

УДК 532.529.6

## АСПИРАЦИЯ АЭРОЗОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПРОБООТБОРНИК ИЗ НИЗКОСКОРОСТНОГО НИСХОДЯЩЕГО ПОТОКА И ИЗ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЫ

М. В. Ванюнина, Р. С. Галеев, Ш. Х. Зарипов, Э. В. Скворцов

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева  
Казанского государственного университета, 420008 Казань  
E-mail: shamil.zaripov@ksu.ru

Решена задача об аспирации в двумерный цилиндрический пробоотборник из низкоскоростного нисходящего потока и из неподвижной среды. Предложена простая аналитическая модель для поля скоростей несущей среды в окрестности пробоотборника с учетом конечных размеров входного отверстия. Проведены параметрические исследования коэффициента аспирации в зависимости от числа Стокса для различных отношений скоростей набегающего потока и аспирации и различных скоростей гравитационного оседания при двух положениях пробоотборника. Обсуждается осаждение частиц на нижней стороне цилиндра для пробоотборника, ориентированного отверстием вниз.

Ключевые слова: аспирация, потенциальное течение, цилиндрический пробоотборник.

**Введение.** Пробоотборники с затупленной головной частью, и в частности цилиндрические, часто используются для измерений концентраций аэрозольных частиц внутри помещений. Интерес к ним вызван схожестью поведения пылевых частиц вокруг головы человека с поведением частиц при аспирации. Для прогнозирования искажений концентраций частиц при аэрозольных измерениях для разных типов пробоотборников и условий пробоотбора исследуется коэффициент аспирации. В общем случае он зависит от отношения скорости набегающего потока к скорости аспирации, размера и плотности частиц, геометрических размеров и формы пробоотборника. Результаты теоретических и экспериментальных исследований коэффициента аспирации содержатся в монографиях [1–3].

В типичных условиях в сильно запыленном атмосферном или комнатном воздухе доля аэрозольных частиц не превышает  $10^{-6}$  воздушной массы. Поэтому можно пренебречь влиянием аэрозольных частиц на газовый поток и свести задачу моделирования течения аэрозоля при аспирации к решению двух задач: определению поля скоростей несущей среды и расчету траекторий частиц в найденном поле скоростей. Математические модели аспирации в цилиндрические пробоотборники ранее были развиты в работах [3–8]. Поведение траекторий безынерционных аэрозольных частиц в окрестности цилиндрического пробоотборника при аспирации из неподвижного воздуха анализировалось в работах [4, 8]. В [3, 5] для вычисления коэффициента аспирации в рамках потенциального течения несжимаемой жидкости представлены аналитическая модель (точечный сток на цилиндре) и численная модель (аспирация через конечномерную щель). Модели в приближении вязкого течения несжимаемой жидкости были использованы при исследовании коэффициента

аспирации в цилиндрический пробоотборник из движущегося газа и из неподвижной среды в работах [6, 7]. Течение газа вокруг цилиндрического и сферического пробоотборников и коэффициент аспирации исследовались экспериментально в [9, 10].

При измерениях внутри помещений пробоотбор осуществляется из малоскоростного газового потока или из неподвижной среды. В этих условиях наряду с инерционностью частиц важным фактором, влияющим на процесс аспирации, становится сила тяжести. Ее влияние на эффективность аспирации в сферический пробоотборник изучалось в работах [11, 12].

В настоящей работе исследуется задача об аспирации в цилиндрический пробоотборник из низкоскоростного нисходящего потока и из неподвижной среды. В рамках модели потенциального течения несжимаемой жидкости получено аналитическое решение для поля скоростей несущей среды в окрестности пробоотборника с учетом конечных размеров входного отверстия. На основе численного интегрирования уравнений движения частиц в найденном поле скоростей и определения предельных траекторий проведены параметрические исследования коэффициента аспирации при изменении числа Стокса при различных отношениях скоростей набегающего потока и аспирации и различных скоростей седиментации.

**Постановка задачи.** Рассматриваемый пробоотборник представляет собой длинный в перпендикулярном к потоку направлении цилиндр. Аэрозольные частицы вдали от пробоотборника падают вниз вместе с нисходящим равномерным газовым потоком со скоростью  $U_0$  и под действием силы тяжести со стационарной скоростью оседания  $V_s$ . В декартовой системе координат  $(X, Y)$  с осью  $X$ , направленной вертикально вниз, сечение цилиндра представляет собой окружность с полярными координатами  $r_0, \theta$ . Вдоль образующей цилиндра на его верхней или нижней части расположена щель шириной  $2H$ , через которую аспирируется аэрозоль из набегающего потока.

Для многих практически важных случаев задача о плоском течении несущей среды может быть рассмотрена с приемлемой точностью в рамках модели стационарного потенциального течения несжимаемой жидкости. Вводятся комплексная переменная  $Z = X + iY$ , комплексный потенциал течения  $W = W(z)$  и безразмерные величины  $z = Z/r_0, x = X/r_0, y = Y/r_0, h = H/r_0, R = U_0/U_a$ . Размеры щели обычно много меньше радиуса цилиндра, так что  $h \ll 1$ , и течение через сечение щели можно представить как течение через дугу  $\{|z| = 1, \pi - \alpha \leq \theta \leq \pi + \alpha (\alpha \ll 1)\}$  с расходом  $q = 2HU_a$ , где  $U_a$  — скорость аспирации (средняя скорость газового потока на входе в отверстие пробоотборника). Будем считать, что потенциал течения на этой дуге постоянен. Оставшаяся часть окружности непроницаема.

На рис. 1 приведена схема правой половины течения  $y \geq 0$ , причем рис. 1,а соответствует положению пробоотборника отверстием вверх, а рис. 1,б — отверстием вниз. Штриховыми линиями показаны линии тока, разделяющие потоки аспирируемого газа и газа, обтекающего цилиндр. Указанные линии тока проходят через точку  $N$ , в которой скорость течения равна нулю. Предельные траектории (сплошные линии) разделяют потоки аспирируемых частиц и частиц, не попадающих в пробоотборник.

**Поле скоростей несущей среды и уравнения движения частиц.** Рассмотрим случай, когда пробоотборник ориентирован отверстием вверх. Функция

$$\varsigma = (z + 1/z)/2 \tag{1}$$

дает отображение области течения в плоскости  $z = x + iy$  на верхнюю полуплоскость  $\varsigma$ . При условии, что  $-\cos \alpha < n \leq 1$ , точка торможения  $N (\varsigma = n)$  лежит на окружности. Если  $n > 1$ , то точка  $N$  располагается на оси  $x$ . Области течения в плоскости  $w = W/(U_a r_0) = \varphi + i\psi$  соответствует четырехугольник  $DABND$  с углами  $\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi$ .

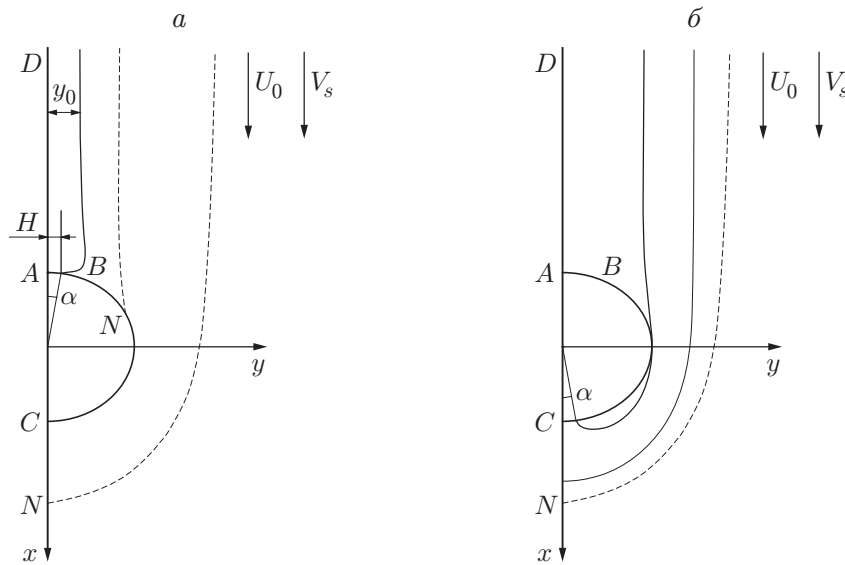


Рис. 1. Схема течения при аспирации в цилиндрический пробоотборник из нисходящего потока

Согласно интегралу Кристоффеля — Шварца [13]

$$w(\zeta) = 2c \int (\zeta + 1)^{-1/2} (\zeta + \cos \alpha)^{-1/2} (\zeta - n) d\zeta. \quad (2)$$

Из (1), (2) комплексный потенциал  $w(z)$  и комплексно-сопряженная скорость течения  $\chi(z) = dw/dz = u_x - iu_y$  с учетом условия  $\chi(\infty) = R$  запишутся в виде

$$w(z) = R \left[ \frac{1+z}{z} (z^2 + 2z \cos \alpha + 1)^{1/2} - 2(1 + \cos \alpha + 2n) \ln \frac{1+z + (z^2 + 2z \cos \alpha + 1)^{1/2}}{z^{1/2}} \right]; \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{R(z-1)(z^2 - 2nz + 1)}{z^2(z^2 + 2z \cos \alpha + 1)^{1/2}}. \quad (4)$$

Учитывая, что разность значений функции тока в точках  $A$  и  $B$  равна расходу через дугу  $AB$  и что  $\cos \alpha = \sqrt{1 - h^2}$ , из формулы (3) получим

$$n = (Q - \sqrt{1 - h^2} - 1)/2, \quad Q = h/(\pi R). \quad (5)$$

Соотношения (4), (5) дают представления декартовых составляющих скорости течения несущей среды  $u_x$ ,  $u_y$  через координаты точки  $z$  и параметры  $h$  и  $R$ . Согласно этим соотношениям нулевая скорость достигается на оси  $x$  в точках  $x = 1$  и  $x = n + (n^2 - 1)^{1/2}$  в случае  $n > 1$  либо на окружности в точках  $x = n$ ,  $y = (1 - n^2)^{1/2}$  при  $n < 1$ .

Пусть  $\alpha \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow 0$ , а расход  $Q$  через пробоотборник сохраняется. Тогда  $n = Q/2 - 1$  и формулы (3), (4) представятся в виде

$$\begin{aligned} \frac{w(z)}{R} &= \frac{W(z)}{U_0 r_0} = z + \frac{1}{z} - Q \ln \frac{(z+1)^2}{z}; \\ \frac{1}{R} \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{U_0 r_0} \frac{dW}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} - Q \left( \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) дает поле скоростей для модели точечного стока, исследованной в [3, 8].

Безразмерную комплексно-сопряженную скорость течения при аспирации из неподвижной среды можно получить из формул (4), (5) при  $R \rightarrow 0$ :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{h}{\pi} \frac{1-z}{z(z^2 + 2z\sqrt{1-h^2} + 1)^{1/2}}.$$

Комплексный потенциал и комплексно-сопряженная скорость поля течения несущей среды при ориентации пробоотборника отверстием вниз (см. рис. 1,б) записываются в виде

$$w(z) = R \left[ \frac{z-1}{z} (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)^{1/2} - 2(2m - 1 - \cos \alpha) \ln \frac{z-1 + (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)^{1/2}}{z^{1/2}} \right],$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{R(z+1)(z^2 - 2mz + 1)}{z^2(z^2 - 2z \cos \alpha + 1)^{1/2}}, \quad m = \frac{1}{2} (Q + 1 + \sqrt{1-h^2}).$$

В предположении стоксового закона сопротивления и пренебрежении всеми силами, кроме силы аэродинамического сопротивления и силы тяжести, безразмерные уравнения движения невзаимодействующих аэрозольных частиц записываются в виде

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{u_x - v_x}{St} + \frac{v_s}{St}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{u_y - v_y}{St},$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \tag{7}$$

где  $v_x, v_y$  — безразмерные декартовы составляющие скорости частицы;  $t$  — время;  $St = \tau U_a / r_0$  — число Стокса;  $\tau = \rho_p \delta^2 / (18\mu)$  — время релаксации частицы;  $\rho_p$  — плотность вещества частицы;  $\delta$  — диаметр частицы;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости несущей среды;  $v_s = V_s / U_a$  — безразмерная скорость гравитационного оседания;  $V_s = \tau g$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. В задачах об аспирации аэрозоля из движущегося газа наряду с введенным числом Стокса применяется также видоизмененное число Стокса  $St_0 = \tau U_0 / r_0 = St R$ .

Решение уравнений (7) с начальными условиями при  $t = 0$

$$v_x = R + v_s, \quad v_y = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0 \tag{8}$$

позволяет рассчитать траекторию аэрозольной частицы.

Коэффициент аспирации  $A$  определяется как отношение концентрации  $C_a$  частиц в потоке аэрозоля на входе в аспирирующее отверстие к концентрации частиц вдали от пробоотборника  $C_0$ . Условие баланса аспирируемых частиц, траектории которых ограничены предельной траекторией с начальной ординатой  $Y_0$ , вдали от пробоотборника и на входе в отверстие записывается в виде

$$C_0(U_0 + V_s)2Y_0 = C_a q. \tag{9}$$

С учетом (9) получим

$$A = C_a / C_0 = (U_0 + V_s)Y_0 / (U_a H) = R_1 y_0 / h, \tag{10}$$

где  $R_1 = R + v_s, y_0 = Y_0 / r_0$ .

**Результаты расчетов.** С помощью описанной модели и модели точечного стока были проведены исследования аспирации аэрозоля из нисходящего потока с учетом влияния силы тяжести. Предельная траектория находилась двумя способами: методом итераций и методом краевой задачи, предложенным в [14]. Метод итераций сводится к многократному решению задачи Коши (7), (8) и определению траектории, попадающей на край входного отверстия. Захваченной считается частица, траектория которой пересекает дугу  $AB$ .

В методе краевой задачи для уравнений (7) на одной границе интервала времени движения частицы ставятся условия для скорости частицы вдали от пробоотборника, а на другой — условия равенства координат частицы координатам края входного отверстия. Результаты расчетов по обоим методам совпали, при этом метод краевой задачи оказался более эффективным.

Различие предложенной модели и модели точечного стока начинает проявляться в непосредственной близости от входного отверстия. Модель точечного стока на цилиндре дает бесконечно большую скорость в стоке и, следовательно, завышение скорости в ближайшей его окрестности, что может сказаться на точности расчета коэффициента аспирации. Предложенная аналитическая модель, учитывающая конечные размеры аспирирующего отверстия, дает распределение поля скоростей в ближайшей окрестности пробоотборника, более близкое к реальному.

Ниже приведены некоторые результаты выполненных численных исследований. Зависимость коэффициента аспирации от числа Стокса  $St_0$  в случае пробоотбора из движущегося потока приведена на рис. 2. Наблюдается характерная для пробоотборников с затупленной головной частью зависимость коэффициента аспирации от числа Стокса, в которой можно выделить пять основных зон [6]. Эффективность аспирации близка к единице в области малых чисел Стокса (зона I), когда инерционность частиц почти не проявляется. С ростом числа Стокса коэффициент аспирации несколько возрастает (зона II). После прохождения максимума эффективность аспирации падает до минимального значения (зона III). Частицы с числами Стокса, соответствующими зоне IV, обладают столь большой инерцией, что слабо испытывают влияние газовой скорости перед пробоотборником. Эффективность аспирации при этом начинает возрастать до асимптотического значения, соответствующего случаю сильно инерционных частиц (зона V). В случае  $St \rightarrow \infty$  начальная ордината предельной траектории совпадает с полушириной отверстия  $y_0 = h$  и согласно формуле (10) коэффициент аспирации становится равным отношению скоростей набегающего потока и аспирации.

Рис. 2 показывает, что предложенная модель и модель точечного стока дают близкие результаты в областях достаточно больших и малых чисел Стокса (зоны IV, V, I, II). Заметное расхождение результатов наблюдается в области промежуточных значений чисел Стокса (зона III). При этом модель с учетом конечных размеров входного отверстия дает лучшее согласование с результатами, полученными в приближении вязкой жидкости.

Скорость воздушных потоков внутри помещений обычно не превышает  $0,1 \div 0,2$  м/с, т. е. можно принять в качестве диапазона изменения скорости ветра  $U_0 = 0 \div 0,2$  м/с. В [15] приведены данные экспериментов для случая пробоотбора аэрозольных частиц в

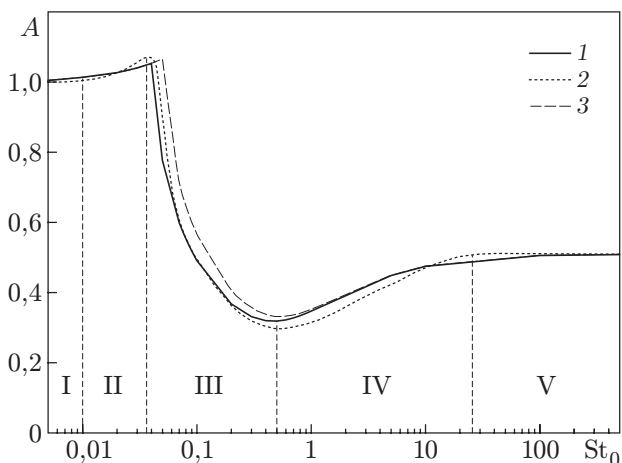


Рис. 2. Зависимость коэффициента аспирации  $A$  от  $St_0$  при  $R = 0,51$  и  $h = 0,016$ :

1 — модель с учетом конечной ширины входного отверстия; 2 — модель точечного стока; 3 — расчет с учетом вязкости при  $Re = 10^4$  [6]

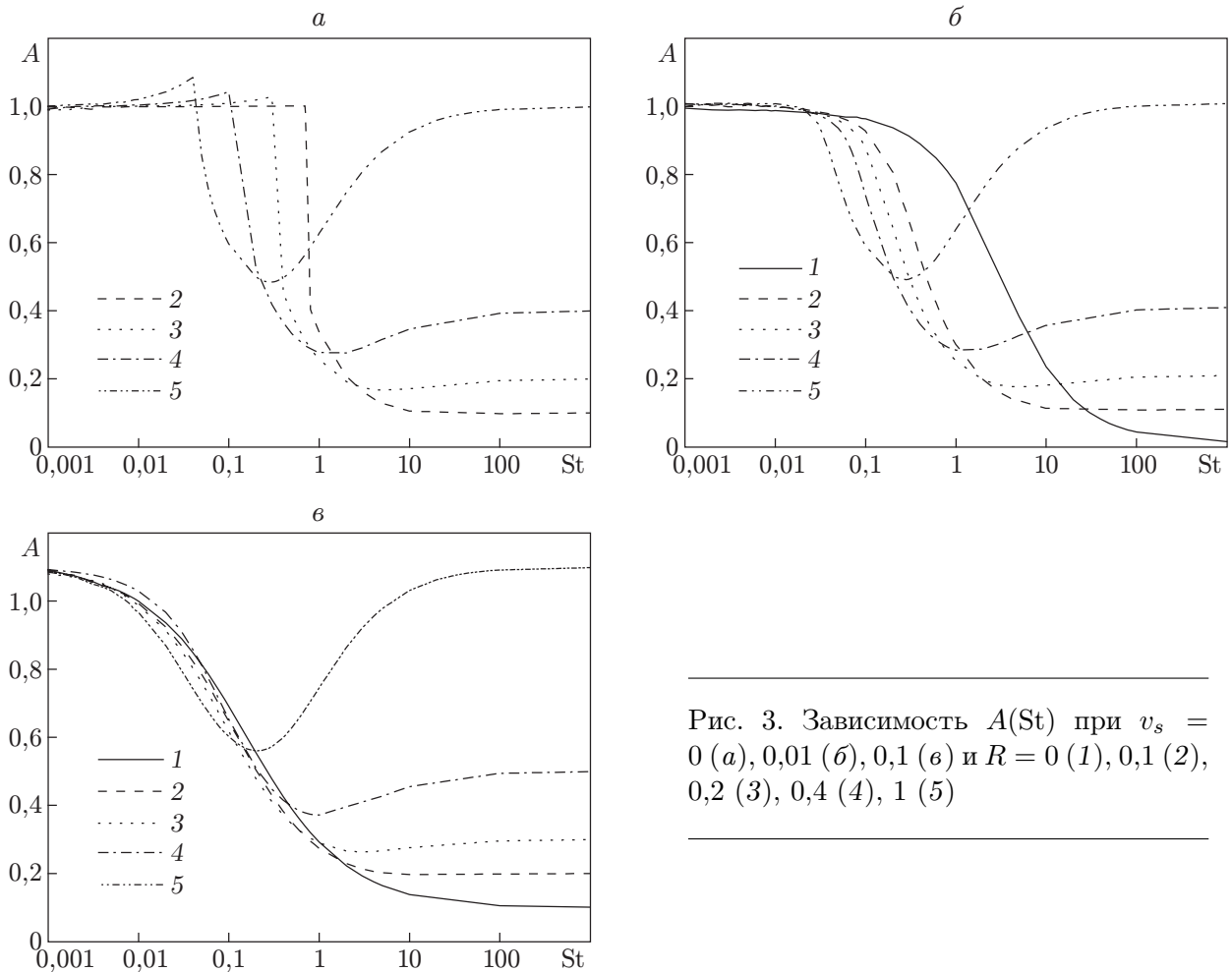


Рис. 3. Зависимость  $A(St)$  при  $v_s = 0$  (*a*),  $0,01$  (*б*),  $0,1$  (*в*) и  $R = 0$  (1),  $0,1$  (2),  $0,2$  (3),  $0,4$  (4),  $1$  (5)

тонкостенную трубку из низкоскоростного нисходящего потока при скоростях аспирации  $U_a = 0,2 \div 13$  м/с. Таким образом, можно считать, что интересным для исследования аспирации внутри помещений является диапазон изменения отношений скоростей ветра и аспирации  $R = 0 \div 1$ . Отметим также, что для указанных скоростей и типичных размеров цилиндрических пробоотборников влияние инерционности на коэффициент аспирации будет заметным, начиная с размеров частиц больше 10 мкм.

Зависимости коэффициента аспирации от числа Стокса для  $v_s = 0; 0,01; 0,1$  при варьировании отношения скоростей невозмущенного потока и аспирации приведены на рис. 3. В отсутствие влияния силы тяжести (рис. 3, *a*) с изменением числа Стокса от нуля до бесконечности коэффициент аспирации меняется от единицы до  $R$ . С уменьшением  $R$  наблюдается более интенсивное уменьшение коэффициента аспирации, при этом в распределении  $A(St)$  пропадают максимум и минимум для промежуточных значений  $St$ . Это связано с изменением характера поля течения перед пробоотборником при малых  $R$ . Вклад течения от стока в суммарное поле скоростей превышает влияние течения, вызванного обтеканием цилиндра. В случае  $v_s \neq 0$  все кривые начинаются от предельного значения  $A = 1 + v_s$  при  $St \rightarrow 0$ . С увеличением числа Стокса коэффициент аспирации падает до некоторого значения, тем меньшего, чем меньше  $R$ . В этом диапазоне эффективность аспирации определяется инерционным поведением частиц в поле стока и седиментацией. С ростом  $St$  начинает сказываться инерционность частиц, приобретенная в набегающем потоке, и кри-

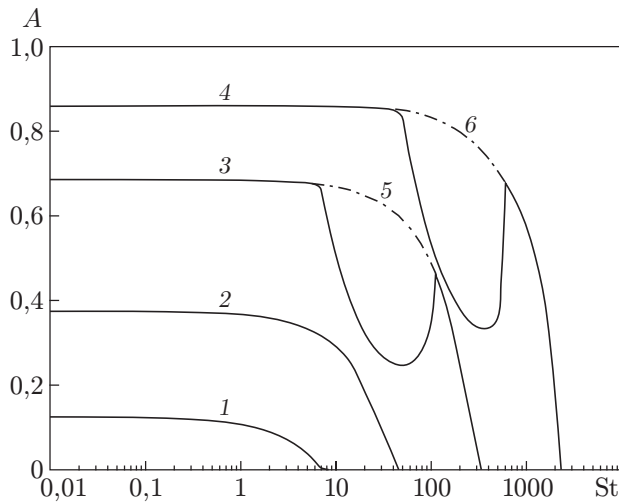


Рис. 4. Зависимость  $A(St)$  в случае ориентации пробоотборника отверстием вниз при  $R = 0$  и значениях  $v_s = 0,014$  (1);  $0,01$  (2);  $0,005$  (3, 5);  $0,002$  (4, 6) и  $h = 0,016$  (1–4) и  $0,16$  (5, 6)

вые при  $St \rightarrow \infty$  стремятся к величине  $A = R + v_s$ , монотонно или проходя через минимум. В случае  $v_s = 0,01$  коэффициент аспирации зависит от  $R$  при промежуточных значениях числа Стокса (рис. 3, б). Зона падения коэффициента аспирации с уменьшением отношения скоростей ветра и аспирации сдвигается в сторону больших чисел Стокса. При большей скорости седиментации кривые  $A(St)$ , соответствующие различным значениям  $R$ , близки к соответствующей зависимости в случае аспирации из неподвижной среды и мало отличаются одна от другой на спадающем участке (рис. 3, в).

В случае ориентации пробоотборника отверстием вниз и в присутствии нисходящего потока газа используемая модель потенциального течения, по-видимому, будет давать лишь качественно правильные результаты в связи со значительным влиянием вязкости и вероятностью отрыва газового потока за цилиндром. Ниже для этого случая приведены результаты расчетов коэффициента аспирации из неподвижной среды. На рис. 4 показана зависимость  $A(St)$  в случае  $R = 0$  при различных значениях относительной скорости осаждения  $v_s$  и величины  $h$ . При такой ориентации пробоотборника цилиндрическая головка начинает экранировать поток падающих частиц. При некоторой комбинации числа Стокса и скорости осаждения эффект экранирования приводит к нулевому коэффициенту аспирации, и аэрозольные частицы не аспирируются.

Для безынерционных частиц с учетом экранирования коэффициент аспирации может быть представлен в виде [4]

$$A = 1 - v_s(1/h - 1). \quad (11)$$

Расчетные значения коэффициента аспирации при  $St \rightarrow 0$  соответствуют формуле (11). При условии  $A = 0$  из (11) следует, что  $v_s = h/(1 - h)$  — это то значение скорости осаждения, начиная с которого частицы не попадают в пробоотборник. Сплошные кривые на рис. 4 соответствуют ширине отверстия  $h = 0,016$ . Видно, что при  $v_s = 0,005$  и  $v_s = 0,002$  наблюдается немонотонное поведение функции  $A(St)$  с провалом кривой в области промежуточных значений  $St$ . Наблюдаемый всплеск в поведении коэффициента аспирации объясняется осаждением частиц, притянутых течением от стока, на цилиндре вблизи отверстия пробоотборника. Таким образом, этот эффект проявляется для малых скоростей осаждения при малой ширине входного отверстия. Увеличение ширины отверстия ( $h = 0,16$ ) при сохранении расхода стока приводит к аспирации тех частиц, которые при малой ширине отверстия столкнулись бы с цилиндром (штрихпунктирные линии 5, 6 на рис. 4). За пределами зоны чисел Стокса, где возможно осаждение на нижней стороне цилиндра (кривые 3 и 5, 4 и 6) коэффициенты аспирации при различной ширине отверстия и одинаковом расходе пробоотборника совпадают.

**Заключение.** Предложена простая аналитическая модель для поля скоростей несущей среды в задаче аспирации в двумерный цилиндрический пробоотборник. Модель учитывает конечные размеры входного отверстия и дает хорошее согласование с расчетами по модели с учетом вязких эффектов. В задаче аспирации из нисходящего низкоскоростного потока и из неподвижного воздуха сила тяжести становится важным фактором, влияющим на коэффициент аспирации. В предельных случаях безынерционных и сильноинерционных частиц аддитивный вклад силы тяжести пропорционален стационарной скорости оседания. При промежуточных значениях числа Стокса коэффициент аспирации определяется совместным действием инерционных и гравитационных сил. Для пробоотборника, ориентированного отверстием вниз, при малых значениях ширины отверстия и скорости седиментации возможно осаждение частиц на нижней стороне цилиндра, приводящее к провалам в распределении зависимости коэффициента аспирации от числа Стокса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Vincent J. H.** Aerosol sampling: Science and practice. London: Wiley and Sons, 1989.
2. **Волощук В. М.** Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеиздат, 1971.
3. **Dunnett S. J., Ingham D. B.** The mathematics of blunt body sampling. Lecture notes in engineering. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
4. **Davies C. N.** Movement of dust particles near a horizontal cylinder containing a sampling orifice // Brit. J. Appl. Phys. 1967. V. 18. P. 653–656.
5. **Dunnett S. J., Ingham D. B.** A mathematical theory to two-dimensional blunt body sampling // J. Aerosol Sci. 1986. V. 17, N 5. P. 839–853.
6. **Chung I. P., Dunn-Rankin D.** Numerical simulations of two-dimensional blunt body sampling in viscous flow // J. Aerosol Sci. 1992. V. 23. P. 217–232.
7. **Chung I. P., Dunn-Rankin D.** The effects of bluntness and orientation on two dimensional samplers in calm air // Aerosol Sci. and Technol. 1993. V. 19. P. 371–380.
8. **Dunnett S. J.** Particle motion in the vicinity of a bulky sampling head operating in calm air // Aerosol Sci. and Technol. 2002. V. 36. P. 308–317.
9. **Chung I. P., Dunn-Rankin D.** Experimental investigation of air flow around blunt aerosol samplers // J. Aerosol Sci. 1997. V. 28, N 2. P. 289–305.
10. **Chung I. P., Trinh T., Dunn-Rankin D.** Experimental investigation of a two-dimensional cylindrical sampler // J. Aerosol Sci. 1994. V. 25, N 5. P. 935–955.
11. **Dunnett S. J., Vincent J. H.** A mathematical study of aerosol sampling by an idealised blunt sampler oriented at an angle to the wind: the role of gravity // J. Aerosol Sci. 2000. V. 31. P. 1187–1203.
12. **Galeev R. S., Zaripov S. K.** Theoretical study of aerosol sampling by an idealised sampler in calm air // J. Aerosol Sci. 2003. V. 34, N 9. P. 1135–1150.
13. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
14. **Galeev R. S., Zaripov S. K.** Deposition of aerosol particles on a sphere: the role of gravity // Aerosol Sci. and Technol. 2003. V. 37. P. 325–329.
15. **Grinshpun S. A., Lipatov G. N., Sutugin A. G.** Sampling errors in cylindrical nozzles // Aerosol Sci. and Technol. 1990. N 12. P. 716–740.