

4. Ж о х о в с к и й М. К. Техника измерения давления и разрежения. Изд. 2-е, Машгиз, 1952.
5. E s k e n r o d e R. T. and K i r s h n e r H. A. Measurement of pressure transients. Rev. Sci. Instrum., 1954, 25, 33—40.
6. Bibliography and Index on Dynamic Pressure Measurement. NBS. Circular No. 558, 1955, Department of commerce, National Bureau of Standards, Washington.
7. Л е о н и д о в а Г. Г., П о л а н д о в И. Н. Измерение высоких давлений с помощью проволочных преобразователей. Приборы и техника эксперимента, 1960, № 2, стр. 159.
8. Р о й т м а н Л. М. Тензومانометры. Измерительная техника, 1957, № 5, стр. 22—24.
9. M a t h e w s o n C. E. The «dimensionless» strain gage transducer. Instrument and control systems, 1961, 34, N. 10, Part 1, 1870—1871.
10. З е л я е в А. Ф., Ш у м к о в К. М., А л е к с е е в Е. Н. Диафрагменный тензометрический манометр. Завод. лаборатория, 1956, т. 22, № 11, стр. 1368—1369.
11. E d w a r d s P. L. High-speed high-pressure gage. Instrument and Automation, 1957, vol. 30, No. 8, p. 1504—1506.
12. K a u t s c h Rudi. Electricische Druckung Hochdruckmessung mit Demungsmessstreifen. Z. Messen, Steuern, Regeln, 1961, 4, No. 5, p. 205—207.
13. Л л о й д Е. К., Д ж о н с о н Д. П. Статическая и динамическая калибровка приборов для измерения давления в Национальном Бюро Стандартов. Первый Межд. Конгресс ИФАК по автоматическому управлению. Изд. АН СССР, 1960.

ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Э. П. Зимиц

(Москва)

Течение электропроводной жидкости между двумя плоскими бесконечными параллельными непроводящими пластинами при наличии поперечного магнитного поля, нормального к плоскости пластин, впервые было рассмотрено Гартманом [1]. В дальнейшем эта задача была обобщена на случай вертикальной конвекции [2,3] и течение жидкости с анизотропной проводимостью [4-6]. При такой постановке поле скоростей между цилиндрами определяется однородным внешним магнитным полем, затем по известному решению для поля скоростей ищется индуцированное магнитное поле.

Ниже рассматривается аналогичное течение для случая, когда вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости, параллельной пластинам, а последние являются проводящими.

Обозначения

<p>E — напряженность электрического поля, G — число Гартмана, H — напряженность магнитного поля, N — число Грасгоффа, T — температура, w — скорость, Z — заряд электрона, b — полуширина канала, g — ускорение гравитационного поля, j — плотность тока, m — масса электрона,</p>	<p>p — давление, γ — параметр нагрузки, ε — диэлектрическая проницаемость, λ — теплопроводность, μ — динамическая вязкость, μ_e — магнитная проницаемость, ρ — плотность жидкости, σ — электрическая проводимость, τ — время свободного пробега электрона, φ — электрический потенциал.</p>
--	--

1. Стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости с анизотропной проводимостью в магнитном поле в общем случае описывается системой уравнений

$$\rho (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} = - \nabla p \mp \mu \Delta \mathbf{w} \mp \mu_e \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} \mp \kappa \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \sigma (\mathbf{E} \mp \mu_e \mathbf{w} \times \mathbf{H}) \quad \left(\kappa = \frac{Z \mu_e \tau}{m} \right) \quad (1.1)$$

Этой системе в частном случае течения между плоскими бесконечными параллельными проводящими пластинами $y = \pm b$ удовлетворяет решение вида

$$\mathbf{w} = (u, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (j_x, j_y, 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H), \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$$

При этом все параметры, описывающие течение и поля, будут функциями только одной координаты y . Для давления полагаем $p = p(x, y)$. Очевидно, что $\partial p / \partial x = -P = \text{const}$.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{y}{b}, & x^* &= \frac{x}{b}, & u^* &= \frac{\rho b u}{\mu}, & H^* &= \frac{H}{H_0}, & j_1^* &= \frac{b \rho j_x}{\sigma \mu_e H_0 \mu} \\ j_2^* &= \frac{b \rho j_y}{\sigma \mu_e H_0 \mu}, & E_1^* &= \frac{b \rho E_x}{\mu_e H_0 \mu}, & E_2^* &= \frac{b \rho E_y}{\mu_e H_0 \mu}, & \psi &= \kappa H_0 \\ G^2 &= \mu_e^2 H_0^2 b^2 \frac{\sigma}{\mu}, & S &= \frac{b^3 \rho P}{\mu^2}, & p^* &= \frac{b^2 \rho p}{\mu^2}, & R &= \sigma \mu_e \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тогда для рассматриваемой задачи из (1.1) получим систему уравнений (звездочки у безразмерных параметров опускаем)

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + S + G^2 j_2 H = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} + G^2 j_1 H = 0 \quad (1.3)$$

$$R j_1 = \frac{dH}{dy}, \quad j_1 + \psi j_2 H = E_1, \quad j_2 - \psi j_1 H = E_2 - uH \quad (1.4)$$

причем $j_2 = \text{const}$ и $E_1 = \text{const}$.

При достаточно больших значениях магнитного числа Рейнольдса (параметр R равен отношению магнитного числа Рейнольдса к обычному числу Рейнольдса) ток j_1 индуцирует магнитное поле, сравнимое с внешним магнитным полем. Поэтому решение для поля скоростей можно найти только из совместного решения уравнений (1.3) и (1.4), опуская второе уравнение (1.3).

Из первых двух уравнений (1.4) определяется магнитное поле, выраженное через плотность тока j_2

$$H = F + C_1 e^{-\alpha y} \quad \left(F = \frac{E_1}{\psi j_2}, \quad C_1 = \frac{1 - F}{\text{ch } \alpha}, \quad \alpha = R \psi j_2 \right) \quad (1.5)$$

Постоянная интегрирования C_1 определена из граничных условий

$$H(-1) - 1 = -[H(1) - 1]$$

Используя (1.5), из уравнения количества движения (первое уравнение (1.1)), получаем

$$u = -\frac{G^2 j_2}{\alpha^2} \frac{1 - F}{\text{ch } \alpha} e^{-\alpha y} - (S + G^2 j_2 F) \frac{y^2}{2} + C_2 y + C_3 \quad (1.6)$$

$$C_2 = \frac{G^2 j_2}{\alpha^2} (F - 1) \text{th } \alpha, \quad C_3 = \frac{1}{2} (S + G^2 j_2 F) + \frac{G^2 j_2}{\alpha^2} (1 - F) \quad (1.7)$$

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 найдены из граничных условий $u(\pm 1) = 0$

Далее несложно определить ток j_1 и давление p

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{E_1 - \psi j_2}{\text{ch } \alpha} e^{-\alpha y} \\ p &= -Sx - \frac{G^2}{2R} \left[F^2 + 2F \frac{1 - F}{\text{ch } \alpha} e^{-\alpha y} - \frac{(1 - F)^2}{\text{ch}^2 \alpha} e^{-2\alpha y} \right] + C_4 \end{aligned}$$

Все параметры оказываются выраженными через плотность тока j_2 , для определения которого необходимо совместно рассмотреть внутреннюю и внешнюю цепь для тока. Предположим, что внешняя нагрузка представляет собой распределенное активное сопротивление с интенсивностью r ($\text{ом} / \text{см}^2$). Пусть электрический потенциал пластины $y = -1$ равен нулю ($\Phi(-1) = 0$), а разность потенциалов между пластинами равна v (размерная величина). Учитывая, что $E_2 = -d\Phi / dy$, третье уравнение (1.4) можно представить в виде

$$j_2 - \frac{\psi}{R} H \frac{dH}{dy} = -\frac{d\Phi}{dy} - uH \quad \left(\Phi = \frac{\rho \Phi}{\mu_e H_0 \mu} \right)$$

Так как для внешней части цепи справедливо соотношение

$$j_2 = \frac{V}{2\gamma} \quad \left(\gamma = \frac{r\sigma}{2b}, \quad V = \frac{\rho v}{\mu_e H_0 \mu} \right)$$

то ток j_2 определится выражением

$$j_2 = \frac{1}{2(\gamma + 1)} \left\{ \frac{\psi}{2R} [H^2(1) - H^2(-1)] - \int_{-1}^1 u H dy \right\} \quad (1.8)$$

Используя (1.5) и (1.6), окончательно находим, что плотность тока j_2 определяется уравнением

$$(\gamma + 1) j_2 = S \alpha^3 \left[(1 - F) \operatorname{th} \alpha - (1 - F) \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right] + \frac{G^2}{R \psi \alpha} \left(F^2 - \frac{\alpha^2}{3} F - 1 \right) + \\ + \frac{1 - F}{R \psi \alpha^2} [G^2 (1 + F) - \psi^2 \alpha^2] \operatorname{th} \alpha - \frac{G^2}{R \psi \alpha^3} (1 - F)^2 (\alpha - \operatorname{th} \alpha) \operatorname{th} \alpha$$

При достаточно малых α это трансцендентное уравнение сводится к обычному алгебраическому уравнению четвертого порядка

$$(\gamma + 1 + \psi^2) \alpha^4 - R \psi^2 E_1 \alpha^3 + \left[\frac{1}{3} R^2 E_1 (S \psi + G^2 E_1) + G^2 \right] \alpha^2 + G^2 (E_1 + 1) \alpha - \\ - G^2 E_1 R = 0$$

Если $E_1 = 0$, то получаем кубическое уравнение, решение которого имеет вид

$$j_2 = - \frac{1}{R \psi} \sqrt{\frac{G^2}{\gamma + 1 + \psi^2}} \quad (1.9)$$

Действительно, при условии $\frac{27}{4}(\gamma + 1 + \psi^2) > G^2$ для получающегося кубического уравнения дискриминант $D > 0$. Следовательно, уравнение имеет одно действительное решение и два мнимых. Физический смысл имеет только действительное решение, которое определяется формулой Кардано. Упростив ее при помощи приведенного неравенства, получаем соотношение (1.9), из которого ввиду $\alpha \ll 1$ следует постулированное неравенство.

2. Рассмотрим случай вертикальной конвекции между бесконечными параллельными пластинами, поддерживаемыми при разных температурах. Ось x направим вертикально. Температуры пластин постоянны вдоль оси x . Уравнение количества движения в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + S + G^2 j_2 H + N \theta = 0 \quad \left(\theta = \frac{T}{T_0}, N = \frac{\sigma_1^R T_0 j_2^3 \rho^2}{\mu^2} \right) \quad (2.1)$$

Остальные уравнения системы такие же, как и в разделе 1. Однако ввиду появления новой переменной θ , систему следует дополнить уравнением теплопроводности

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + M (j_1^2 + j_2^2) = 0 \quad \left(M = \frac{\sigma_1 \mu_e^2 H_0^2 \mu^2}{\rho^2 T_0 \lambda} \right) \quad (2.2)$$

(членом вязкой диссипации пренебрегаем).

Из уравнения (1.8) видно, что в случае неоднородного магнитного поля ток j_2 отличен от нуля, несмотря на то что полный расход жидкости в любом сечении канала равен нулю

$$\int_{-1}^1 u dy = 0 \quad (2.3)$$

Решая систему уравнений, получаем

$$\theta = - M (E_1 - \psi j_2)^2 \frac{e^{-2\alpha y}}{4\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha} - \frac{1}{2} M j_2^2 y^2 + B_1 y + B_2$$

где

$$B_1 = \frac{1}{2} (1 - \theta_0) - \frac{M}{2\alpha^2} (E_1 - \psi j_2)^2 \operatorname{th} \alpha \quad (\theta(1) = 1, \theta(-1) = \theta_0)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} (1 + \theta_0 + M j_2^2) + \frac{M}{4\alpha^2} (E_1 - \psi j_2)^2 (\operatorname{th}^2 \alpha + 1)$$

Далее

$$u = MN (E_1 - \psi j_2)^2 \frac{e^{-2\alpha y}}{16\alpha^4 \operatorname{ch}^2 \alpha} - \frac{G^2}{\psi} \frac{j_2 \psi - E_1}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha} e^{-\alpha y} + \frac{M}{24} N j_2^2 y^4 \\ - \frac{1}{6} N B_1 y^3 - \frac{1}{2} \left(S + \frac{G^2 E_1}{\psi} + N B_2 \right) y^2 + B_3 y + B_4$$

Здесь

$$B_3 = \frac{1}{6} NB_1 + (E_1 - \psi j_2) \frac{\text{th } \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{G^2}{\psi} + \frac{MN}{4\alpha^2} (E_1 - \psi j_2) \right]$$

$$B_4 = \frac{1}{2} \left(S + \frac{G^2 E_1}{\psi} + NB_2 \right) - \frac{1}{24} MN j_2^2 + \frac{G^2}{\psi \alpha^2} (j_2 \psi - E_1) - \frac{MN}{16\alpha^4} (E_1 - \psi j_2)^2 (\text{th}^2 \alpha + 1)$$

Постоянная S находится из условия (2.3)

$$S = - \frac{G^2 E_1}{\psi} - NB_2 - \frac{1}{10} MN j_2^2 - \frac{3G^2}{\psi \alpha^2} (E_1 - \psi j_2) (\alpha - \text{th } \alpha) -$$

$$- \frac{3MN}{16\alpha^5} (E_1 - \psi j_2)^2 (\alpha \text{th}^2 \alpha + \alpha - \text{th } \alpha)$$

Магнитное поле определяется соотношением (1.5), а ток j_2 — формулой (1.8).

Рассмотрим в качестве примера случай $\psi = 0$, т. е. конвекцию в жидкости с изотропной проводимостью при наличии тока j_1 . Предположим также, что внешнее магнитное поле отсутствует. В этом случае

$$H = R j_1 y, \quad j_2 = \text{const}$$

$$\theta = - \frac{1}{2} M (j_1^2 + j_2^2) y^2 + B_1 y + B_2$$

$$B_1 = \frac{1}{2} (1 - \theta_0), \quad B_2 = \frac{1}{2} (\theta_0 + 1) + \frac{1}{2} M (j_1^2 + j_2^2)$$

$$u = \frac{1}{24} MN (j_1^2 + j_2^2) y^4 - \frac{1}{6} (NB_1 + G^2 R j_1 j_2) y^3 - \frac{1}{2} (S + NB_2) y^2 + B_3 y + B_4$$

$$B_3 = \frac{1}{6} (NB_1 + G^2 R j_1 j_2), \quad B_4 = \frac{1}{2} (S + NB_2) - \frac{1}{24} MN (j_1^2 + j_2^2)$$

$$S = - N \left[\frac{1}{2} (\theta_0 + 1) + \frac{2}{5} M (j_1^2 + j_2^2) \right]$$

$$j_2 = - \frac{2}{45} R N B_1 j_1 (1 + \gamma + \frac{2}{45} R^2 G^2 j_1^2)^{-1} \quad (2.4)$$

Из формулы (2.4) видно, что при $j_1 \neq 0$ ток j_2 также отличен от нуля. Функция $i_2 = f(j_1)$ имеет минимум и максимум, соответственно, равные

$$i_2 = + \frac{NB_1}{3G \sqrt{10} (\gamma + 1)} \quad \text{при } j_1 = \pm \frac{3}{RG} \sqrt{\frac{5}{2} (1 + \gamma)}$$

Причем для экстремальных точек

$$\frac{j_2}{j_1} = - \frac{NB_1 R}{45 (\gamma + 1)}$$

3. Для случая изотропной проводимости ($\psi = 0$) и при $E_1 = 0$ без учета конвекции все параметры вычисляются в замкнутой форме (при этом $H = 1$)

$$i_2 = j = - \frac{q}{2 (\gamma + 1)} \quad \left(q = \int_{-1}^1 u dy \right) \quad (3.1)$$

$$j_1 = 0, \quad u = \left[\frac{S}{2} - \frac{q G^2}{4 (1 + \gamma)} \right] (1 - y^2),$$

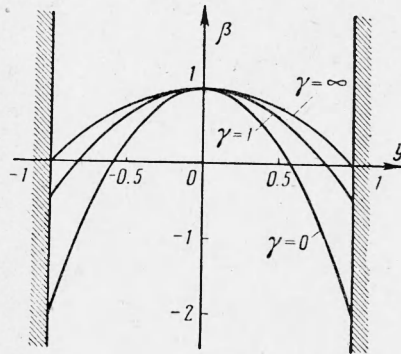
$$S = \frac{3}{2} q \left(1 + \frac{1}{3} \frac{G^2}{1 + \gamma} \right)$$

Формула (3.1) была получена в работе [7]. Безразмерная мощность, рассеиваемая на внешней нагрузке, определяется выражением

$$U = \frac{q^2 \gamma}{4 (\gamma + 1)^2}$$

Напряженность электрического поля изменяется по параболическому закону

$$E_2 = E = \frac{S}{3} \frac{3/2 (1 + \gamma) (1 - y^2) - 1}{1 + \gamma + 1/3 G^2}$$



Фиг. 1

Наличие такого поля приводит к индуцированию объемного заряда

$$v = - \frac{\epsilon \mu_e H_0 \mu}{b^2 \rho} \frac{S (1 + \gamma) y^*}{1 + \gamma + 1/3 G^2}$$

(v — размерная величина). Отношение плотности объемного заряда на холостом ходу ($\gamma = \infty$) к плотности при коротком замыкании ($\gamma = 0$) зависит только от числа

Гартмана

$$\frac{v_{\infty}}{v_0} = 1 + \frac{G^2}{3}$$

Напряженность электрического поля, отнесенная к своему значению на оси канала, не зависит от числа Гартмана

$$\beta = \frac{E}{E(y=0)} = 1 - \frac{y^2}{1 - 2/3 (\gamma + 1)^{-1}}$$

Графики функции β при трех значениях γ представлены на фиг. 1. Максимальный ток соответствует режиму короткого замыкания ($\gamma = 0$)

$$j_0 = - \frac{S}{3 + G^2}$$

На фиг. 2 показано изменение тока от нагрузки (γ) при различных значениях G , причем

$$\delta = \frac{j}{j_0} = \left(1 + \frac{3\gamma}{3 + G^2}\right)^{-1}$$

Отношения скорости в любой точке канала к средней скорости $1/2 q$ и к скорости на оси канала не зависят от G и γ

$$\frac{2u}{q} = \frac{3}{2} (1 - y^2), \quad \frac{u}{u(y=0)} = 1 - y^2$$

На фиг. 2 показана также зависимость расхода жидкости, отнесенного к расходу при разомкнутой цепи нагрузки (q_{∞}), от γ при различных G . При постоянном S с уменьшением γ расход q уменьшается, достигая минимального значения при $\gamma = 0$.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступила 6 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. H a r t m a n J. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. Kgl. danske Vid. selskab. Mat.-fys. medd., 1937, 15, No. 6.
2. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. Стационарное конвективное движение электропроводящей жидкости между параллельными плоскостями в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 34, № 3.
3. Р е г и р е р С. А. О конвективном движении проводящей жидкости между параллельными вертикальными пластинами в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, т. 37, № 1.
4. Ч е к м а р е в И. Б. Установившееся течение слабоионизованного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, 25, № 3.
5. Б а р а н о в В. Б. Установившееся течение ионизированного газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
6. S a t o Н. The Hall effect in the viscous flow of ionized gas between parallel plates under transverse magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1961, vol. 16, No. 7.
R e s l e r E., S e a r s W. The prospects for magneto-aerodynamics. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 4.