УДК 532.546
DOI: 10.15372/PMTF202315315

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРИМОЙ ПРИМЕСИ В ТАЮЩЕМ СНЕГЕ

А. Н. Сибин[*,**], А. А. Папин[*]

[*] Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
[**] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mails: sibin_anton@mail.ru, papin@math.asu.ru

На основе уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача о движении растворенной соли в тающем снеге. Теплопроводность снега и зависимость температуры замерзания воды от солености верифицированы с помощью известных экспериментальных данных. Численные эксперименты позволили оценить влияние наличия растворенной соли на фазовый переход.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пористая среда, тающий снег, фазовый переход, насыщенность, численное решение

Введение. Талая вода, образующаяся в сезонном снежном покрове в период снеготаяния, вносит большой вклад в формирование весеннего речного водотока в северных странах. В процессе снеготаяния различные химические примеси и соли, которые были накоплены в снежном покрове в зимний сезон, поступают в реку и почву совместно с поверхностным и подземным стоками талой воды соответственно [1]. Количество загрязнений и время, за которое они вымываются, зависят от динамики жидкости в снежном покрове. Например, техническая соль широко используется в качестве противогололедного средства. Однако интенсивное использование соли вызывает ряд экологических проблем, поскольку она распределяется непосредственно на поверхности дорожного покрытия до выпадения снега и легко смывается талой водой. Для уменьшения экологического ущерба и замедления высвобождения соли используются асфальтные смеси с солью. В работе [2] проведено экспериментальное исследование нескольких дорожных смесей с различным содержанием соли и показана их противогололедная эффективность, но математические модели, оценивающие эффективность снеготаяния и экологический ущерб, не были предложены.

Существует большое количество эмпирических моделей, описывающих снежный покров в целом без учета пористой структуры снега. В то же время результаты наблюдений и полевых исследований свидетельствуют о неравномерном выделении органических загрязнителей из снега, что обусловлено неравномерным распределением насыщенности

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме “Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики” (FZMW-2020-0008), а также в рамках совместного проекта Совета по научно-техническим исследованиям Турции (TUBITAK) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-58-46009).

примеси в объеме снежного покрова [3]. Большинство эмпирических моделей являются одномерными балансовыми моделями, не позволяющими вычислять скорость фильтрации жидкости, а модели, с помощью которых можно вычислить скорость фильтрации жидкости, обычно не учитывают фазовые переходы или применимы только для специфических режимов движения воды в снежном покрове. В настоящее время исследования балансовых моделей сосредоточены на учете дополнительных факторов, вносящих изменения в снежный покров, таких как выпадение осадков в виде дождя на уже сформированный снежный покров, промерзший и непромерзший грунт, наличие нескольких слоев снега. В работе [3] предложена модель, описывающая перенос органических веществ в многослойном снежном покрове. Учитываются такие факторы, как толщина снежного покрова, перенос загрязняющих веществ талой водой, а также скорость выхода твердых химических веществ на поверхность снежного покрова. Предполагается однородность снежного покрова, а также постоянство физических параметров.

Многомерные модели, в отличие от одномерных, оценивающих величину потока жидкости только относительно вертикального уровня, позволяют вычислить распределение потока жидкости в объеме пористого снега. В работе [4] предложена двумерная модель тепломассопереноса в тающем снеге, учитывающая повторное замораживание талой воды внутри снежного покрова. Предложенный численный метод позволяет получить более точную оценку поверхностного стока по сравнению с оценками, полученными в рамках одномерных моделей. Однако предлагаемая модель не в полной мере учитывает фазовые переходы и деформацию ледового скелета снега (движение льда). Переход жидкости в лед уменьшает пористость снега, а сублимация, наоборот, увеличивает ее, что существенно влияет на траектории движения жидкости и загрязняющих веществ в снежном покрове.

Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге изложены в работе [5], в которой на основе классической модели двухфазной фильтрации исследовалось движение воды в снеге с заданной постоянной пористостью и без учета фазовых переходов. В работе [6] снежный покров рассматривается как трехфазная среда (вода, воздух, лед). Приведены эмпирические зависимости для капиллярного скачка (вода — воздух) и эмпирические формулы для коэффициента проводимости снега. Однако в [6] не учитывается движение воздуха и существенно упрощено уравнение для температуры. В результате трехфазная модель сводится к уравнению для температуры и уравнению для объемной концентрации водной фазы.

В работе [7] построено автомодельное решение системы уравнений двухфазной фильтрации при естественных граничных условиях. В работах [8, 9] проведены численные расчеты одномерных задач тепломассопереноса, исследовано изменение пористости и водонасыщенности снега. В [10] приведены постановки задач о движении воды и воздуха в тающем снеге с учетом фазовых переходов и деформации ледового скелета и о распределении водного стока тающего снега между грунтовыми и поверхностными водами. В [7–10] исследования проводились в предположении, что пористость является заданной функцией температуры.

В данной работе используется более общий подход, развитый в работах [11, 12], в которых проведена верификация математической модели по экспериментальным данным [13]. Это позволяет учесть влияние растворенной соли на термодинамические характеристики снега.

Целью настоящей работы является моделирование движения растворенной соли в тающем снеге с учетом фазовых переходов, зависящих от солености воды. Разработан алгоритм численного решения одномерной задачи и проведены соответствующие расчеты.

1. Математическая модель. Будем рассматривать тающий снег как сплошную среду, состоящую из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$), представляющего собой твердый пористый скелет. Предполагается, что в воде присутствует только растворенная примесь с концентрацией σ, фазовые переходы (выпадение в осадок и растворение) не учитываются. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой фазы с учетом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для трехфазной среды. Для описания движения консервативной примеси (соли) в тающем снеге используется уравнение конвективной диффузии.

Уравнения баланса массы для каждой фазы имеют вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad I_{ji} = -I_{ij}, \qquad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} — интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\alpha_1 = \phi s_1$; $\alpha_2 = \phi s_2$; $\alpha_3 = 1 - \phi$; s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха ($s_1 + s_2 = 1$); ϕ — пористость снега. Процессами сублимации и испарения пренебрегается ($I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$), интенсивность фазового перехода вода — лед является заданной функцией $I_{13} = I(\phi, \theta, s_1)$. Далее будем считать, что фильтрация воды и воздуха подчиняется закону Дарси и частицы льда неподвижны ($\boldsymbol{u}_3 = 0$), структура льда как сплошной среды не уточняется [9]. Тогда уравнения сохранения импульса принимают вид

$$\phi s_i \boldsymbol{u}_i = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \boldsymbol{g}), \quad i = 1, 2, \qquad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \tag{2}$$

где $K_0(\phi)$ — коэффициент проницаемости пористой среды; $\bar{k}_{0i}$ — фазовые проницаемости ($\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geqslant 0$, $\bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$); μ_i — динамические вязкости; p_i — давления фаз; p_c — капиллярное давление; θ — температура снега; $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения.

Предполагается, что температуры всех трех фаз совпадают, т. е. $\theta_i = \theta$ ($i = 1, 2, 3$). Уравнение баланса тепла в снежном покрове имеет вид

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i\Big) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Big(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 \alpha_i c_i \boldsymbol{u}_i\Big) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \nu I. \tag{3}$$

Здесь c_i — удельная теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; ν — удельная теплота плавления льда; λ_c — теплопроводность снега.

Движение растворенной примеси описывается уравнением конвективной диффузии [14]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_1 \sigma) + \operatorname{div}(\sigma \boldsymbol{v}_1 - D \nabla \sigma) = 0. \tag{4}$$

Здесь σ — концентрация примеси; $\boldsymbol{v}_1$ — скорость фильтрации воды ($\boldsymbol{v}_i = \phi s_i \boldsymbol{u}_i$). В данной работе для коэффициента диффузии D используется зависимость [15]

$$D = D_0(1 + 0{,}029(\theta - 293{,}15)),$$

где $D_0 = 1{,}39 \cdot 10^{-9}$ м^2/с.

Система (1)–(4) дополняется соотношениями $\rho_i^0 = \mathrm{const} > 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\rho_2^0 < \rho_3^0 < \rho_1^0$.

Для моделирования интенсивности фазового перехода лед — вода, как правило, используется методология решения задачи Стефана, т. е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре происходит скачкообразный переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода лед — вода. Предположение о существовании в системе четко выраженной границы фазового перехода справедливо не всегда. Так, накопление примеси перед фронтом затвердевания, обусловленное ее вытеснением при увеличении объема твердой фазы, приводит к возникновению перед границей жидкость — твердая фаза зоны концентрационного переохлаждения.

Согласно другому подходу к описанию процесса таяния снега фазовый переход лед — вода происходит во всей толще снежно-ледового покрова и для описания процесса распространения тепла нужно использовать уравнение вида (3) с измененной соответствующим образом правой частью. Однако следует учитывать, что наличие примеси может приводить к изменению температуры замерзания воды. Близкой к рассматриваемой задаче является задача о тепломассопереносе в протаивающих (промерзающих) грунтах [16]. Имеется ряд экспериментальных данных о зависимости концентраций льда и воды в пористой среде от температуры [11, 13]. Используемые в данной работе зависимости для интенсивности фазового перехода лед — вода предложены в работах [11, 12, 16]:

$$I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \theta s, & \theta < \theta^-, \\ 0, & \theta^- \leqslant \theta \leqslant \theta^+, \\ \lambda_2 (1-\phi)^2 \, \mathrm{e}^{\beta(\theta-\theta^+)}, & \theta > \theta^+. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $s \equiv s_1$ — водонасыщенность ($1-s = s_2$); θ^+ — температура плавления льда; $\theta^-(\sigma)$ — температура замерзания воды; β, λ_1, λ_2 — размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta] = 1/\text{К}$, $[\lambda_1] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{К})$, $[\lambda_2] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$).

Рассматривается следующая задача. В комнате с низкой температурой воздуха расположен контейнер со снегом. Снег полагается однородным, рассматривается движение воды и воздуха в снеге. На верхней границе задаются температура, давление воздуха, концентрация растворенной соли, предполагается отсутствие ветра в комнате ($v_2 = 0$). На нижней границе известна температура и ставятся условия непротекания для всех фаз. В начальный момент времени известны водонасыщенность, температура, концентрация растворенной примеси и пористость.

2. Алгоритм численного решения одномерной задачи. Система (1)–(4) сводится к пяти уравнениям для s, ϕ, θ, σ, p [11], где функция p (приведенное давление) задается следующим образом:

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} \, d\xi. \tag{6}$$

Перейдем к безразмерным переменным для одномерного случая (ось y направлена вниз, $y \in [0, l]$, $t \in [0, t_0]$):

$$\tilde{y} = \frac{y}{y_{sc}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{sc}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{sc}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{sc}}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{sc}}.$$

Здесь $y_{sc} = l$; $p_{sc} = \rho_1^0 g l$; температура θ_{sc} принимается равной температуре плавления льда; $v_{sc} = B\rho_1^0 g/\mu_1$; характерное время определяется соотношением $t_{sc} = y_{sc}/v_{sc}$. Тогда область изменения y есть единичный отрезок $[0, 1]$, а система уравнений (1)–(4) в одномерном случае принимает следующий вид [11]:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} + b\tilde{v} + \tilde{F} \right) + (1-s) \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\Big(\tilde{K}\,\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}+\tilde{f}\Big)=\Big(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\Big)\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{t}},\qquad \tilde{Q}\,\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{t}}=\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\Big(\tilde{\lambda}_c\,\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{y}}\Big)+\tilde{V}\,\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{y}}-\chi\tilde{I},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{t}}=\tilde{I},\qquad \phi s\,\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{t}}-\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\Big(\tilde{D}\,\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{y}}\Big)+\tilde{v}_1\,\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{y}}=-\tilde{\sigma}\,\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial\tilde{y}}-\tilde{\sigma}s\,\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{t}}-\tilde{\sigma}\phi\,\frac{\partial s}{\partial\tilde{t}}.$$

Здесь $\chi=\nu/(c_3\theta_{sc})$ — безразмерная постоянная,

$$\tilde{v}=\tilde{v}_1+\tilde{v}_2=-\tilde{K}\,\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}-\tilde{f},$$

$$\tilde{K}=\tilde{K}_0\tilde{k},\qquad \tilde{v}_2=\tilde{a}\,\frac{\partial s}{\partial\tilde{y}}+b\tilde{v}+\tilde{F},\qquad b(s)=\frac{\bar{k}_{02}}{\mu\bar{k}_{01}+\bar{k}_{02}},\qquad \mu=\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$\tilde{a}(s,\phi)=-\tilde{K}_0\,\frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}}{\mu\bar{k}_{01}+\bar{k}_{02}}\,\frac{\partial\tilde{p}_c}{\partial s},\quad \tilde{F}=\tilde{K}_0\,\frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}(\rho_2^0/\rho_1^0-1)}{\mu\bar{k}_{01}+\bar{k}_{02}},\quad \tilde{K}_0=\frac{B\rho_1^0g}{v_{sc}\mu_1}\,\frac{\phi^3}{(1-\phi)^2},$$

$$\tilde{f}=-\tilde{K}_0\Big(\bar{k}_{01}+\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0\mu}\,\bar{k}_{02}\Big),\quad \tilde{Q}=\frac{\rho_1^0c_1}{\rho_3^0c_3}\,s\phi+\frac{c_2\rho_2^0}{c_3\rho_3^0}\,(1-s)\phi+1-\phi,\quad \tilde{k}=\bar{k}_{01}+\frac{\bar{k}_{02}}{\mu},$$

$$\tilde{\lambda}_c=\frac{a_ct_{sc}}{y_{sc}^2\rho_3^0c_3}\,\Big(1+\frac{b_c}{a_c}\,\rho_c^2\Big),\qquad \tilde{V}=-\frac{\rho_1^0c_1}{\rho_3^0c_3}\,\tilde{v}_1-\frac{\rho_2^0c_2}{\rho_3^0c_3}\,\tilde{v}_2,$$

$$\tilde{I}=\frac{t_{sc}}{\rho_3^0}\,I,\qquad \tilde{D}=\frac{t_{sc}D}{y_{sc}^2}.$$

Опуская символ “$\sim$”, получаем

$$\phi\,\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\,\Big(a(s,\phi)\,\frac{\partial s}{\partial y}+b(s)v+F(s,\phi)\Big)+(1-s)\,\frac{\partial\phi}{\partial t};\tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\Big(K(s,\phi)\,\frac{\partial p}{\partial y}+f(s,\phi)\Big)=\Big(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\Big)\frac{\partial\phi}{\partial t};\tag{8}$$

$$Q(s,\theta)\,\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\,\Big(\lambda_c\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big)+V(v_1,v_2)\,\frac{\partial\theta}{\partial y}-\chi I;\tag{9}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=I;\tag{10}$$

$$\phi s\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\,\Big(D\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}\Big)+v_1\,\frac{\partial\sigma}{\partial y}=-\sigma\,\frac{\partial v_1}{\partial y}-\sigma s\,\frac{\partial\phi}{\partial t}-\sigma\phi\,\frac{\partial s}{\partial t}.\tag{11}$$

Следует отметить, что v является искомой функцией и определяется при решении задачи [11].

В качестве начала отсчета выбрана поверхность снежного покрова, ось y направлена вниз ($y\in[0,l]$). Начальные и граничные условия задавались в виде

$$s(x,0)=s_0(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x),\quad \sigma(x,0)=\sigma_0(x),\quad \phi(x,0)=\phi_0(x);\tag{12}$$

$$p_2(0,t)=p_a,\qquad \theta(0,t)=\theta^*(t),\qquad \sigma(0,t)=\sigma^*(t)\tag{13}$$

(p_a — атмосферное давление). Из условия $v_2|_{y=0}=0$ (предполагается отсутствие ветра в комнате) следует условие для водонасыщенности

$$a\,\frac{\partial s}{\partial y}\,(0,t)=-F-b(s)v_1.\tag{14}$$

Используя (2), (6), получаем граничное условие для приведенного давления

$$p(0,t) = p_a + \int\limits_{s(0,t)}^{1} \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi}\, d\xi. \tag{15}$$

На нижней границе задавались температура $\theta(l,t) = \theta_l(t)$ и условия непротекания для воды, воздуха и растворенной соли. Из представления для суммарной скорости при $v|_{y=l} = 0$ получаем условие для приведенного давления $(\partial p/\partial y)(l,t) = -f/K$. Для водонасыщенности при $v_2|_{y=l} = 0$ выполнено условие

$$a\,\frac{\partial s}{\partial y}\,(l,t) = -F. \tag{16}$$

Для концентрации растворенной соли аналогично получаем $(\partial\sigma/\partial y)(l,t) = 0$.

Введем сетку с распределенными узлами $y_i = ih$, $t_n = n\tau$ ($i = 0,\ldots,N$; $n = 0,\ldots,T$; h — шаг по пространственной координате; τ — шаг по времени). Уравнение (7) аппроксимировалось на основе разностной схемы для модели Маскета — Леверетта с использованием направленной разности для конвективного слагаемого [17]. Разностная схема первого порядка точности по пространственной координате и времени имеет вид

$$\phi_i^n\,\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = a_{i+1/2}^n\,\frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h^2} - a_{i-1/2}^n\,\frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \Big(1 - s_i^n + b(s_i^n) - b(s_i^n)\,\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\Big) I_i^n +$$
$$+ \frac{(|G_i^n| + G_i^n)s_{i+1}^{n+1} - 2|G_i^n|s_i^{n+1} + (|G_i^n| - G_i^n)s_{i-1}^{n+1}}{2h} + F_{\phi i}^n\,\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h}. \tag{17}$$

Здесь

$$a_{i-1/2}^n = \frac{2a(s_{i-1}^n,\phi_{i-1}^n)a(s_i^n,\phi_i^n)}{a(s_{i-1}^n,\phi_{i-1}^n) + a(s_i^n,\phi_i^n)}, \qquad a_{i+1/2}^n = \frac{2a(s_{i+1}^n,\phi_{i+1}^n)a(s_i^n,\phi_i^n)}{a(s_{i+1}^n,\phi_{i+1}^n) + a(s_i^n,\phi_i^n)},$$
$$F_{si}^n = \frac{\partial F}{\partial s}\,(s_i^n,\phi_i^n), \qquad F_{\phi i}^n = \frac{\partial F}{\partial \phi}\,(s_i^n,\phi_i^n), \qquad G_i^n = \frac{\partial F}{\partial s}\,(s_i^n,\phi_i^n) + v_i^n\,\frac{\partial b}{\partial s}\,(s_i^n),$$
$$i = 1,\ldots,N-1, \qquad \tau = 0,\ldots,T-1. \tag{18}$$

Уравнение (8) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности. В результате получаем следующую систему разностных уравнений:

$$K_{i+1/2}^n\,\frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h^2} - K_{i-1/2}^n\,\frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h^2} + f_{si}^n\,\frac{s_{i+1}^n - s_{i-1}^n}{2h} +$$
$$+ f_{\phi i}^n\,\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} = \Big(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\Big) I_i^n. \tag{19}$$

При аппроксимации уравнений для температуры (9) и концентрации примеси (11) используется направленная разность для конвективных слагаемых. Разностная схема первого порядка по пространственной переменной и времени имеет вид

$$Q(s_i^n,\phi_i^n)\,\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2}\,(\lambda_{ci+1/2}^n(\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1}) - \lambda_{ci-1/2}^n(\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1})) +$$
$$+ \frac{(|V_i^n| + V_i^n)\theta_{i+1}^{n+1} - 2|V_i^n|\theta_i^{n+1} + (|V_i^n| - V_i^n)\theta_{i-1}^{n+1}}{2h} - \chi I_i^n; \tag{20}$$

$$\phi_i^n s_i^n \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\tau} - D_{i+1/2}^n \frac{\sigma_{i+1}^{n+1} - \sigma_i^{n+1}}{h^2} + D_{i-1/2}^n \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\ + \frac{(|v_{1i}^n| + v_{1i}^n)\sigma_{i+1}^{n+1} - 2|v_{1i}^n|\sigma_i^{n+1} + (|v_{1i}^n| - v_{1i}^n)\sigma_{i-1}^{n+1}}{2h} = \\ = -\sigma_i^n \frac{v_{1i+1}^n - v_{1i-1}^n}{2h} - \sigma_i^n s_i^n \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\tau} - \sigma_i^n \phi_i^n \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau}. \qquad (21)$$

Для аппроксимации граничных условий уравнения для водонасыщенности использовался подход, предложенный в работе [18]. Предполагается, что уравнение (7) справедливо также на границах $x = 0$ и $x = l$. Рассмотрим границу $x = 0$. Используя уравнение (7), получаем разностную аппроксимацию граничного условия (14) со вторым порядком точности

$$a_{1/2}^n \frac{s_1^{n+1} - s_0^{n+1}}{h} = -F(s_0^n, \phi_0^n) - b(s_0^n)(v_1)_0^n + \frac{h}{2} B, \qquad (22)$$

где $a_{1/2}$ определяется по формуле (18),

$$B = \phi_0^n \frac{s_0^{n+1} - s_0^n}{\tau} - (1 - s_0^n) I_0^n - \frac{\partial F}{\partial s} \frac{s_1^{n+1} - s_0^{n+1}}{h} - \frac{\partial F}{\partial \phi} I_0^n.$$

Аналогично строится разностная аппроксимация для краевого условия (16). Остальные краевые условия второго рода аппроксимируются с первым порядком точности.

Системы линейных алгебраических уравнений (17)–(22), полученные в результате аппроксимации уравнений (7)–(11) и граничных условий (12)–(16), решаются методом прогонки [19].

Уравнение (10) аппроксимируется неявной схемой Рунге — Кутты второго порядка точности, причем найденное на первом этапе значение

$$\tilde\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau I_i^n \qquad (23)$$

уточняется затем следующим образом:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \tau \frac{I(\phi_i^n, s_i^n) + I(\tilde\phi_i^n, s_i^n)}{2}. \qquad (24)$$

Здесь

$$K_{i-1/2}^n = \frac{2K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)}, \qquad K_{i+1/2}^n = \frac{2K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) K(\phi_i^n, s_i^n)}{K(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + K(\phi_i^n, s_i^n)},$$

$$\lambda_{ci-1/2}^n = \frac{2\lambda_c(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) \lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}{\lambda_c(\phi_{i-1}^n, s_{i-1}^n) + \lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}, \qquad \lambda_{ci+1/2} = \frac{2\lambda_c(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) \lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)}{\lambda_c(\phi_{i+1}^n, s_{i+1}^n) + \lambda_c(\phi_i^n, s_i^n)},$$

$$f_{si}^n = \frac{\partial f}{\partial s}(s_i^n, \phi_i^n), \qquad f_{\phi i}^n = \frac{\partial f}{\partial \phi}(s_i^n, \phi_i^n),$$

$$D_{i-1/2}^n = \frac{2D(v_{1i-1}^n) D(v_{1i}^n)}{D(v_{1i-1}^n) + D(v_{1i}^n)}, \qquad D_{i+1/2}^n = \frac{2D(v_{1i+1}^n) D(v_{1i}^n)}{D(v_{1i+1}^n) + D(v_{1i}^n)},$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \qquad \tau = 0, \ldots, T-1.$$

Используется следующий алгоритм численного решения начально-краевой задачи. С помощью начального значения пористости ϕ_i^0, температуры θ_i^0 и концентрации s_i^0 находим начальное распределение приведенного давления p_i^0 $(i = 0, \ldots, N)$ из уравнения (19).

Используя найденное давление, определяем скорость фильтрации v_i^0. Из равенства (20) получаем температуру θ_i^1 на следующем шаге по времени. Из равенства (23) находим пористость снега ϕ_i^1 на следующем шаге по времени. Из уравнения (17) определяем концентрацию воды s_i^1. Рассчитываем давление на следующем шаге по времени. Используя найденные значения искомых функций $\tilde{\phi}_i^1$, s_i^1, p_i^1, θ_i^1, выполняем коррекцию значения пористости на первом шаге по времени с помощью формулы (24). С использованием начального значения концентрации примеси σ_i^0, найденных значений скорости фильтрации и водонасыщенности из уравнения (21) получаем распределение концентрации примеси σ_i^1 в тающем снеге. Повторяя данный алгоритм для следующих шагов по времени, вычисляем значения искомых функций на всем временном интервале.

3. Численные эксперименты. В численных расчетах использовались следующие значения модельных параметров: $p_2(0,t) = 101$ кПа, $l = 0{,}25$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2, $k_{0i} = s_i^2$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$, $k_{0i} = 0$ при $s_i \leqslant 0$, $k_{0i} = 1$ при $s_i \geqslant 1$, $\rho_1^0 = 10^3$ кг/м^3, $\rho_2^0 = 1{,}292$ кг/м^3, $\rho_3^0 = 916{,}2$ кг/м^3, $t_0 = 4000$ с, $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/(м$\cdot$ с), $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м$\cdot$с), $\nu = 333{,}8$ Дж/г, $c_1 = 4{,}18$ Дж/(г$\cdot$К), $c_2 = 0{,}838$ Дж/(г$\cdot$К), $c_3 = 2{,}06$ Дж/(г$\cdot$К).

При численном исследовании системы дифференциальных уравнений (7)–(11) для капиллярного давления использовалась зависимость [5, 6]

$$p_c = \gamma(s^{-1/m} - 1)^{1/n},$$

где γ — размерная постоянная, Па; m, n — заданные постоянные (в численных расчетах $\gamma = 0{,}02$ Па, $m = n = 1$ [5. С. 374]).

Коэффициент проницаемости определяется зависимостью $K_0 = b\phi^m$ (значения параметров b и m получены при анализе экспериментальных данных работы [13]).

Для определения интенсивности фазового перехода использовалась зависимость (5) при следующих значениях постоянных: $\beta = 1$ К$^{-1}$, $\lambda_1 = 10^{-3}$ кг/(м$^3\cdot$с$\cdot$К), $\lambda_2 = 3 \times 10^{-3}$ кг/(м$^3\cdot$с). Эти параметры определены в работе [11] путем подбора в ходе решения задачи и сопоставления результатов моделирования и экспериментальных данных.

В работе [20. С. 63] теплопроводность снега λ_c определяется на основе теории теплопроводности многокомпонентных систем и задается следующей зависимостью:

$$\lambda_c = (\lambda_a\varphi + \lambda_i(1-\varphi)\beta_c)/(\varphi + (1-\varphi)\beta_c).$$

Здесь $\varphi = 1 - \rho_c/\rho_3^0$; β_c — безразмерный параметр (в численных расчетах $\beta_c = 0{,}21$); λ_a, λ_i — теплопроводность воздуха и льда соответственно.

Существенным является учет зависимости температуры замерзания θ^- от солености воды $\theta^- = -\gamma\sigma$, где постоянная $\gamma = 55 \cdot 10^{-6}$ °C. Эмпирическая зависимость проверена с использованием экспериментальных данных [21].

Для определения влияния растворенной соли в фильтрующейся воде на фазовый переход проведено два численных эксперимента: 1) на поверхности снега отсутствует слой соли ($\sigma(y,t) = 0$); 2) на поверхности снега имеется слой соленой воды толщиной 2 см (рис. 1–4).

На верхней границе ($y = 0$) температура в начальный момент времени составляла -1 °C и затем линейно возрастала до 3 °C, задавались граничные условия (13)–(15), при этом концентрация соли в воде полагалась постоянной: $\sigma(0,t) = 35$ ‰. На нижней границе поддерживалась отрицательная температура $T = -1$ °C. На границе рассматриваемой области $y = l$ задавалось условие непротекания (16).

В начальный момент времени пористость полагалась постоянной: $\phi(y,0) = 0{,}3$, а водонасыщенность задавалась равной $s(x,0) = 0{,}1$.

При отрицательной температуре в первом численном эксперименте пористость уменьшается (при $t = 0 \div 1000$ с), вода в снеге замерзает, водонасыщенность уменьшается (см.

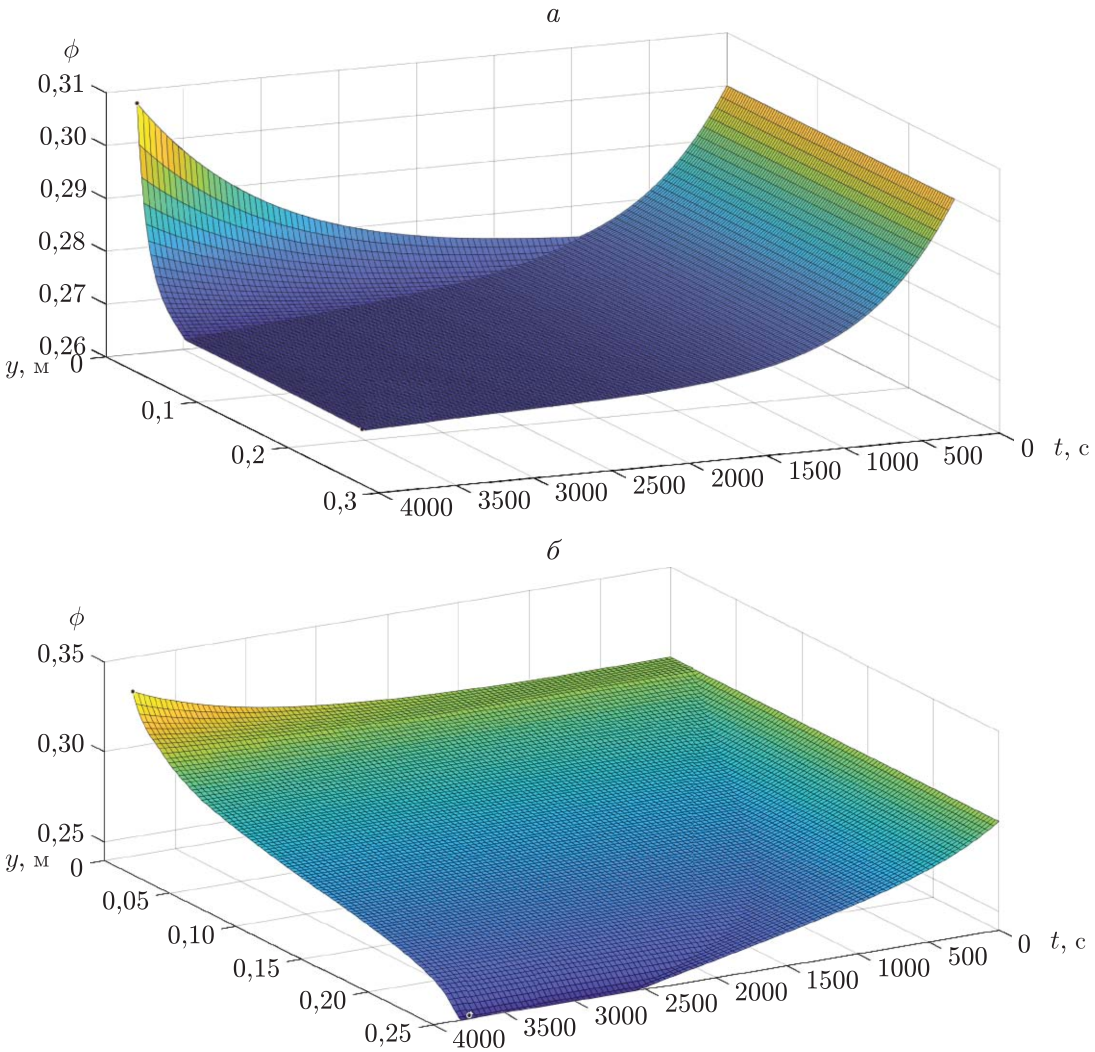

Рис. 1. Распределения пористости в слое снега, полученные в численных эксперименте 1 (*а*) и эксперименте 2 (*б*)

рис. 2,*а*), но при увеличении температуры на поверхности снега верхний слой начинает таять, образующаяся при этом вода фильтруется в нижние слои и продолжает замерзать (см. рис. 1,*а*).

Во втором численном эксперименте растворенная в фильтрующейся воде соль оказывает влияние на фазовый переход и пористость. В верхнем слое толщиной 2 см пористость не уменьшалась, вода не замерзала. В нижних слоях снега пористость перестала изменяться, когда соленая вода распределилась по всему слою снега. Заметим, что концентрация соли в воде увеличивалась, так как в нижних слоях вода замерзала при меньшей температуре (см. рис. 3). Температура на поверхности слоя линейно увеличивалась, и снег начинал таять. Концентрация соли в воде начала уменьшаться (талая вода увеличивает водонасыщенность), а на дне сформировался слой с меньшей пористостью (см. рис. 1,*б*). Распределения водонасыщенности в двух численных экспериментах также различаются. Соленая вода в нижних слоях полностью не замерзала, при $t > 1500$ с водонасыщенность возрастала во всем слое снега (см. рис. 2,*б*).

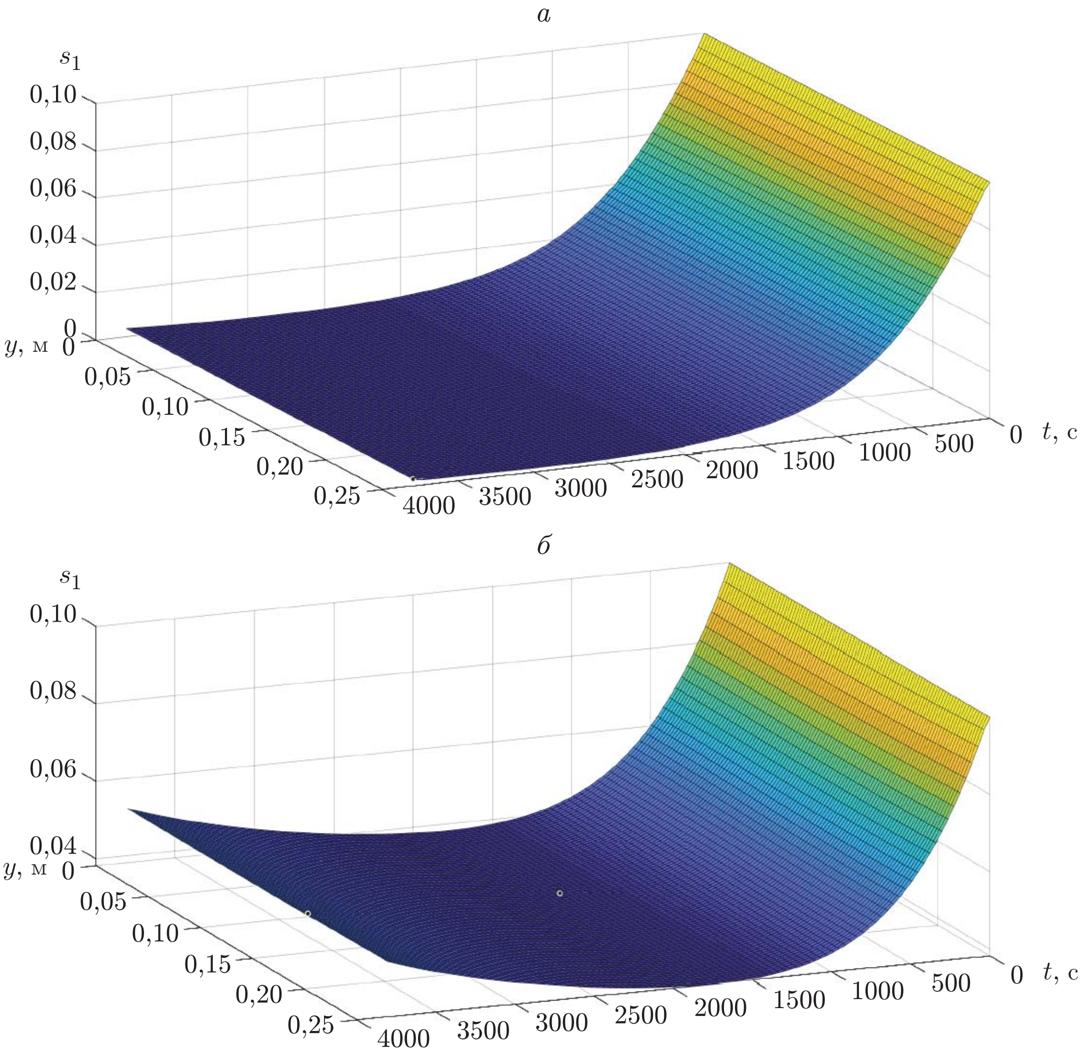

Рис. 2. Распределения водонасыщенности, полученные в численных эксперименте 1 (*а*) и эксперименте 2 (*б*)

Таким образом, результаты численных расчетов хорошо согласуются с результатами экспериментов. Предложенная математическая модель позволяет учитывать концентрационное переохлаждение воды. Следует отметить, что в численных экспериментах, описанных в работах [8, 10, 11], получены близкие результаты, но движение консервативной примеси (соли) в тающем снеге не учитывалось.

Устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверялись в вычислительных экспериментах с использованием известного правила Рунге [19. С. 75]: достаточно провести три расчета на сетках с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, $\tau_i = \lambda h_i$, $i = 1, 2, 3$, $h = 0{,}000\,01$, $\lambda = 100$. В численном эксперименте определялись водонасыщенность s, пористость, температура, давление и концентрация соли. В рассматриваемой задаче порядок сходимости $R \approx 1$, приближенно определяемая относительная погрешность $\varepsilon \approx 0{,}1$ %, что вполне приемлемо при решении практических задач.

Заключение. Предложена математическая модель движения примеси, растворенной в тающем снеге. В рамках полученной модели построен конечно-разностный алгоритм и выполнены численные эксперименты для одномерной задачи о фильтрации воды и воздуха

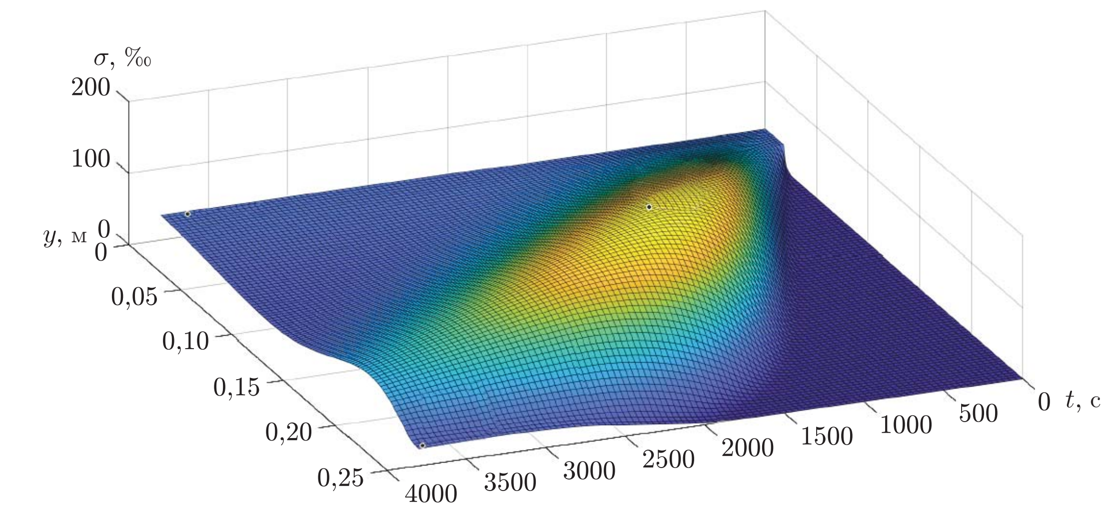

Рис. 3. Распределение концентрации соли, полученное в численном эксперименте 2

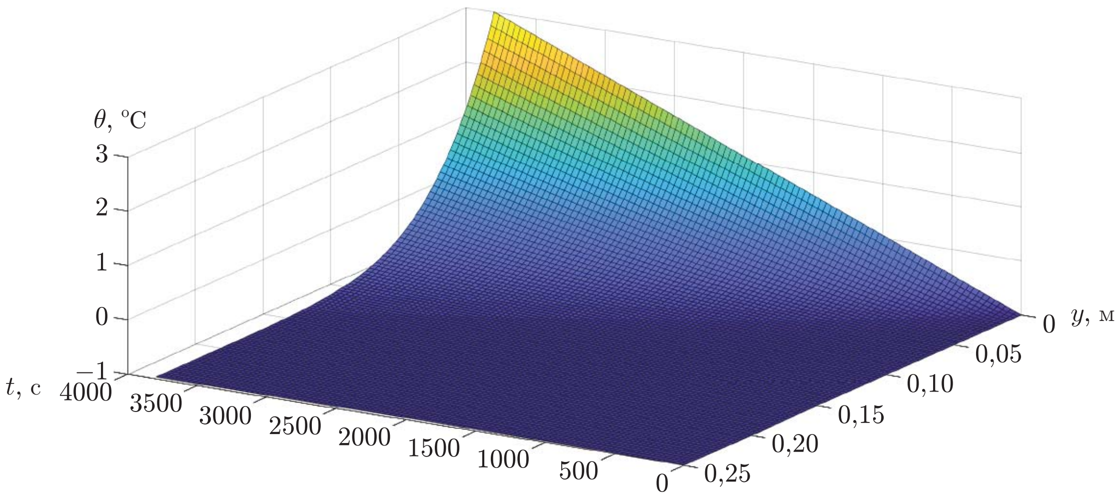

Рис. 4. Распределение температуры, полученное в численном эксперименте 2

в тающем снеге, исследовано изменение концентрации соли в тающем снеге. Численные расчеты позволили оценить влияние растворенной соли на фазовый переход. Результаты этих расчетов согласуются с экспериментальными данными. С использованием известных экспериментальных данных проведена верификация теплопроводности снега и эмпирической зависимости температуры замерзания от солености воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Papina T. S., Eirikh A. N., Malygina N. S., et al.** Microelement and stable isotopic composition of snowpack in the Katunsky Biosphere Reserve (Altai Republic) // Ice Snow. 2018. V. 58, N 1. P. 41–55.
2. **Wang Z., Zhang T., Shao M., et al.** Investigation on snow-melting performance of asphalt mixtures incorporating with salt-storage aggregates // Construct. Build. Materials. 2017. V. 142. P. 187–198.

3. **Meyer T., Wania F.** Modeling the elution of organic chemicals from a melting homogeneous snow pack // Water Res. 2011. V. 45. P. 3627–3637.
4. **Leroux N. R., Pomeroy J. W.** A 2D model for simulating heterogeneous mass and energy fluxes through melting snowpacks // Cryosphere. Discuss.: Prepr. 2016. [Electron. resource]. Режим доступа: https://doi.org/10.5194/tc-2016-55.
5. **Colbeck S. C.** A theory of water percolation in snow // J. Glaciol. 1972. V. 11, N 63. P. 369–385.
6. **Daanen R. P., Nieber J. L.** Model for coupled liquid water flow and heat transport with phase change in a snowpack // J. Cold Regions Engng. 2009. V. 23, N 2. P. 43–68.
7. **Папин А. А.** Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 13–23.
8. **Alekseeva S. V., Sazhenkov S. A.** Studying the model of air and water filtration in a melting or freezing snowpack // Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Model. Programm. Comput. Software. 2022. V. 15, N 2. P. 5–16.
9. **Alekseeva S. V., Sazhenkov S. A.** Numerical analysis of a one-dimensional model of a melting-freezing snowpack // J. Comput. Engng Math. 2021. V. 8, N 4. P. 17–27.
10. **Papin A. A., Tokareva M. A.** Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2018. V. 193. 012055.
11. **Сибин А. Н., Папин А. А.** Тепломассоперенос в тающем снеге // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 1. С. 109–118.
12. **Sibin A. N., Papin A. A.** Water movement in melting snow // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2057. 012030.
13. **Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H.** Effect of snow structure on water flow and solute transport // Hydrolog. Process. 2008. V. 18, N 7. P. 1271–1290.
14. **Бэр Я.** Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. М.: Мир, 1971.
15. **Angeli C., Leonardi E.** A one-dimensional numerical study of the salt diffusion in a salinity-gradient solar pond // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. V. 47. P. 1–10.
16. **Колесников А. Г.** К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82, № 6. С. 889–891.
17. **Жумагулов Б. Т.** Гидродинамика нефтедобычи / Б. Т. Жумагулов, В. Н. Монахов. Алма-Ата: Каз. гос. ин-т науч.-техн. информ., 2001.
18. **Коновалов А. Н.** Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
19. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.
20. **Павлов А. В.** Теплофизика ландшафтов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979.
21. **Кутателадзе С. С.** Справочник по теплопередаче. М.: Госэнергоиздат, 1958.

Поступила в редакцию 29/V 2023 г.,
после доработки — 27/VII 2023 г.
Принята к публикации 4/VIII 2023 г.