

## ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФфуЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Д. Полянин  
(Москва)

**1. Постановка задачи. Выбор системы координат.** Рассмотрим трехмерную задачу о стационарной конвективной диффузии к поверхности твердой или жидкой частицы произвольной формы, обтекаемой ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что число Пекле  $Pe = aUD^{-1}$  велико; здесь  $a$  — характерный размер частицы (в качестве которого обычно выбирается радиус эквивалентной по объему сферы),  $U$  — характерная скорость потока (на бесконечности),  $D$  — коэффициент диффузии. Считается также, что на поверхности частицы и вдали от нее концентрация  $C_*$  принимает постоянные значения, равные  $C_s$  и  $C_\infty$ , а поле течения жидкости найдено из решения соответствующей гидродинамической задачи об обтекании частицы.

При анализе аналогично [1, 2] используем ортогональную криволинейную систему координат  $\xi, \eta, \lambda$ , связанную с поверхностью тела и линиями тока. Для этого укажем направления ортов  $e_\xi, e_\eta, e_\lambda$  в любой точке  $M$  окружающей частицу потока жидкости (фиг. 1). Орт  $e_\xi$  определяется направлением нормали к поверхности частицы, проходящей через точку  $M$ ; орт  $e_\eta$  задается направлением проекции вектора скорости жидкости в точке  $M$  на плоскость, перпендикулярную  $e_\xi$ ; орт  $e_\lambda$  выбирается так, что система векторов  $e_\xi, e_\eta, e_\lambda$  составляет ортогональную правую тройку (фиг. 1). Начало координат и правило, по которому ведется отсчет криволинейных координат (т. е. зависимость компонент метрического тензора  $g_{\xi\xi}, g_{\eta\eta}, g_{\lambda\lambda}$  от  $\xi, \eta, \lambda$ ), в каждом конкретном случае выбираются по-разному из соображений удобства; для определенности далее считаем, что поверхность частицы задается фиксированным значением  $\xi = 0$ . В такой системе координат вектор скорости жидкости в каждой точке представляется в виде  $\mathbf{v} = \{v_\xi, v_\eta, 0\}$ .

Учтем теперь, что уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( v_\xi \sqrt{\frac{g}{g_{\xi\xi}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( v_\eta \sqrt{\frac{g}{g_{\eta\eta}}} \right) \right] = 0.$$

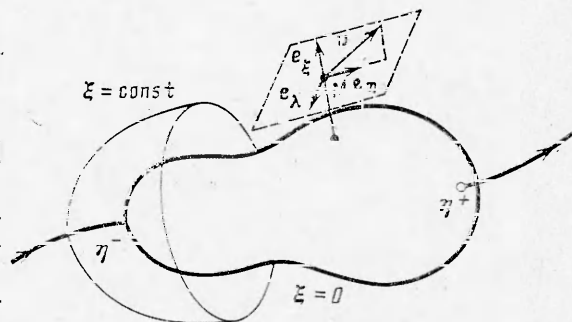
Определим функцию  $\psi(\xi, \eta, \lambda)$  как решение системы

$$(1.2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = v_\eta \sqrt{\frac{g}{g_{\eta\eta}}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -v_\xi \sqrt{\frac{g}{g_{\xi\xi}}}.$$

Тогда уравнение неразрывности (1.1), которое совпадает с условием интегрируемости системы (1.2), удовлетворяется автоматически. Постоянную интегрирования в (1.2) выбираем так, чтобы функция  $\psi$  обращалась в нуль на поверхности частицы.

Поверхности  $\psi(\xi, \eta, \lambda) = \text{const}$  целиком состоят из линий тока. Функция  $\psi$  имеет простой физический смысл: она является трехмерным аналогом функции тока. В плоском и осесимметричном случае  $\psi$  совпадает с обычной функцией тока.

В безразмерных переменных уравнение стационарной конвективной диф-



Фиг. 1

фузии и граничные условия в криволинейной системе координат  $\xi, \eta, \lambda$  с учетом (1.2) записываются следующим образом:

$$(1.3) \quad -\frac{\partial(c, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} - \frac{1}{\text{Pe}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{\xi\xi}} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{\eta\eta}} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{\lambda\lambda}} \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right) \right\};$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \xi = 0, c = 0; \quad \xi \rightarrow \infty, c \rightarrow 1, \\ c = (C_* - C_s)/(C_\infty - C_s), \quad \text{Pe} = aU/D, \quad g = g_{\xi\xi}g_{\eta\eta}g_{\lambda\lambda}, \end{aligned}$$

где в левой части уравнения стоит якобиан функций  $c$  и  $\psi$ .

Рассмотрим сначала случай, когда на поверхности частицы имеются только две изолированные особые критические точки (случай, когда на поверхности частицы отсутствуют критические точки и за частицей имеется присоединенная к ее поверхности область замкнутой циркуляции, в этой работе не исследуются). Далее критическую точку на поверхности частицы будем называть точкой натекания (стекания), если в ее окрестности нормальная компонента скорости жидкости направлена к поверхности (от поверхности) тела; в окрестности точек натекания происходит «зарождение» расположенного вблизи поверхности частицы диффузионного пограничного слоя. Считаем, что точка натекания определяется координатой  $\eta^-$ , а стекания — координатой  $\eta^+$  (см. фиг. 1).

При вязком обтекании на поверхности твердой (жидкой) частицы должно выполняться условие прилипания (непротекания), поэтому в случае несжимаемой жидкости с учетом (1.2) трехмерный аналог функции тока  $\psi$  вблизи поверхности тела можно представить в виде

$$(1.5) \quad \xi \rightarrow 0, \psi \rightarrow \xi^n f(\eta, \lambda).$$

В конкретных задачах при ламинарном вязком обтекании гладких твердых частиц параметр  $n$ , фигурирующий в (1.5), обычно принимает значение, равное двум. Тем не менее существует несколько примеров стока обтекания, в которых  $n = 3$  [3]. В случае капли или пузыря а также при обтекании частицы невязкой жидкостью имеем  $n = 1$ .

**2. Метод решения. Общие формулы для безразмерного интегрального потока.** Считая, что область течения вблизи частицы характеризуется неравенствами  $\xi \geq 0, \psi \geq 0$ , перейдем в диффузионном пограничном слое от старых к новым (растянутым) переменным:

$$(\xi, \eta, \lambda) \rightarrow (Y, \eta, \lambda), \quad Y = \text{Pe}^\nu \xi, \quad \nu = (n + 1)^{-1}.$$

Выделяя теперь из уравнения (1.3) с учетом (1.5) старшие члены разложения по малому параметру  $\text{Pe}^{-\nu}$  (при этом оказывается, что двумя последними членами в фигурных скобках в правой части уравнения (1.3) можно пренебречь по сравнению с первым), получаем уравнение диффузионного пограничного слоя в следующей форме:

$$(2.1) \quad -\frac{\partial(c, Y^n f)}{\partial(Y, \eta)} = \frac{\sqrt{g^0}}{g_{\xi\xi}^0} \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2},$$

которое параметрически зависит от третьей криволинейной координаты  $\lambda$ , аналогичной циклическим переменным в аналитической механике; здесь и далее индексом нуль помечаются величины, взятые на поверхности тела при  $\xi = 0$ .

Используя новые переменные

$$(2.2) \quad \zeta = \text{Pe}^\nu \xi f^{1/n} = \text{Pe}^\nu \psi^{1/n}, \quad t = t(\eta, \eta^-; \lambda) = \frac{1}{n} \int_{\eta^-}^{\eta} \frac{\sqrt{g^0}}{g_{\xi\xi}^0} f^{1/n} d\eta,$$

сведем погранслоиную задачу о диффузии (2.1), (1.4) к следующей краевой задаче:

$$(2.3) \quad \frac{\partial c}{\partial t} - \zeta^{1-n} \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} = 0, \quad c(\zeta, 0) = 1, \quad c(0, t) = 0, \quad c(\infty, t) = 1.$$

Ее решение имеет вид

$$(2.4) \quad c = \frac{1}{\Gamma(v)} \gamma \left( v, v^2 \frac{\zeta^{n+1}}{t} \right), \quad v = \frac{1}{n+1}, \quad \gamma(v, x) = \int_0^x x^{v-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(v) = \\ = \gamma(v, +\infty).$$

Безразмерный локальный диффузионный поток определяется производной по нормали от концентрации (2.4) на поверхности тела

$$(2.5) \quad j(\eta, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}^0}} \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = v^{(1-n)v} \frac{\text{Pe}^v |f(\eta, \lambda)|^{\frac{1}{n}}}{\Gamma(v) \sqrt{g_{\xi\xi}^0(\eta, \lambda)}} t^{-v}(\eta, \eta^-; \lambda).$$

Для безразмерного полного диффузионного потока растворенного в жидкости вещества на поверхность частицы  $S = \{\xi = 0, \eta^- \leq \eta \leq \eta^+, 0 \leq \lambda \leq \Lambda\}$  имеем

$$(2.6) \quad I = \int_S \int j dS = \int_0^{\Lambda} \int_{\eta^-}^{\eta^+} j (g_{\eta\eta}^0 g_{\lambda\lambda}^0)^{\frac{1}{2}} d\eta d\lambda = v^{-2nv} \frac{\text{Pe}^v}{\Gamma(v)} \int_0^{\Lambda} t^{nv}(\eta^+, \eta^-; \lambda) d\lambda, \\ v = \frac{1}{n+1}.$$

Следует отметить, что более сложный анализ трехмерного диффузионного пограничного слоя проводился в [4, 5], где для уравнения стационарной конвективной диффузии, записанного в обычных погранслойных координатах, которые часто используются в аналогичных гидродинамических погранслойных задачах и связаны только с поверхностью тела (и не связаны с линиями тока), было найдено преобразование, сводившее его к уравнению с разделяющимися переменными. В [6] для случая произвольного трехмерного обтекания твердой частицы, что соответствует значению  $n = 2$  в (1.5), в пограничном слое использовалась локальная ортогональная криволинейная система координат, аналогичная  $\xi, \eta, \lambda$ . Формулы для распределения концентрации в диффузионном пограничном слое капель и частиц произвольной формы в случае двумерного (плоского или осесимметричного) обтекания, записанные в тех или иных обозначениях в разных системах координат, фигурировали ранее во многих работах (см., например, [3, 7–10]).

Аналогичным образом рассматриваются случаи  $\psi \leq 0$  и случаи, когда область течения вокруг частицы задается неравенством  $\xi \leq 0$ . В общем случае, когда на поверхности частицы имеется более двух критических точек и линий (т. е. аналог функции тока меняет знак), разбиваем область течения вблизи поверхности тела на участки, в каждом из которых постоянен знак аналога функции тока. Можно показать, что распределение концентрации и локальный диффузионный поток на каждом из таких участков определяются формулами (2.4), (2.5), где

$$(2.7) \quad \zeta = \text{Pe}^v |\psi|^{\frac{1}{n}}, \quad t = t(\eta, \eta_k^-; \lambda) = \frac{1}{n} \left| \int_{\eta_k^-}^{\eta} \frac{\sqrt{g^0}}{g_{\xi\xi}^0} |f|^{\frac{1}{n}} d\eta \right|,$$

а  $\eta_k^-$  ( $k = 1, \dots, K$ ) — критическая линия (точка) натекания, расположенная на границе (внутри) участка. Полный интегральный поток вычисляется путем суммирования интегральных потоков по всем участкам.

В двумерном случае ( $\partial/\partial\lambda = 0$ ) формулы (2.4)–(2.7) переходят в результаты [3].

В общем случае трехмерного течения для использования формул (2.4)–(2.7) необходимо решать вспомогательную задачу об определении криволинейной системы координат  $\xi, \eta, \lambda$  и находить разложение аналога функции тока вблизи поверхности капель и частиц (1.5). Как правило,

исходная информация о поле течения позволяет непосредственно получить лишь распределение скоростей жидкости вблизи частицы в некоторой ортогональной фиксированной системе координат  $\xi, \mu, \chi$ , неподвижно связанной только с ее поверхностью  $\xi = 0$  (и не связанной с линиями тока). Ввиду сказанного часто возникает необходимость вычислять величины  $f$  и  $t$ , входящие в формулы (2.4)–(2.6), прямо в исходной ортогональной системе координат  $\xi, \mu, \chi$ . Поэтому покажем теперь, как, используя знание асимптотики тангенциальной составляющей вектора скорости жидкости  $\mathbf{v}_\tau$  вблизи поверхности частицы

$$(2.8) \quad \xi \rightarrow 0, \mathbf{v}_\tau \rightarrow \xi^{n-1}(F_\mu \mathbf{e}_\mu + F_\chi \mathbf{e}_\chi), \quad F_\mu = F_\mu(\mu, \chi), \quad F_\chi = F_\chi(\mu, \chi),$$

определять функции (1.5), (2.7) в системе координат  $\xi, \mu, \chi$ .

Из сопоставления выражений (1.2), (1.5), (2.8) получаем следующие формулы для функций  $f$  и  $t$ :

$$(2.9) \quad f = \frac{1}{n} F \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}, \quad t = n^{-\frac{n+1}{n}} \left| \int_{\eta^-}^{\eta^+} \frac{1-n}{g_{\xi\xi}^{2n}} \frac{1+n}{g_{\lambda\lambda}^{2n}} F^{\frac{1}{n}} \frac{1}{g_{\eta\eta}^2} d\eta \right|,$$

$$F = (F_\mu^2 + F_\chi^2)^{1/2}.$$

Здесь и далее для сокращения записи индекс нуль сверху у всех компонент метрического тензора опускается (напоминаем, что все эти величины берутся на поверхности частицы при  $\xi = 0$ ).

Учтем теперь, что по определению искомые ортогональные криволинейные координаты  $\eta = \eta(\mu, \chi)$  и  $\lambda = \lambda(\mu, \chi)$  должны удовлетворять соотношениям  $\mathbf{v}_\tau = \text{const} \nabla \eta$  и  $(\mathbf{v}_\tau \cdot \nabla \lambda) = 0$ , что приводит к следующим уравнениям для определения  $\eta$  и  $\lambda$ :

$$(2.10) \quad \frac{1}{F_\mu \sqrt{g_{\mu\mu}}} \frac{\partial \eta}{\partial \mu} - \frac{1}{F_\chi \sqrt{g_{\chi\chi}}} \frac{\partial \eta}{\partial \chi} = 0;$$

$$(2.11) \quad \frac{F_\mu}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \frac{F_\chi}{\sqrt{g_{\chi\chi}}} \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} = 0.$$

Используем также то, что квадрат длины на поверхности частицы сохраняется при переходе от старой  $\mu, \chi$  к новой  $\eta, \lambda$  системе координат:

$$(2.12) \quad g_{\mu\mu} d\mu^2 + g_{\chi\chi} d\chi^2 = g_{\eta\eta} d\eta^2 + g_{\lambda\lambda} d\lambda^2$$

$$\left( d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \eta}{\partial \chi} d\chi, \quad d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} d\chi \right).$$

Из равенства (2.12) с учетом (2.10), (2.11) после некоторых выкладок можно получить выражение для метрического коэффициента  $g_{\lambda\lambda}$ :

$$(2.13) \quad g_{\lambda\lambda} = g_{\mu\mu} \frac{F_\chi^2}{F^2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)^{-2} = g_{\chi\chi} \frac{F_\mu^2}{F^2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \right)^{-2}.$$

Аналогичные формулы для другого метрического коэффициента  $g_{\eta\eta}$  получаются из (2.13) путем замены  $\lambda \rightarrow \eta, \mu \rightarrow \chi, \chi \rightarrow \mu$ .

В подынтегральном выражении для функции  $t$  (2.9) перейдем от переменной интегрирования  $\eta$  к старой переменной  $\mu$ , используя следующие соотношения, справедливые при  $\lambda = \text{const}$ :

$$(2.14) \quad \sqrt{g_{\eta\eta}} d\eta = \sqrt{g_{\mu\mu}} \frac{F}{F_\mu} d\mu = \sqrt{g_{\chi\chi}} \frac{F}{F_\chi} d\chi,$$

которые выводятся из (2.12) с учетом того обстоятельства, что на интегральных кривых характеристического обыкновенного дифференциального уравнения

$$(2.15) \quad \frac{\sqrt{g_{\mu\mu}}}{F_\mu} d\mu = \frac{\sqrt{g_{\chi\chi}}}{F_\chi} d\chi,$$

соответствующего уравнению в частных производных (2.11)<sub>x</sub> выполняется равенство  $\lambda = \text{const}$ . В результате получим

$$(2.16) \quad t = t(\mu, \mu^-; \lambda) = n^{-\frac{n+1}{n}} \left| \int_{\mu^-}^{\mu} \left\{ \frac{1-n}{g_{\xi\xi}^{2n}} \frac{1+2n}{g_{\mu\mu}^{2n}} \frac{|F_{\chi}|^{\frac{1+n}{n}}}{F_{\mu}} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\mu} \right)^{-\frac{n+1}{n}} \right\}_{\lambda} d\mu \right| =$$

$$= n^{-\frac{n+1}{n}} \left| \int_{\mu^-}^{\mu} \left\{ \frac{1-n}{g_{\xi\xi}^{2n}} \frac{1}{g_{\mu\mu}^2} \frac{1+n}{g_{\chi\chi}^{2n}} |F_{\mu}|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\chi} \right)^{-\frac{n+1}{n}} \right\}_{\lambda} d\mu \right|.$$

Здесь и далее индекс  $\lambda$  снизу после фигурных скобок означает, что соответствующая величина берется при  $\lambda = \text{const}$ . Переход в подынтегральном выражении (2.9) от  $\eta$  к другой переменной  $\chi$  осуществляется путем перемны мест координат  $\mu \rightleftharpoons \chi$  в (2.16).

Для исследования массопереноса к частице или капле (пузырю) сферической формы, обтекаемых произвольным трехмерным ламинарным потоком, полезно иметь формулы для определения функции  $t$  в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , связанной с центром частицы. В этом случае имеем (метрические коэффициенты берутся на поверхности частицы)

$$(2.17) \quad \xi = r - 1, \quad u = \theta, \quad \chi = \varphi; \quad g_{\xi\xi} = 1, \quad g_{\mu\mu} = 1, \quad g_{\chi\chi} = \sin^2 \theta.$$

Используя выражения (2.16) с учетом (2.17) для переменной  $t$ , получаем следующие формулы:

$$(2.18) \quad \frac{t}{n^{\sigma}} = \left| \int_{\xi^-}^{\xi} \left\{ \sin^{\sigma} \theta |F_{\theta}|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right)^{-\sigma} \right\}_{\lambda} d\theta \right| = \left| \int_{\theta^-}^{\theta} \left\{ \frac{|F_{\varphi}|^{\sigma}}{F_{\theta}} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right)^{-\sigma} \right\}_{\lambda} d\theta \right| =$$

$$= \left| \int_{\varphi^-}^{\varphi} \left\{ \sin^{\sigma+1} \theta \frac{|F_{\theta}|^{\sigma}}{F_{\varphi}} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \right)^{-\sigma} \right\}_{\lambda} d\varphi \right| = \left| \int_{\varphi^-}^{\varphi} \left\{ \sin \theta |F_{\varphi}|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right)^{-\sigma} \right\}_{\lambda} d\varphi \right|, \quad \sigma = \frac{n+1}{n}.$$

Таким образом, процедура вычисления интегрального потока (или среднего числа Шервуда) на поверхности частицы производится последовательно в четыре этапа: сначала определяются компоненты тангенциальной составляющей скорости жидкости вблизи поверхности частицы (2.8); далее находится общее решение характеристического уравнения (2.15)<sub>x</sub>, заменяя в котором произвольную постоянную интегрирования на  $\lambda$ , получаем зависимость  $\lambda = \lambda(\mu, \chi)$ ; на третьем этапе вычисляется переменная  $t$  по любой из формул (2.16), (2.18) (которые выбираются из соображений удобства) с учетом того, что подынтегральное выражение должно быть предварительно записано только через координату  $\lambda$  и ту переменную, по которой ведется интегрирование; на последнем этапе производится вычисление интегралов, аналогичных (2.6).

Проиллюстрируем теперь использование формул (2.16), (2.18) на некоторых конкретных примерах.

**3. Массоперенос к сферической капле или твердой частице в произвольном чисто деформационном сдвиговом потоке.** Рассмотрим массоперенос к сферической капле или твердой частице в произвольном чисто деформационном линейном сдвиговом потоке, распределение скоростей которого на бесконечности имеет вид

$$(3.1) \quad r \rightarrow \infty, \quad v_i = E_{ij}x_j + o(1), \quad E_{ij}\delta_{ij} = 0, \quad E_{ij} = E_{ji},$$

где  $v_i$  и  $E_{ij}$  — безразмерные компоненты скорости и тензора сдвига (при нормировке которых в каждом конкретном случае выбираются подходящие значения), записанные в декартовой системе координат, связанной с центром частицы; здесь и далее по повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) ведется суммирование;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Равенство суммы диагональных элементов тензора нулю следует из условия несжимаемости жидкости ( $\mathbf{v} \cdot \nabla = 0$ ); симметрия компонент тензора сдвига относительно

перестановки индексов  $i$  и  $j$  соответствует отсутствию вращательной составляющей скорости жидкости на бесконечности (другими словами, рассматривается чисто деформационное течение).

Решение гидродинамической задачи об обтекании сферической капли произвольным чисто деформационным стоксовым потоком (3.1) имеет вид [11]

$$(3.2) \quad v_i = E_{ij} x_j \left( 1 - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{1}{r^5} \right) - \frac{5}{2} E_{jkh} x_i x_j x_k \left( \frac{\beta + 2/5}{\beta + 1} \frac{1}{r^5} - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{1}{r^7} \right),$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

где  $\beta$  — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости; значение  $\beta = \infty$  соответствует твердой частице, а  $\beta = 0$  — газовому пузырю.

Симметричный тензор  $\mathbf{E}$  путем поворота системы координат может быть приведен к диагональному виду с компонентами  $E_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ), которые определяются путем решения кубического уравнения  $\det \| E_{ij} - E_m \delta_{ij} \| = 0$ . Диагональные элементы  $E_1, E_2, E_3$  приведенного к главным осям тензора  $\mathbf{E}$  определяют интенсивности растягивающего (сжимающего) движения вдоль осей координат. Симметричный тензор сдвига имеет три скалярных инварианта:

$$(3.3) \quad J_1 = E_{ij} \delta_{ij} = E_1 + E_2 + E_3 = 0, \quad J_2 = (E_{ij} E_{ij})^{1/2} = (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2)^{1/2},$$

$$J_3 = |\det \| E_{ij} \| |^{1/3} = |E_1 E_2 E_3|^{1/3},$$

которые остаются неизменными при любых поворотах (с отражениями) исходной системы координат. В соответствии с условием несжимаемости жидкости  $J_1 = 0$  только два диагональных элемента из трех будут независимы.

Далее декартову систему координат, связанную с главными осями тензора сдвига, обозначаем  $X_1, X_2, X_3$  и без ограничения общности считаем, что  $E_1 \geq E_2 \geq 0, E_3 < 0$  (т. е.  $|E_3| = \max_m |E_m|$ ).

В сферической системе координат, связанной с главными осями тензора сдвига, старшие члены разложения тангенциальных составляющих скоростей жидкости (3.2) вблизи поверхности капли и твердой частицы даются формулами (при  $r \rightarrow 1$ )

$$(3.4) \quad v_\theta = (1/2)q(n)\xi^{n-1} \sin 2\theta \{-3E_3 + (E_1 - E_2) \cos 2\varphi\},$$

$$v_\varphi = q(n)\xi^{n-1} \sin \theta \sin 2\varphi (E_2 - E_1),$$

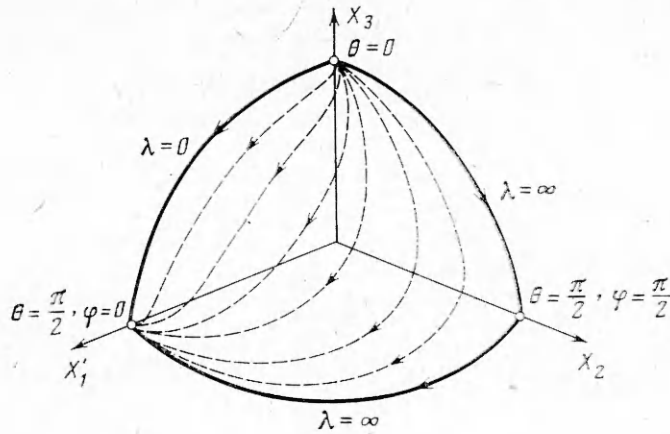
$$q(1) = 1/(2(\beta + 1)), \quad q(2) = 5/2, \quad \xi = r - 1,$$

где значение  $n = 1$  соответствует капле умеренной вязкости ( $\beta \leq O(1)$ ), а  $n = 2$  — твердой частице ( $\beta = \infty$ ).

Из выражений (3.4) видно, что поле течения трехмерно при  $E_1 \neq E_2$ . Следует отметить, что осесимметричный случай, соответствующий значениям  $E_1 = E_2 = -E_3/2$  в (3.4), рассматривался в [12]. Массообмен твердой сферы, обтекаемой плоским сдвиговым течением, которое задается параметрами  $E_1 = -E_3, E_2 = 0; n = 2$  в (3.4) (трехмерная задача), исследовался в [6, 13].

Из соотношений (3.4) следует, что на поверхности сферической капли или твердой частицы имеется шесть изолированных особых критических точек, расположенных на главных осях тензора сдвига: 1)  $\theta = 0$ ; 2)  $\theta = \pi$ ; 3)  $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ ; 4)  $\theta = \pi/2, \varphi = \pi$ ; 5)  $\theta = \pi/2, \varphi = \pi/2$ ; 6)  $\theta = \pi/2, \varphi = 3\pi/2$ . Первые две из них являются точками натекания, две последующие — точками стекания, а последние — нейтральными точками (особенность типа седла). В предельном осесимметричном случае  $E_1 = E_2$  вместо последних четырех изолированных критических точек на экваторе капли  $\theta = \pi/2$  появляется критическая линия стекания.

Характеристическое уравнение, определяющее зависимость искомой криволинейной координаты  $\lambda$  от сферических координат  $\theta$  и  $\varphi$ , одинаково



Ф и г. 2

для случая капли и твердой сферы и имеет вид

$$(3.5) \quad \frac{2d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{-3E_3 + (E_2 - E_1) \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi (E_1 - E_2)} d\varphi.$$

При выводе этого уравнения использованы соотношения (2.15), (2.17), (3.4).

Нетрудно показать, что общее решение уравнения (3.5) может быть представлено в форме

$$(3.6) \quad C = \operatorname{tg}^2 \theta \operatorname{tg}^\kappa \varphi \sin 2\varphi, \quad \kappa = 3(E_1 + E_2)/(E_1 - E_2),$$

где  $C$  — произвольная постоянная; при записи показателя  $\kappa$  была исключена компонента  $E_3$  путем использования равенства  $J_1 = 0$  (3.3). Зависимость криволинейной координаты  $\lambda$  от сферических координат получаем, полагая в (3.6)  $C \equiv \lambda$  (естественно, можно положить и  $\lambda = \Phi(C)$ , где  $\Phi$  — любая достаточно «хорошая» функция).

На фиг. 2 показано качественное поведение предельных линий тока на поверхности сферической капли или твердой частицы в первом квадранте  $0 \leq \theta, \varphi \leq \pi/2$ ; величина переменной  $\lambda = C$  (3.6) изменяется в пределах от нуля до бесконечности. Интегральный диффузионный поток на эту часть поверхности вычисляется путем использования выражения (2.6) при  $\Lambda = +\infty$ . Подынтегральную функцию в (2.6) определяем по последней формуле (2.18) с учетом соотношения  $\partial\lambda/\partial\theta = 4\lambda/\sin 2\theta$  (которое является следствием (3.6) при  $C = \lambda$ ), а также того, что в рассматриваемой области координата  $\varphi$  изменяется в пределах  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Для функции  $t(\eta^+, \eta^-; \lambda)$  получаем

$$(3.7) \quad t(\eta^+, \eta^-; \lambda) = \frac{[|\bar{E}_1 - \bar{E}_2| q(n)]^{\frac{1}{n}}}{(4n\lambda)^{\frac{n+1}{n}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin \theta \sin 2\theta\}_{\lambda}^{\frac{n+1}{n}} \sin^{\frac{1}{n}} 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{[|\bar{E}_1 - \bar{E}_2| q(n)]^{\frac{1}{n}}}{(2n)^{\frac{n+1}{n}}} \int_0^1 \frac{z^{\frac{\kappa n + \kappa - n + 3}{4n}} (1-z)^{\frac{\kappa n + \kappa - 2n}{2n}}}{\left[ z^{\frac{\kappa+1}{2}} + \frac{\lambda}{2} (1-z)^{\frac{\kappa-1}{2}} \right]^{\frac{3}{2} \frac{n+1}{n}}} dz.$$

В случае капли, обтекаемой плоским сдвиговым потоком (трехмерное поле течения), что соответствует значениям  $n = 1, \kappa = 3$  ( $E_1 = -E_3, E_2 = 0$ ), интеграл (3.7) можно выразить в элементарных функциях в виде

$$(3.8) \quad t(\eta^+, \eta^-; \lambda) = \frac{|E_1|}{32(\beta+1)} \int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 dz}{\left[z^2 + \frac{\lambda}{2}(1-z)\right]^3} =$$

$$= \frac{|E_1|}{64(\beta+1)z_2^3} \left( \frac{d^2}{dY^2} Y^2 \frac{d^2}{dY^2} \frac{\ln Y}{Y-1} \right)_{Y=z_1/z_2}, \quad z_{1,2} = \frac{\lambda}{4} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{16} - \frac{\lambda}{2}}.$$

При записи равенства (3.8) были использованы представление (5) на с. 225 и формула (4) на с. 82 [14];  $z_1$  и  $z_2$  соответствуют корням знаменателя подынтегрального выражения (3.8); при  $0 \leq \lambda \leq 8$  корни  $z_{1,2}$  комплексны, и формулу (3.8) после дифференцирования по  $Y$  следует переписать, учитывая соотношение  $\ln Y = 2i \operatorname{arctg} \sqrt{8\lambda^{-1} - 1}$ .

Вычисление интегрального диффузионного потока на всю поверхность капли проводится по формулам (2.6), (3.8) при  $\Lambda = \infty$  с учетом того, что интегральный поток на рассматриваемую часть поверхности (см. фиг. 2) составляет  $1/8$  от полного. В результате вычислений для среднего числа Шервуда  $\operatorname{Sh} = I(4\pi)^{-1}$  получаем

$$(3.9) \quad \operatorname{Sh} = 0,737(\beta+1)^{-1/2} \operatorname{Pe}^{1/2}, \quad \operatorname{Pe} = a^2 |E_1^*| D^{-1} (E_1^* = -E_3^*, E_2^* = 0).$$

Здесь и далее звездочкой помечаются размерные компоненты тензора сдвига.

Выбирая за характерный масштаб сдвига второй размерный инвариант (3.3)  $J_2^* = \sqrt{2} |E_1^*|$ , формулу (3.9) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$(3.10) \quad \operatorname{Sh} = 0,620(\beta+1)^{-1/2} \operatorname{Pe}_M^{1/2}, \quad \operatorname{Pe}_M = a^2 J_2^* D^{-1}, \quad J_2^* = (E_{ij}^* E_{ij}^*)^{1/2},$$

где  $\operatorname{Pe}_M$  — модифицированное число Пекле.

Результаты [12], полученные для осесимметричного сдвига ( $E_1^* = E_2^* = -E_3^*/2$ ,  $J_2^* = \sqrt{6} |E_1^*|$ ) и записанные через модифицированное число Пекле, даются выражением

$$(3.11) \quad \operatorname{Sh} = 0,624(\beta+1)^{-1/2} \operatorname{Pe}_M^{1/2}, \quad \operatorname{Pe}_M = a^2 J_2^* D^{-1}.$$

Если в общем случае произвольного чисто деформационного сдвигового потока (3.1) за характерный масштаб сдвига принять величину  $J_2^*$ , что соответствует значению  $J_2 = 1$  в (3.3), то среднее число Шервуда, которое является скалярной величиной, должно зависеть только от отношения размерных инвариантов

$$(3.12) \quad \operatorname{Sh} = \Phi(J_3) = \Phi(J_3^*/J_2^*).$$

Величина  $J_3$  в (3.12) при условиях  $J_1 = 0$  и  $J_2 = 1$  изменяется в пределах от нуля (плоский сдвиг) до максимального значения, равного  $2^{1/3} \cdot 6^{-1/2} = 0,514$  (осесимметричный сдвиг). При этом в силу (3.10), (3.11) приращение среднего числа Шервуда на всем интервале изменения  $J_3$  незначительно и составляет менее одного процента. Это дает основание распространить гипотезу о том, что интегральный поток очень слабо зависит от третьего инварианта (3.3) ( $\Phi \approx \operatorname{const}$ ), высказанную для твердых частиц в [6] на капли и пузыри, и позволяет, по-видимому, использовать формулу (3.10) для приближенного определения среднего числа Шервуда в случае любого чисто деформационного сдвигового обтекания сферической капли.

**4. Массоперенос к цилиндру в произвольном сдвиговом потоке.** Рассмотрим стационарную конвективную диффузию к поверхности закрепленного кругового цилиндра радиуса  $a$ , обтекаемого произвольным несжимаемым однородным линейным сдвиговым потоком. В общем (плоском) случае распределение скоростей такого течения вдали от цилиндра в декартовой системе координат  $x_1, x_2$  может быть представлено в виде



$$4.1) \quad r \rightarrow \infty, v_i = G_{ij}x_j + o(1); G_{ij}\delta_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & -E_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{vmatrix},$$

$$E_{11} = G_{11} = -G_{22}, E_{12} = E_{21} = (1/2)(G_{12} + G_{21}), \Omega = (1/2)(G_{21} - G_{12}).$$

Здесь, как и ранее,  $v_i$  и  $G_{ij}$  — безразмерные компоненты скорости и тензора сдвига, способ нормировки которых будет указан ниже. Для наглядности матрица коэффициентов сдвига  $\|G_{ij}\|$  в (4.1) записана в виде суммы симметричного  $\|E_{ij}\|$  и антисимметричного  $\|\Omega_{ij}\|$  слагаемых, которые соответствуют чисто деформационной и чисто вращательной составляющим движения на бесконечности. В общем случае тензор сдвига определяется заданием трех независимых величин  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  и  $\Omega$ .

В стоксовом приближении решение гидродинамической задачи о распределении скоростей потока с граничными условиями на бесконечности (4.1) и прилипания на поверхности цилиндра  $r = 1$ ,  $\mathbf{v} = 0$  можно получить, используя результаты [15], что приводит к следующему выражению для функции тока:

$$(4.2) \quad \psi = \frac{1}{2} E_{11} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin 2\theta - \frac{1}{2} E_{12} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \cos 2\theta - \\ - \frac{1}{2} \Omega (r^2 - 1 - 2 \ln r) = \frac{1}{2} \bar{E} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin 2\bar{\theta} - \\ - \frac{1}{2} \Omega (r^2 - 1 - 2 \ln r), \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\bar{E} = (E_{11}^2 + E_{12}^2)^{1/2}, \quad \bar{\theta} = \theta + \Delta\theta \quad \left( \frac{E_{11}}{\bar{E}} = \cos(2\Delta\theta), \frac{E_{12}}{\bar{E}} = -\sin(2\Delta\theta) \right).$$

Здесь система координат  $r, \bar{\theta}$  ( $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ), полученная из исходной путем поворота на угол  $\Delta\theta$ , связана с главными осями симметричного тензора  $\mathbf{E}$  (в главных осях тензор  $\mathbf{E}$  приводится к диагональному виду с элементами  $\bar{E}$  и  $-\bar{E}$ ). Величина  $\bar{E}$  определяет интенсивность чисто деформационного растягивающе-сжимающего движения жидкости вдоль главных осей, а параметр  $\Omega$  соответствует угловой скорости (твердотельного) вращения потока на бесконечности. Простой сдвиг задается значениями  $E_{11} = 0, E_{12} = -\Omega = G_{12}/2, \bar{E} = |E_{12}|$  в выражениях (4.1), (4.2).

Структура линий тока  $\bar{\psi} = \text{const}$  (4.2) существенным образом зависит от отношения параметров  $\bar{E}$  и  $\Omega$ . Без ограничения общности полагаем в соотношениях (4.2)  $\bar{E} = 1$ , что соответствует выбору за характерный масштаб сдвига величины  $J_2^*/\sqrt{2} = (E_{11}^{*2} + E_{12}^{*2})^{1/2}$  при записи безразмерных выражений (4.1).

Функция тока (4.2) обладает следующими предельными свойствами: вблизи поверхности цилиндра

$$(4.3) \quad r \rightarrow 1, \psi \approx (r - 1)^2 (2 \sin 2\bar{\theta} - \Omega) \quad (\bar{E} = 1),$$

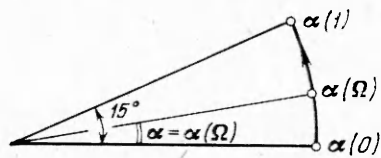
на бесконечности

$$(4.4) \quad r \rightarrow \infty, \psi \approx (1/2)r^2 (\sin 2\bar{\theta} - \Omega) \quad (\bar{E} = 1).$$

Далее ограничимся изучением следующего диапазона изменения угловой скорости вращения потока на бесконечности:  $0 \leq |\Omega| \leq 1$ . В этом случае из выражений (4.2)–(4.4) следует, что все линии тока разомкнуты и на поверхности цилиндра имеются четыре особые критические точки:

$$(4.5) \quad \bar{\theta}_1 = \alpha, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \bar{\theta}_3 = \pi + \alpha, \quad \bar{\theta}_4 = \frac{3}{2}\pi - \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\Omega}{2},$$

где значения  $\bar{\theta}_2$  и  $\bar{\theta}_4$  соответствуют траекториям натекания, а  $\bar{\theta}_1$  и  $\bar{\theta}_3$  — стекания. Увеличение угловой скорости вращения потока на бесконечно-



Ф и г. 3

сти от нуля до единицы сдвигает критическую точку стекания  $\bar{\theta}_1$  против часовой стрелки на  $15^\circ$  (фиг. 3). На фиг. 4, а, б показаны линии тока, соответствующие значениям  $\Omega = 0$  (чисто деформационное течение) и  $\Omega = 1$  (простой сдвиг).

Распределение концентрации и локальный диффузионный поток на поверхности цилиндра задаются выражениями (2.4), (2.5), (2.7), где

$$(4.6) \quad \xi = r - 1, \quad \eta = \bar{\theta}, \quad n = 2, \quad g^0 = g_{\xi\xi}^0 = 1, \quad f = 2 \sin \theta - \Omega,$$

$$\bar{\theta}^- = \eta^- = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \alpha & \text{при } \alpha \leq \bar{\theta} \leq \pi + \alpha, \\ \frac{3}{2}\pi - \alpha & \text{при } \pi + \alpha \leq \bar{\theta} \leq 2\pi + \alpha. \end{cases}$$

Используя формулы (2.6), (2.7), (4.6) и учитывая равенства

$$t(\bar{\theta}_2, \bar{\theta}_1) = t(\bar{\theta}_4, \bar{\theta}_3) = 2E \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 - \Omega} \right) - \left( 1 + \frac{\Omega}{2} \right) K \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 - \Omega} \right),$$

$$t(\bar{\theta}_3, \bar{\theta}_2) = t(\bar{\theta}_5, \bar{\theta}_4) = 2E \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 + \Omega} \right) - \left( 1 - \frac{\Omega}{2} \right) K \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 + \Omega} \right),$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно ( $\bar{\theta}_5 = \bar{\theta}_1$ ), для среднего числа Шервуда на поверхность цилиндра получаем

$$(4.7) \quad \text{Sh} = \frac{2^{4/3}}{\pi \Gamma(1/3)} \times \\ \times \left\{ \left[ 2E \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 - \Omega} \right) - \left( 1 + \frac{\Omega}{2} \right) K \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 - \Omega} \right) \right]^{2/3} + \right. \\ \left. + \left[ 2E \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 + \Omega} \right) - \left( 1 - \frac{\Omega}{2} \right) K \left( \frac{1}{2} \sqrt{2 + \Omega} \right) \right]^{2/3} \right\} \times \\ \times \text{Pe}^{1/3},$$

$$I = 2\pi \text{Sh}, \quad \text{Pe} = a^2 \bar{E}^* D^{-1} \\ (0 \leq |\Omega| \leq 1).$$

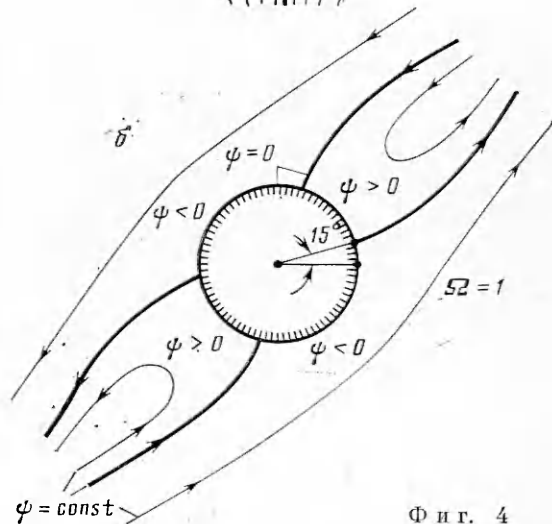
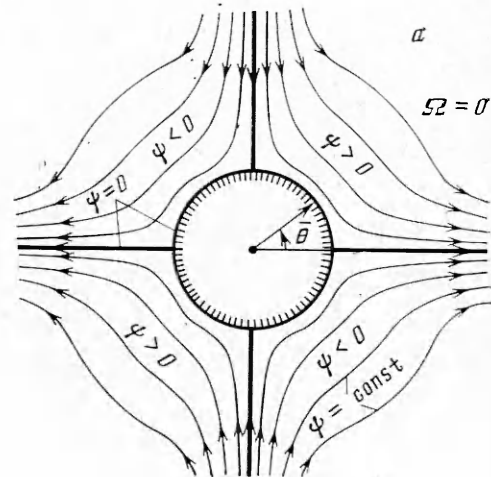
При записи формулы (4.7) было учтено, что в плоских задачах интегральный поток принято вычислять на единицу длины цилиндра, что соответствует значению  $\Lambda = 1$  ( $\lambda = x_3$ ) в (2.6).

В частных случаях чисто деформационного ( $\Omega = 0$ ) и простого ( $|\Omega| = 1$ ) линейного сдвигового обтекания цилиндра из выражения (4.7) получаем

$$(4.8) \quad \text{Sh} = 0,920 \text{Pe}^{1/3}$$

$$(\Omega = 0); \quad \text{Sh} = 0,908 \text{Pe}^{1/3}$$

$$(|\Omega| = 1).$$



Ф и г. 4

Из формулы (4.7) следует, что увеличение абсолютной величины угловой скорости вращения сдвигового потока  $\Omega$  приводит к снижению интенсивности массо- и теплообмена цилиндра с окружающей жидкостью. При этом, как видно из (4.8), среднее число Шервуда очень слабо меняется в рассматриваемом диапазоне (относительное приращение среднего числа Шервуда при увеличении  $|\Omega|$  от нуля до единицы составляет всего 1,3%). Последнее обстоятельство позволяет для приближенного вычисления среднего числа Шервуда, соответствующего обтеканию закрепленного кругового цилиндра произвольным сдвиговым потоком, использовать первую формулу (4.8) (вместо точной формулы (4.7)) во всем диапазоне  $0 \leq |\Omega| \leq 1$ .

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А. Д. О диффузионном взаимодействии твердых частиц при больших числах Пекле.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
2. Полянин А. Д. О диффузионном взаимодействии капель в жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
3. Полянин А. Д., Прядкин П. А. О двух задачах конвективной диффузии к поверхностям плохообтекаемых тел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6.
4. Волошук В. М. Фундаментальные решения диффузионного пограничного слоя.— Тр. Ин-та эксперимент. метеорологии, 1973, вып. 3(37).
5. Волошук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
6. Batchelor G. K. Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution.— J. Fluid Mech., 1979, vol. 95, N 2.
7. Acrivos A. Solution of the laminar boundary layer energy equation at high Peclet numbers.— Phys. Fluids, 1960, vol. 3, N 4.
8. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer. Pt 1. Low speed flows.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, N 2.
9. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой жидкостью.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
10. Полянин А. Д., Сысков Ю. Н. Диффузия к цилиндру в случае произвольного обтекания вязкой жидкостью. Приближение диффузионного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5.
11. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мпр, 1973.
12. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
13. Poe C. G. Closed streamline flows past rotating particles: inertial effects, lateral migration, heat transfer. Ph. D. dissertation, Stanford University, 1975.
14. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
15. Chwang A. T., Yao-Tsu Wu T. Hydromechanics of low-Reynolds-number flow. Pt 2. Singularity method for Stokes flows.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, N 4.

Поступила 25/II 1983 г.

УДК 536.24; 532.526

### ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ НА ТЕПЛОТДАЧУ ПЛАСТИНЫ

А. Ш. Дорфман

(Киев)

При расчетах теплоотдачи турбулентно обтекаемых тел необходимо располагать распределением турбулентного числа Прандтля поперек пограничного слоя. Распределение турбулентного числа Прандтля изучалось во многих работах. Обзор и сравнение результатов, полученных различными авторами, приведены, например, в [1—5]. К сожалению, данные имеющихся работ настолько противоречивы, что в настоящее время не представляется возможным достаточно надежно установить функцию, определяющую распределение турбулентного числа Прандтля поперек пограничного слоя.