \omega^{-1}(f_1)_\nu$. Для $\lambda \in (\lambda_2, 1)$ из (3.1) следует, что $f_1(\lambda) = f_1(\lambda_s)$ и $f_2(\lambda) = \omega^{-1}(\lambda)(f_1)_\nu(\lambda)$, $f_2(\lambda_s) = \omega^{-1}(\lambda_s)(f_1)_\nu(\lambda_s)$. Используя эти равенства, получим интегральные уравнения для определения функции f_1:

$$f_1(\lambda) - g\int_0^1 \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{f_1(\nu)-f_1(\lambda)}{u(\nu)-u(\lambda)}\Big)\,d\nu = 0; \tag{3.2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{f_1(\nu)}{u(\nu)-k_i}\Big)\,d\nu = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{3.3}$$

Легко проверить, что уравнение (3.2) выполнено, если вместо f_1 подставить функцию $f_{11} = \alpha_1(u-k_1)^{-1}+\alpha_2(u-k_2)^{-1}$, где α_1, α_2 — произвольные величины, не зависящие от λ.

Будем искать общее решение уравнения (3.2) в виде $f_1 = f_{10}+f_{11}$, где f_{10} удовлетворяет условиям $f_{10}(0) = f_{10}(\lambda_1)$, $f_{10}(1) = f_{10}(\lambda_1)$. Выполнение этих условий можно обеспечить выбором α_1, α_2. Функция f_{10} обладает свойством симметрии $f_{10}(\lambda) = f_{10}(\lambda_s)$, что следует из равенств (3.1).

С помощью интегрирования по частям и замены переменной уравнение (3.2) преобразуется:

$$\psi(u)\Big[(u-u_*) + g(u_1-u_*)(u_1-u)^{-1}\omega_1^{-1} - g(u_0-u_*)(u_0-u)^{-1}\omega_0^{-1} - -g\int_{u_0}^{u_*}\frac{\rho(u')\,du'}{u'-u}\Big] + g\int_{u_0}^{u_*}\frac{\rho(u')\psi(u')\,du'}{u'-u} = -f_{10*} \tag{3.4}$$

($\psi(u) = (f_{10}(u) - f_{10*})(u-u_*)^{-1}$). Отметим, что $\psi_0 = \psi_1 = 0$. Здесь u', u, ω_s — сокращенные обозначения $u(x,t,\nu)$, $u(x,t,\lambda)$, $\omega(x,t,\lambda_s)$; индексы 0, 1, $*$ соответствуют значениям функций при $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = \lambda_1$; $\omega(u)$, $\omega_s(u)$, $\psi(u)$, $f_{10}(u)$ — вид зависимости функций ω, ω_s, ψ, f_{10} от $u(\lambda)$.

Разрывная в точке u_1 функция $\rho(u)$ задается формулами

$$\rho(u) = (u-u_*)\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{1}{\omega(u)}\Big) \qquad \text{для } u \in (u_0, u_1),$$

$$\rho(u) = (u - u_*)\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{1}{\omega(u)}\Big) - \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{1}{\omega_s(u)}\Big)\Big) \quad \text{для } u \in (u_1, u_*).$$

В точке u_* функция $\rho(u)$ имеет особенность $\rho = O(|u - u_*|)^{-1/2}$. Действительно, в силу предположений (2.2) в окрестности точки $\lambda = \lambda_1$ $(u - u_*) = O((\lambda - \lambda_1)^2)$, тогда $|\omega| = |u_\lambda h^{-1}| = O(|\lambda - \lambda_1|) = O(|u - u_*|^{1/2})$. Если ввести аналитические функции

$$\chi(z) = (z - u_*)\Big(1 - g\int\limits_0^1 \frac{h\,d\nu}{(u - z)^2}\Big), \quad F(z) = \int\limits_{u_0}^{u_*} \frac{\rho(u)\psi(u)\,du}{u - z},$$

то интегральное уравнение (3.4) сводится к следующей задаче Римана в плоскости комплексного переменного z с разрезом по отрезку $[u_0, u_*]$:

$$F^+(u) = \frac{\chi^+}{\chi^-}F^-(u) + \frac{f_{10*}}{2\pi i g}\Big(\frac{\chi^+}{\chi^-} - 1\Big), \quad u \in [u_0, u_*]. \tag{3.5}$$

Здесь знаки + и − относятся к предельным значениям функций при $z \to u$ из верхней и нижней полуплоскостей. Решение задачи будем искать в классе функций, исчезающих на бесконечности и не ограниченных в точке u_*.

Продолжим граничное условие на действительную ось. Функция $G = \chi^+/\chi^-$ полагается равной единице на отрезках $]-\infty, u(0)]$, $]u(\lambda_1), +\infty[$. Вопрос об однозначной разрешимости задачи (3.5), согласно общей теории, решается вычислением ее индекса [3]. Рассматриваемая задача Римана имеет коэффициенты, разрывные в точке u_* $(G(u_*-0) = -1, G(u_*+0) = 1)$. Индекс задачи Римана в указанном классе решений $æ = -1$, а задача Римана будет иметь единственное решение в том случае, если $\chi^\pm \neq 0$ при $z \in (u_0, u_*)$ и выполнено равенство

$$\frac{1}{\pi}\Delta\arg\frac{\chi^+}{\chi^-} = -3, \tag{3.6}$$

где Δ — приращение на отрезке (u_0, u_*). Поскольку $\chi(z)$ имеет полюсы в точках u_0, u_1 и нули в точках k_1, k_2, то каноническое решение задачи Римана как функция, удовлетворяющая краевому условию, имеющая нулевой порядок всюду в конечной части плоскости и порядок $(-æ)$ на бесконечности , имеет вид

$$X(z) = \frac{(z - u_0)(z - u_1)}{(z - k_1)(z - k_2)}\chi(z).$$

При $æ = -1$ задача (3.5) однозначно разрешима при выполнении условия

$$f_{10*}\int\limits_{u_*}^{u_0} \frac{(\chi^+/\chi^- - 1)(u - k_1)(u - k_2)\,du}{(u - u_0)(u - u_1)\chi^+} = 0. \tag{3.7}$$

Покажем, что сомножитель при f_{10*} не равен нулю. В классе функций, ограниченных на бесконечности, задача (3.5) безусловно однозначно разрешима (так как ее индекс $æ = 0$). Из уравнения (3.5) следует, что функция $F(z) = -f_{10*}/(2\pi i g)$ является решением задачи Римана в классе ограниченных на бесконечности функций. Тогда сомножитель при f_{10*} в (3.7) не равен нулю. Действительно, при равенстве нулю указанного сомножителя задача Римана (3.5) имела бы также решение в классе исчезающих на бесконечности функций, а наличие двух решений противоречило бы однозначной разрешимости указанной задачи в классе ограниченных на бесконечности функций. Следовательно, из (3.7) вытекает, что $f_{10*} = 0$.

Поскольку однородная задача Римана в классе исчезающих на бесконечности функций имеет только тривиальное решение ($\text{æ} = -1$), то $\psi = 0$, а тогда и $f_{10} = 0$.

Таким образом, установлено, что

$$f_1 = \alpha_1(u - k_1)^{-1} + \alpha_2(u - k_2)^{-1}.$$

Подстановка f_1 в уравнения (3.3) дает равенства

$$\alpha_1 \int_0^1 h(u' - k_1)^{-3}\, d\nu = 0, \quad \alpha_2 \int_0^1 h(u' - k_2)^{-3}\, d\nu = 0. \tag{3.8}$$

Здесь использовано соотношение

$$\int_0^1 h(u' - k_1)^{-2}(u' - k_2)^{-1}\, d\nu + \int_0^1 h(u' - k_1)^{-1}(u' - k_2)^{-2}\, d\nu = 0.$$

Из (3.8) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, а тогда и $f_1 = 0$. В итоге доказана

Теорема 3.1. *Для немонотонного профиля скорости, удовлетворяющего условиям* $\chi^{\pm} \neq 0$, (3.6) *и* (2.2), *система уравнений* (1.2) *является гиперболической.*

Отметим, что для справедливости утверждения достаточно, чтобы решение уравнений (1.2) $\mathbf{u} = (u, h)^{\mathrm{T}}$ имело следующую гладкость:

$$u, u_t, u_x \in C^{2+\alpha}[0,1], \quad h, h_t, h_x \in C^{1+\alpha}[0,1] \quad (0 < \alpha < 1).$$

Действием выписанных выше собственных функционалов систему уравнений (1.2) можно привести к соотношениям на характеристиках.

Гиперболичность уравнений позволяет описать распространение возмущений в жидкости, выделить области влияния начальных и граничных данных, области существования и единственности решения начально-краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** О гиперболичности длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555.
2. **Teshukov V. M.** Long wave approximation for vortex free boundary flows // Numerical Methods for Free Boundary Problems. ISNM 99. Basel: Birkhauser Verl., 1991.
3. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 16/VI 1994 г.