

УДК 539.375

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИН СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

М. В. Мир-Салим-заде

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан  
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассматривается задача об упругой изотропной среде с системой инородных (поперечных относительно линий расположения трещин) прямолинейных включений. Считается, что среда ослаблена периодической системой прямолинейных трещин при наличии в них областей, в которых берега трещин взаимодействуют. Полагается, что эти области примыкают к вершинам трещин, а их размеры могут быть сравнимы с размером трещины. Взаимодействие берегов трещины в концевой области моделируется путем введения между ними связей (сил сцепления) с заданной диаграммой деформирования. Краевая задача о равновесии периодической системы трещин со связями между берегами при действии внешних растягивающих нагрузок и усилий в связях сводится к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению с ядром типа ядра Коши. Условие предельного равновесия трещин с концевыми зонами формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей. Рассмотрен случай напряженного состояния среды при наличии зон, в которых берега трещин взаимодействуют.

**Ключевые слова:** периодическая система трещин, стрингеры, изотропная среда, силы сцепления, контактные напряжения.

Исследованию деформирования пластины, усиленной регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой узкие прямоугольники, посвящено большое количество работ (см., например, [1–4]). Значительное внимание уделялось изучению разрушения пластины, усиленной регулярной системой стрингеров [5–9]. Во всех отмеченных работах рассматривалась изолированная трещина Гриффитса.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается упругая изотропная среда с системой инородных поперечных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой узкие прямоугольники. На бесконечности усиленная пластина подвергнута однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$  (рис. 1). Для стрингера принимается гипотеза, согласно которой при деформации толщина стрингера не меняется, а напряженное состояние является одноосным. Стрингеры не подвергаются изгибу и работают лишь на растяжение.

Считается, что точки крепления стрингеров размещены в дискретных точках  $z = \pm(2m + 1)L \pm icy_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ) с постоянным шагом по всей длине стрингера, расположенного симметрично относительно поверхности пластины. Выбранная система декартовых координат и используемые обозначения приведены на рис. 1.

Полагается, что усиленная среда ослаблена периодической системой прямолинейных трещин. Рассматривается модель трещины при наличии областей, в которых ее берега взаимодействуют. Считается, что эти области примыкают к вершинам трещины, а их размеры могут быть сравнимы с размером трещины. Силы сцепления, непрерывно рас-



С использованием формул Колосова — Мусхелишвили [15] и граничных условий (1.1) на берегах трещин решение задачи сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\Phi'(x) + \Psi(x) = \begin{cases} 0, & |x - m\omega| < \lambda, \\ q(x), & \lambda \leq |x - m\omega| \leq l. \end{cases} \quad (1.3)$$

**2. Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи (1.3) будем искать в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad (2.1)$$

причем  $\Phi(z) = \varphi'(z)$ ,  $\Psi(z) = \psi'(z)$ ; функции  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  определяют поля напряжений и деформаций в усиленной среде в отсутствие трещин.

В рассматриваемом случае в качестве  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  примем функции

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{4} \sigma_0 z - \frac{i}{2\pi(1 + \varkappa_0)h} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n}, \\ \psi_0(z) &= \frac{1}{2} \sigma_0 z - \frac{i\varkappa_0}{2\pi(1 + \varkappa_0)h} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi(1 + \varkappa_0)h} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \left( \frac{m_*L - iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \frac{m_*L + iy_0n}{z - m_*L + iy_0n} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $n = m = 0$ ;  $h$  — толщина пластины;  $\varkappa_0$  — упругая постоянная Мусхелишвили. Для определения аналитических функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z) = z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)$  на основе (2.1), (1.3) получаем граничную задачу

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + \Omega_1(x) = \begin{cases} f(x), & y = 0, \quad |x - m\omega| < \lambda, \\ f(x) + q(x), & y = 0, \quad \lambda \leq |x - m\omega| \leq l, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $f(x) = -[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\Phi_0'(x) + \Psi_0(x)]$ .

В силу условий симметрии задачи относительно оси  $x$  функция  $f(x)$  действительна, поэтому с использованием (2.3) на всей действительной оси имеем  $\text{Im } \Omega_1(z) = 0$ . Следовательно, учитывая условия на бесконечности, находим  $\Omega_1(z) = 0$ .

Итак, для функции  $\Phi_1(z)$  получаем задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \text{Re } \Phi_1(z) &= \begin{cases} f(x)/2, & y = 0, \quad |x - m\omega| < \lambda, \\ (f(x) + q(x))/2, & y = 0, \quad \lambda \leq |x - m\omega| \leq l, \end{cases} \\ \Phi_1(z) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Искомое решение задачи (2.4) записывается в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{F_*(x)(\pi/\omega) \cos(\pi x/\omega)}{\sin(\pi x/\omega) - \sin(\pi z/\omega)} dx. \quad (2.5)$$

Здесь

$$X(z) = \sqrt{\sin^2(\pi z/\omega) - \sin^2(\pi l/\omega)}, \quad l_0 = \sin(\pi l/\omega),$$

$$F_*(x) = \begin{cases} f(x)X(x), & |x - m\omega| < \lambda, \\ [f(x) + q(x)]X(x), & \lambda \leq |x - m\omega| \leq l \end{cases}$$

( $X(z)$  — ветвь функции, которая при больших значениях  $z$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ) имеет вид  $\sin(\pi z/\omega)$ ).

Для того чтобы определить потенциал  $\Phi(z)$ , необходимо найти усилия в связях  $q(x)$  в концевых зонах трещин, т. е. при  $\lambda \leq |x - m\omega| \leq l$ , а также величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), входящих в формулы для  $f(x)$ ,  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$ .

**3. Определение усилий в связях.** Используя соотношения Колосова — Мусхелишвили и граничные значения функции  $\Phi_1(z)$ , на отрезках  $|x - m\omega| \leq l$  получим следующее равенство:

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \frac{2\mu i}{1 + \varkappa_0} \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-). \quad (3.1)$$

Используя формулы Сохоцкого — Племяля [15], с учетом формулы (2.5) находим

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -\frac{i}{\pi X_*(x)} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{X_*(t)[f(t) + q(t)](\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega)} dt, \quad (3.2)$$

где  $X_*(x) = \sqrt{\sin^2(\pi l/\omega) - \sin^2(\pi x/\omega)}$ . Подставив выражение (3.2) в левую часть уравнения (3.1) с учетом соотношения (1.2), после ряда преобразований получим нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $q(x)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi X_*(x)} \left( \int_{-l_0}^{l_0} \frac{X_*(t)q(t)(\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega)} dt + \int_{-l_0}^{l_0} \frac{X_*(t)f(t)(\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega)} dt \right) = \\ = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{\partial}{\partial x} [C(x, q)q(x)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для решения сингулярного интегродифференциального уравнения (3.3) необходимо найти величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В силу симметричности и периодичности задачи  $P_{mn} = P_{m1}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Для определения  $P_{mn}$  используем закон Гука и метод сращивания двух асимптотик искомого решения. Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $P_{mn}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны стрингера, равна

$$P_{mn} = \frac{E_s F}{2y_0 m} \Delta v_{mn} \quad (m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Здесь  $E_s$  — модуль Юнга материала стрингера;  $F$  — площадь поперечного сечения стрингера;  $2y_0 m$  — расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{mn}$  — относительное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через  $a_0$  радиус точки крепления (площадки сцепления). Примем естественное допущение о том, что в рассматриваемой задаче теории упругости относительное упругое смещение точек  $z = m_* L + i(ny_0 - a_0)$  и  $z = m_* L - i(ny_0 - a_0)$  равно относительному смещению  $\Delta v_{mn}$  точек крепления [8]. Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет найти решение поставленной выше задачи.

С помощью комплексных потенциалов (2.1), (2.2), (2.5) и формулы Колосова — Мусхелишвили [15] находим относительное смещение точек крепления  $\Delta v_{mn}$ :

$$\Delta v_{kr} = \Delta v_{kr}^{(0)} + \Delta v_{kr}^{(1)} + \Delta v_{kr}^{(2)}.$$

Здесь

$$\Delta v_{kr}^{(0)} = \frac{1}{2\pi\mu(1+\varkappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \left( \varkappa_0 \ln \frac{C_1}{C_2} + \frac{2by_0 C_3 [2k(k-m_*)L^2 + C_3 a_0]}{C_2 C_1} \right),$$

$$\Delta v_{kr}^{(1)} = \frac{\sigma_0}{\mu} \left[ \frac{1}{4} (3 - \varkappa_0) \sin \frac{\pi C_3}{\omega} + \frac{1 + \varkappa_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{A - B} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}A} \sin \frac{\pi C_3}{\omega} \left( \sin \frac{\pi L}{\omega} \sqrt{A + B} + \sin \frac{\pi C_3}{\omega} \sqrt{A - B} \right) \right],$$

$$\Delta v_{kr}^{(2)} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{\lambda_0}^{l_0} f_1(t, l) q(t) dt - \frac{d_1}{\pi\mu} \int_{\lambda_0}^{l_0} X_*(t) f_2(t, l) q(t) dt + \\ + \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{l_0} f_1(t, l) f(t) dt - \frac{d_1}{\pi\mu} \int_0^{l_0} X_*(t) f_2(t, l) f(t) dt,$$

$$B = 1 - \sin^2(\pi l/\omega) - \sin^2(\pi C_3/\omega), \quad C_1 = (k - m_*)^2 L^2 + a_0^2, \quad \lambda_0 = \sin(\pi \lambda/\omega), \\ C_2 = (k - m_*)^2 L^2 + C_3^2, \quad C_3 = by_0 - a_0, \quad b = r - n, \quad d_1 = 2 \sin(\pi C_3/\omega), \\ f_1(t, l) = \frac{1}{2} (1 + \varkappa_0) C \ln \frac{D^2 \cos^2 \varphi + (D \sin \varphi - X_*(t))^2}{D^2 \cos^2 \varphi + (D \sin \varphi + X_*(t))^2}, \\ f_2(t, l) = \frac{C}{D(d^2 + d_1^2)} \left[ d \cos \varphi + d_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} d_1 (d \sin \varphi - d_1 \sin \varphi) \right], \\ d = \sin^2(\pi t/\omega) - 1 + d_1, \quad C = (\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega), \\ D^2 = A = \sqrt{B^2 + d_1^2}, \quad \varphi = (1/2) \operatorname{arctg}(d_1/B).$$

Искомые величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  определяются из решения бесконечной системы уравнений (3.4). Система уравнений (3.4) и сингулярное интегродифференциальное уравнение (3.3) связаны и должны решаться совместно. Интегродифференциальное уравнение (3.3) представим в виде

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l_0}^x Q(x) dx = C(x, q)q(x), \quad \lambda \leq |x - m\omega| \leq l, \quad (3.5)$$

где

$$Q(x) = \frac{1}{\pi X_*(x)} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{X_*(t)[q(t) + f(t)](\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega)} dt.$$

Разобьем отрезок  $[-l_0, l_0]$   $M$  узловыми точками  $t_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) и потребуем выполнения условий (3.5) в узловых точках, принадлежащих конечным зонам. В результате получим алгебраическую систему  $M_1$  уравнений ( $M_1$  — число узловых точек,

принадлежащих концевой зоне трещины) для определения приближенных значений  $q(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M_1$ ):

$$\begin{aligned}
 C_0 Q(t_1) &= C(t_1, q(t_1))q(t_1), \\
 C_0(Q(t_1) + Q(t_2)) &= C(t_2, q(t_2))q(t_2), \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_0 \sum_{m=1}^{M_1} Q(t_m) &= C(t_{M_1}, q(t_{M_1}))q(t_{M_1}).
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Здесь  $C_0 = -(1 + \nu_0)\pi l_0 / (2\mu M)$ .

При построении алгебраических систем все интервалы интегрирования были приведены к интервалу  $[-1, 1]$ , а затем с помощью квадратурных формул Гаусса интегралы были заменены конечными суммами.

В случае линейно-упругих связей системы (3.4) и (3.6) являются линейными. Для численного решения этих систем использовался метод Гаусса с выбором элемента, после чего вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_I = K_I^H + K_I^C.$$

Здесь  $K_I^H, K_I^C$  — коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленные действием силовой нагрузки и напряжений, возникающих в концевой зоне трещины соответственно:

$$\begin{aligned}
 K_I^H &= \frac{1}{\sqrt{\pi \sin(\pi l/\omega)}} \int_{-l_0}^{l_0} f(x) \sqrt{\frac{\sin(\pi x/\omega) + \sin(\pi l/\omega)}{\sin(\pi l/\omega) - \sin(\pi x/\omega)}} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi x}{\omega} dx, \\
 K_I^C &= \frac{1}{\sqrt{\pi \sin(\pi l/\omega)}} \int_{-l_0}^{l_0} q(x) \sqrt{\frac{\sin(\pi x/\omega) + \sin(\pi l/\omega)}{\sin(\pi l/\omega) - \sin(\pi x/\omega)}} \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi x}{\omega} dx.
 \end{aligned}$$

Состоянию предельного равновесия соответствует условие

$$G_b = G_n, \tag{3.7}$$

где  $G_b$  — скорость высвобождения энергии деформации [7]:

$$G_b = (1 - \nu) K_I^2 / (2\mu),$$

$G_n$  — скорость потребления энергии деформации связями в концевой зоне трещины:

$$G_n = h \int_{l-\lambda}^l \frac{\partial}{\partial l} (v^+ - v^-) q(x) dx.$$

Условие (3.7) является необходимым, но недостаточным для определения предельного состояния трещин с концевой зоной. Следовательно, для определения предельно-равновесного состояния вершины трещины и концевой зоны необходимо дополнительное условие. В качестве такого условия принимается, что разрыв связей на краю ( $x_0 = \pm\lambda$ ) происходит при выполнении условия

$$v^+(x_0, 0) - v^-(x_0, 0) = \delta_{cr}, \tag{3.8}$$

где  $\delta_{cr}$  — предельная вытяжка связей.

Совместное решение уравнений (3.4), (3.6)–(3.8) при заданных длине трещины и характеристиках связей позволяет найти критическую внешнюю нагрузку и размер концевой зоны  $d_{cr} = l - \lambda$  в случае предельно-равновесного состояния вершины трещины. Скорость потребления энергии деформации  $G_{cr}(d_{cr}, l)$ , найденная из этого решения, является энергетической характеристикой сопротивления разрушению, т. е.  $G_{cr} = G_n(d_{cr}, l)$ . При заданных размерах трещин и концевых зон с использованием предельных значений  $\delta_{cr}$  и  $G_{cr}$  можно выделить режимы равновесия и роста трещин в подкрепленной среде при монотонном нагружении.

В случае если выполняются условия  $G_b \geq G_{cr}$ ,  $v^+ - v^- < \delta_{cr}$  при заданном размере концевых зон, происходит продвижение вершин трещин с одновременным увеличением длины концевых зон без разрыва связей. Этот этап развития трещин можно считать процессом приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны происходит при выполнении условий  $G_b \geq G_{cr}$ ,  $v^+ - v^- \geq \delta_{cr}$ .

При выполнении неравенств  $G_b < G_{cr}$ ,  $v^+ - v^- \geq \delta_{cr}$  происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины, причем размер концевой зоны уменьшается, стремясь к критическому (для данного уровня нагрузок) значению.

Наконец, при выполнении условий  $G_b < G_{cr}$ ,  $v^+ - v^- < \delta_{cr}$  положения вершины трещины и концевой зоны не изменяются.

Таким образом, величина внешней нагрузки и критические параметры среды  $G_{cr}$ ,  $\delta_{cr}$  определяют характер разрушения:

- продвижение вершин трещин с одновременным продвижением концевых зон;
- уменьшение размеров концевых зон без продвижения периодической системы трещин;
- продвижение вершин трещин с одновременным разрывом связей на краю концевых зон.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах используется итерационный алгоритм, аналогичный методу упругих решений [16].

Считается, что при  $v^+ - v^- \leq v_*$  закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным.

Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении систем уравнений (3.4), (3.6) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в тех случаях, когда для концевых зон имеет место соотношение  $v^+ - v^- > v_*$ . На таких итерациях решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, изменяющейся вдоль концевых зон трещин и зависящей от величины усилий в связях, полученной на предыдущем шаге расчета.

Расчет эффективной податливости аналогичен расчету секущего модуля в методе переменных параметров упругости [17]. Итерационный процесс заканчивается, когда усилия вдоль концевых зон, полученные на двух последовательных итерациях, различаются незначительно.

Нелинейный участок кривой деформирования связей описывается билинейной зависимостью, восходящий участок которой соответствует упругому деформированию связей. При  $v^+ - v^- > v_*$  закон деформирования описывается нелинейной зависимостью, определяемой точками  $(v_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_{cr}, \sigma_{cr})$ , причем в случае  $\sigma_{cr} \geq \sigma_*$  имеет место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

На рис. 2 приведена зависимость усилий в связях концевых зон трещин  $q/\sigma_0$  от безразмерной координаты  $x/l$  при следующих значениях свободных параметров усиленной

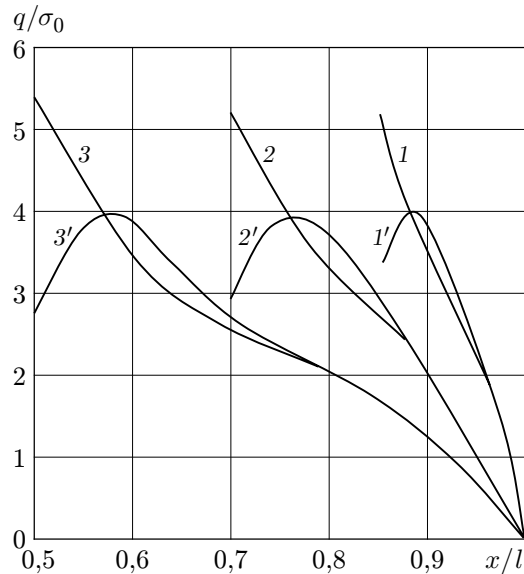


Рис. 2. Зависимость усилий в связях между берегами трещин в концевой зоне  $q/\sigma_0$  от величины  $x/l$ :

1–3 — линейный закон деформирования связей, 1'–3' — нелинейный закон; 1, 1' —  $d/l = 0,15$ , 2, 2' —  $d/l = 0,3$ , 3, 3' —  $d/l = 0,5$

среды:  $\nu = 0,3$ ,  $\varepsilon_1 = a_0/L = 0,01$ ,  $\varepsilon = y_0/L = 0,25$ ,  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95),  $E_s = 11,5 \cdot 10^4$  МПа (композит алюминий — сталь),  $F/(y_0h) = 1$ ,  $v_* = 10^{-6}$  м,  $\sigma_* = 130$  МПа,  $\sigma_{cr}/\sigma_* = 2$ ,  $\delta_{cr} = 2 \cdot 10^{-6}$  м, эффективная податливость связей  $C = 1,9 \cdot 10^{-7}$  м/МПа. Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14 [18].

Расчеты показывают, что наличие регулярной системы стрингеров приводит к уменьшению значений коэффициентов интенсивности напряжений, усилий в связях между берегами и раскрытия трещины. В случае линейного закона деформирования связей усилия в них имеют максимальные значения на краю концевых зон. Аналогичная закономерность наблюдается для величин раскрытия трещин.

На рис. 3 представлена зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений  $K_0 = K_I/K_I^H$  (который можно рассматривать как коэффициент упрочнения) от размера концевых зон трещин. Расчеты показывают, что при уменьшении относительной податливости коэффициент упрочнения также уменьшается.

Анализ предельно-равновесного состояния усиленной пластины при наличии периодической системы трещин со связями в концевых зонах и действии растягивающей нагрузки сводится к параметрическому исследованию решения алгебраических систем (3.4), (3.6) при различных законах деформирования связей, размерах концевых зон трещин, упругих постоянных материала пластины. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем в каждом приближении определяются усилия в связях и раскрытие трещин. Значения коэффициентов интенсивности напряжений, скоростей высвобождения и поглощения энергии вычисляются по приведенным выше формулам.

Как показывают расчеты, наличие укрепляющих элементов обуславливает уменьшение деформации растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном линии трещин, вследствие чего существенно уменьшается коэффициент интенсивности напряжений в окрестности концов трещин. При некоторых значениях геометрических параметров коэффициенты интенсивности напряжений оказываются отрицательными, т. е. берега трещин контактируют. Взаимодействие берегов трещин приводит к появлению контактных напряжений. В этом случае задача должна решаться в другой постановке.



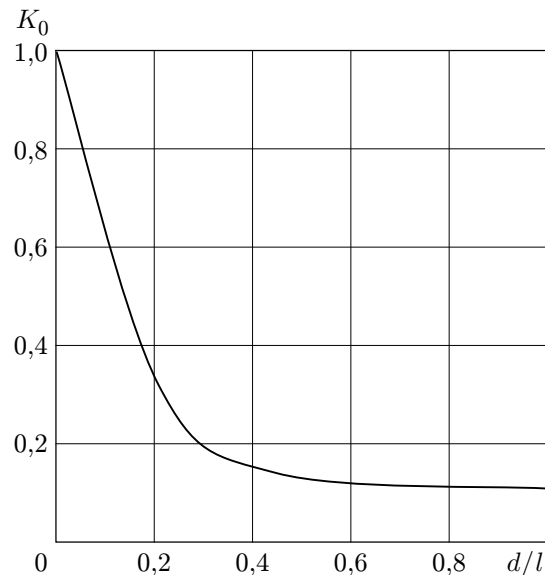


Рис. 3. Зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений  $K_0$  от размера концевых зон трещин

**4. Частичный контакт берегов трещин со связями.** Рассматривается случай, когда размеры концевой зоны, в которой действуют силы сцепления (связи), больше размеров контактной зоны трещины. При действии внешних нагрузок в связях между берегами трещин возникают усилия  $q(x)$ . Соответственно на участках, где берега трещин контактируют, появляются нормальные напряжения  $p(x)$ . Величины этих напряжений  $q(x)$  и  $p(x)$ , а также размер контактной области заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

В рассматриваемой задаче граничные условия имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \begin{cases} 0, & y = 0, \quad |x - m\omega| < \lambda, \\ q(x), & y = 0, \quad \lambda \leq |x - m\omega| < \lambda_1, \\ p(x), & y = 0, \quad \lambda_1 \leq |x - m\omega| \leq l. \end{cases}$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнениями

$$v^+(x) - v^-(x) = \begin{cases} 0, & y = 0, \quad \lambda_1 \leq |x - m\omega| \leq l, \\ C(x, q)q(x), & y = 0, \quad \lambda \leq |x - m\omega| < \lambda_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

В рассматриваемом случае для определения аналитических функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  получаем следующую граничную задачу:

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + \Omega_1(x) = \begin{cases} f(x), & y = 0, \quad |x - m\omega| < \lambda, \\ f(x) + q(x), & y = 0, \quad \lambda \leq |x - m\omega| < \lambda_1, \\ f(x) + p(x), & y = 0, \quad \lambda_1 \leq |x - m\omega| \leq l. \end{cases} \quad (4.2)$$

Решение краевой задачи (4.2) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Запишем искомое решение задачи

$$\Omega_1(z) = 0, \quad \Phi_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{F_*(x)(\pi/\omega) \cos(\pi x/\omega)}{\sin(\pi x/\omega) - \sin(\pi z/\omega)} dx.$$

Здесь

$$F_*(x) = \begin{cases} f(x)/X(x), & |x - m\omega| < \lambda, \\ (q(x) + f(x))/X(x), & \lambda \leq |x - m\omega| < \lambda_1, \\ (p(x) + f(x))/X(x), & \lambda_1 \leq |x - m\omega| \leq l. \end{cases} \quad X(z) = \sqrt{\sin^2(\pi z/\omega) - \sin^2(\pi l/\omega)},$$

С учетом поведения функции  $\Phi_1(z)$  на бесконечности условие разрешимости краевой задачи записывается в виде

$$\int_{-l_0}^{l_0} \frac{[f(x) + q(x) + p(x)](\pi/\omega) \cos(\pi x/\omega)}{X_*(x)} dx = 0. \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) используется для определения размера концевой контактной зоны.

С помощью полученного решения находим

$$\frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{d}{dx} (v^+ - v^-) = -\frac{X_*(x)}{\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{[f(x) + q(x) + p(x)](\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{X_*(x)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt.$$

Учитывая условия (4.1), получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{[f(x) + q(x) + p(x)](\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{X_*(x)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt &= 0 \quad (\lambda_1 \leq |x - m\omega| \leq l), \\ -\frac{X_*(x)}{\pi} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{[f(x) + q(x) + p(x)](\pi/\omega) \cos(\pi t/\omega)}{X_*(x)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt &= \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{d}{dx} [C(x, q)q(x)] \\ &(\lambda \leq |x - m\omega| < \lambda_1), \end{aligned} \quad (4.4)$$

для решения которых используется коллокационная схема с аппроксимацией неизвестных функций. При построении алгебраических систем все интервалы интегрирования были приведены к одному интервалу  $[-1, 1]$ , после чего интегралы были заменены конечными суммами с помощью квадратурных формул Гаусса. Производные в правых частях интегродифференциальных уравнений (4.4) заменялись конечно-разностными аппроксимациями.

Поскольку размеры контактных зон неизвестны, полученная алгебраическая система даже в случае линейных связей является нелинейной. Для решения этой системы использовался метод последовательных приближений [17].

Ниже приводятся значения размера контактной зоны  $(d_1)_* = d_1/L$  в зависимости от длины трещины  $l_* = l/L$  при  $\varepsilon = 0,15$  и тех же значениях свободных параметров усиленной среды, что и в п. 3. Значениям  $l_* = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$  соответствуют значения  $(d_1)_* = 0,101; 0,152; 0,206; 0,231; 0,259; 0,335$ .

Анализ модели частичного закрытия трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений (4.3), (4.4) и бесконечной алгебраической системы вида (3.4) при различных геометрических и физических параметрах среды, усиленной стрингерами, законах деформирования связей и размерах концевых областей трещин. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются контактные напряжения  $p(x)$ , усилия в связях  $q(x)$ , а также размеры контактных зон.

В заключение следует отметить, что соотношения, полученные в данной работе, позволяют решать обратную задачу, т. е. определять характеристики подкрепления среды и напряженное состояние пластины, при которых контакт берегов трещины происходит в заранее заданной области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Толкачев В. М.** Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154, № 4. С. 86–88.
2. **Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.** Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 2. С. 158–164.
3. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983.
4. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985.
5. **Броек Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980.
6. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
7. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
8. **Мирсалимов В. М.** Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22, № 1. С. 84–88.
9. **Максименко В. Н.** Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия // ПМТФ. 1988. № 2. С. 133–140.
10. **Ji H., de Gennes P. G.** Adhesion via connector molecules: The many-stitch problem // Macromolecules. 1993. V. 26. P. 520–525.
11. **Budiansky B., Evans A. G., Hutchinson J. W.** Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // Intern. J. Solids Structures. 1995. V. 32, N 3/4. P. 315–328.
12. **Goldstein R. V., Bakirov V. F., Perelmuter M. N.** Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer — polymer joints // Proc. Inst. Phys. Technol. Russ. Acad. of Sci. 1997. V. 13. P. 115–125.
13. **Mir-Salim-zadeh M. V.** Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole // Intern. J. Fracture. 2003. V. 122, N 1/2. P. L113–L117.
14. **Мир-Салим-заде М. В.** Трещина со связями между берегами в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Механика композит. материалов. 2005. Т. 41, № 6. С. 773–782.
15. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
16. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
17. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.
18. **Мир-Салим-заде М. В.** Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров // Механика композит. материалов. 2007. Т. 43, № 1. С. 59–72.

*Поступила в редакцию 12/V 2008 г.,  
в окончательном варианте — 23/XII 2008 г.*