

7. Змпевская Г. И., Пярнпуу А. А. Об использовании кинетических уравнений в задачах моделирования верхней атмосферы.— В кн.: Математические модели ближнего космоса. Новосибирск, Наука, 1977.
8. Змпевская Г. И., Пярнпуу А. А. Численное моделирование физико-химических процессов в атмосферах планет. Препринт ИПМ АН СССР, № 36, 1978.
9. Змпевская Г. И., Пярнпуу А. А., Шематович В. И. Решение модельных релаксационных задач для разреженных газовых смесей статистическим методом частиц в ячейках. Препринт ИПМ АН СССР, № 35, 1978.
10. Змпевская Г. И., Пярнпуу А. А., Шематович В. И. Численное исследование состояний смеси разреженных газов с учетом обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы. Препринт ИПМ АН СССР, № 106, 1978.
11. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. I, II.— ЖВМиМФ, 1975, т. 15, № 5, 6.
12. Яницкий В. Е. Применение некоторых статистических моделей для численного решения уравнения Больцмана. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. М., ВЦ АН СССР, 1974.  
Яницкий В. Е. Применение стохастического процесса Пуассона для расчета столкновительной релаксации неравновесного газа.— ЖВМиМФ, 1973, т. 13, № 2.  
Яницкий В. Е. Статистическая модель течения идеального газа и некоторые ее особенности.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 6 (№ 4). Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.
13. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М., Мир, 1965.
14. Рыков В. А., Чуканова Т. П. Решение кинетических уравнений Больцмана в случае релаксации смеси газов.— В кн.: Численные методы в теории разреженных газов. М., изд. ВЦ АН СССР, 1969.
15. Мессн Г., Мотт Н. Теория атомных столкновений. М., ИЛ, 1963.

УДК 533.6.011

## ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ИНВЕРСНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ В РЕЗОНАТОРЕ

В. М. Кузнецов

(Москва)

Расчет течения инверсной смеси многоатомных газов в резонаторе с учетом всей совокупности газодинамических и оптических явлений является сложной и нерешенной задачей. Существует несколько простых одномерных моделей [1, 2], базирующихся, в частности, на приближении постоянного коэффициента усиления. В основу этих моделей положено условие стационарной генерации  $2k^*d = -\ln r_1 r_2$  [3], где  $k^*$  — насыщенный коэффициент усиления;  $d$  — расстояние между зеркалами резонатора;  $r_1$  и  $r_2$  — коэффициенты отражения. Поскольку обычно на входе в резонатор ( $x = 0$ ) коэффициент усиления активной среды  $k_\infty \neq k^*$ , возникает разрыв в значениях искомых переменных. Формально этот разрыв устраняется введением тонкой переходной области, в которой полагают переменным либо значение одного из коэффициентов отражения  $r = r(x)$  [1], либо вводят некоторое соотношение для интенсивности излучения  $I = I(x)$  [2], что обеспечивает переход от усиления  $k_\infty$  к  $k^*$ . Далее по потоку система уравнений релаксирующей смеси газов решается при условии  $k(x) = k^*$ . Очевидно, в выборе тех или иных «согласующих» соотношений имеется определенный произвол. Покажем, что в рамках рассматриваемой модели может быть получено аналитическое решение задачи. Заметим, что аналитические модели для газодинамических  $\text{CO}_2$ -лазеров строились и ранее [4—6]. Эти модели достаточно хорошо описывают физику процессов, протекающих в резонаторе, и позволяют рассчитывать выходную мощность. В них, однако, не всегда рассматривается переходная область на входе в резонатор и не учитывается влияние излу-

чения на изменение газодинамических параметров потока. Модель, предлагаемая в данной работе, позволяет учесть также и эти особенности. Кроме того, в подходе, предлагаемом здесь, задача расчета структуры течения в резонаторе рассматривается как задача теории возмущений, имеющая много общего с расчетом структуры ударной волны в релаксирующей смеси  $\text{CO}_2 + \text{N}_2 + \text{H}_2\text{O}$  (He) [7]. Это следует, во-первых, из того, что для плоского интерферометра Фабри — Перро задача остается одномерной, поскольку поперек поля течения интенсивность излучения в резонаторе высокой добротности постоянна (при  $r_1, r_2 > 0,5$ ) [8]. Во-вторых, для решения задачи могут быть использованы уравнения сохранения в интегральной форме [9]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho u &= \rho_\infty u_\infty = C_1, & p + \rho u^2 &= p_\infty + \rho_\infty u_\infty^2 = C_2, \\ \frac{u^2}{2} + c_p T + \sum_{i=1}^N \beta_i E_i + I/\rho_\infty u_\infty &= \frac{u_\infty^2}{2} + c_p T_\infty + \sum_{i=1}^N \beta_i E_{i\infty} = C_3, \\ p &= \rho \frac{R}{\mu} T \end{aligned}$$

где  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $T$  — плотность, скорость, давление и температура смеси;  $\mu$ ,  $\beta_i$  — молекулярный вес и мольная доля  $i$ -го компонента смеси;  $E_i$  — внутренние энергии отдельных мод колебаний;  $I = I(x)$  — функция, характеризующая распределение интенсивности излучения. До сечения с индексом нуль (вход в резонатор)  $I = 0$  и константы  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  известны из решения задачи расширения смеси газов (например, при истечении из сопла). Для замыкания системы (1) необходимы уравнения для неизвестных функций  $E_i$  и  $I$ . Релаксационные уравнения для  $E_i$  выберем в форме Ландау — Теллера для каждой моды колебаний [7]. Междумодовые обмены квантами в этой модели учитываются приближенно через эффективные времена колебательной релаксации, как и в модели Андерсона [8].

В лазерных смесях на основе  $\text{CO}_2$  отношение суммарной колебательной энергии к полной энтальпии торможения  $H_\infty$  является малым параметром  $\varepsilon = \sum_i \beta_i E_i / H_\infty \ll 1$  [7]. Поскольку энергия излучения составляет часть колебательной энергии, высвечивающейся с определенных уровней, мало также и отношение  $\varepsilon = \left( \sum_i \beta_i E_i + I/\rho_\infty u_\infty \right) / H_\infty$ . В силу этого обстоятельства имеем дело с типичной задачей теории возмущений, когда в первом приближении можно считать, что величина  $\varepsilon$  не влияет на распределение плотности  $\rho$ , давления  $p$  и т. д., определяемых из уравнений сохранения (1) при  $\varepsilon = 0$  [10,7]. Полученные при этом значения  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$ ,  $T_\infty$  используются для решения релаксационных уравнений, независимых при  $\varepsilon = 0$  от остальных уравнений гидродинамики. Если ввести среднее число квантов для каждой моды  $e_i = [\exp(\Theta_i/T_i) - 1]^{-1}$ , где  $\Theta_i = h\nu_i/k$  — характеристическая температура, то уравнения для мод  $i = 1, 3$  в резонаторе примут вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{de_1}{dx} &= \frac{e_1(T_0) - e_1(T_1)}{u_\infty \tau_1} - \frac{kI}{u_\infty n_\infty h\nu \beta_{\text{CO}_2}}, \\ \frac{de_3}{dx} &= \frac{e_3(T_0) - e_3(T_3)}{u_\infty \tau_3} - \frac{kI}{u_\infty n_\infty h\nu \beta_{\text{CO}_2}}. \end{aligned}$$

Здесь и далее обозначения общепринятые [8]. Поскольку на входе в резонатор частота вынужденных излучательных переходов превышает

частоту столкновений, деактивирующих верхний лазерный уровень, последними в области  $0 \leq x \leq \delta$  можно пренебречь.\*

В дальнейшем будем использовать выражение для коэффициента усиления по центру линии с упрощениями, предложенными в [8]. Тогда его можно представить в следующей форме:  $k = C(e_3 - e_1)$ , где  $C \approx \text{const}$ , а  $e_i \ll 1$ . Величины  $e_i(x = \delta) = e_i^*$  могут быть определены из условий  $C(e_3^* - e_1^*) = k^*$  и сохранения числа колебательных квантов  $e_1^* + e_3^* = (e_1 + e_3)_{x=0} = e_1(x) + e_3(x) = M = \text{const}$ , причем  $M$  известна из решения до входа в резонатор. Используя эти условия и уравнения (2) без столкновительных членов, можно определить вклад в мощность излучения, даваемый переходной зоной,

$$(3) \quad P_1 = \frac{tb}{1+r} \frac{u_\infty n_\infty h\nu \beta_{\text{CO}_2}}{C} \ln \sqrt{\frac{k_\infty}{k^*}},$$

где  $t$ ,  $b$  — коэффициент пропускания и ширина зеркал;  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = r = 1 - \alpha - t$ ;  $\alpha$  — коэффициент потерь, т. е. для простоты полагается, что потери и выход излучения сосредоточены на одном зеркале. В основной области имеет место условие  $k^* = \text{const}$ , т. е.  $dk^*/dx = 0$ . Тогда из выражения для коэффициента усиления следует, что  $de_3/dx \approx de_1/dx$ , поскольку в первом приближении, т. е. при  $\varepsilon = 0$ ,  $p = p_\infty$ ,  $u = u_\infty^*$ ,  $T = T_\infty = T_0$  и т. д., всюду внутри резонатора и  $C \approx \text{const}$ . В состоянии равновесия  $e_1 = e_{10}(T_0)$ , но, поскольку на решение наложено дополнительное условие  $k^* = C(e_{30} - e_{10}) = \text{const}$ , равновесным значением колебательной энергии третьей моды будет величина  $k^*/C + e_{10}$ .

Известно, что основная часть полезной мощности  $P$  сосредоточена в молекулах азота, за исключением части  $P_1$  (3), связанной с переходной зоной. В связи с этим при оценках  $P$  рассматривают релаксационные уравнения только для мод  $i = 3$ ,  $i = 4$ , а населенностью нижних уровней в модах  $i = 1, 2$  пренебрегают [5, 6] из-за их быстрой релаксации. Тогда в режиме стационарной генерации  $e_3 = e_3^* = \text{const}$  всюду внутри резонатора при  $p = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ . С другой стороны, расчеты на ЭВМ показывают [2, 8], что при  $k^* = \text{const}$  фактически реализуется условие  $de_3/dx \approx de_1/dx$ . Линейная модель (2), строго говоря, очень груба для описания релаксационных процессов внутри резонатора. Можно ожидать, однако, что на ее основе можно получить правильную оценку для мощности излучения  $P$ , являющейся интегральной характеристикой. Для этой цели пронормируем члены с излучением в системе (2) на суммарную концентрацию  $n_{\text{CO}_2} + n_{\text{N}_2} = n_\infty \beta_{\text{CO}_2 + \text{N}_2}$ . Тогда получим модельную смесь, в которой азот формально заменен углекислым газом, но релаксация которой характеризуется параметрами газов первоначально выбранного состава.

Решая с учетом этих обстоятельств систему релаксационных уравнений (2), будем иметь

$$(4) \quad e_3(x) = \left( \frac{k^*}{C} + e_{10} \right) + \frac{2k^* I(x)}{\beta_{\text{CO}_2 + \text{N}_2} u_\infty n_\infty h\nu} \left( \frac{1}{u_\infty \tau_3^*} - \frac{1}{u_\infty \tau_1} \right)^{-1},$$

где

$$(5) \quad I(x) = \frac{\beta_{\text{CO}_2 + \text{N}_2} u_\infty n_\infty h\nu (e_1^* - e_{10})}{2k^*} \left( \frac{1}{u_\infty \tau_1} - \frac{1}{u_\infty \tau_3} \right) e^{-Dx};$$

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_\infty \tau_1} + \frac{1}{u_\infty \tau_3} \right).$$

\* В наиболее простых моделях [4] столкновительными членами пренебрегают во всей области течения, полагая, что длина резонатора  $L \ll u_\infty \tau_1$ .

Выражение для выходной мощности представим в виде

$$(6) \quad P_2 = \frac{tb}{1+r} \frac{u_\infty n_\infty h\nu \beta_{\text{CO}_2+\text{N}_2} (e_1^* - e_{10})}{2k^*D} (1 - e^{-Dx}) \left( \frac{1}{u_\infty \tau_1} + \frac{1}{u_\infty \tau_3} \right).$$

Так как  $u_\infty \tau_3 \gg u_\infty \tau_1$ , членом  $1/u_\infty \tau_3$  можно пренебречь. Это можно сделать фактически при любой длине резонатора  $L$ , поскольку из-за принятого условия  $k^* = \text{const}$  моды  $i = 3, 4$  либо заморожены [6, 8], либо стремятся к упомянутому выше состоянию  $e_{30} = k^*/C + e_{10}$ , не являющемуся обычным равновесным состоянием, связанным со столкновительной дезактивацией на масштабах  $\sim u_\infty \tau_3^*$ . Тогда при  $x = 0$  и  $\beta = \beta_{\text{CO}_2}$  с помощью уравнения энергии (1) получим оценку величины  $\delta$

$$\delta \sim \frac{(e_1^* - e_{10}) d}{(e_1^* - e_{10}) 2k^* \tau_1 C \alpha}.$$

Если резонатор не очень короткий ( $L \gg u_\infty \tau_1$ ), то можно пренебречь последним членом в выражении (6), и тогда по отношению к полному расходу

$$(7) \quad \mathcal{P} = \frac{P - P_1}{\rho_\infty u_\infty S} = \frac{t}{1+r} \frac{h\nu N_A (e_1^* - e_{10}) \beta_{\text{CO}_2+\text{N}_2}}{k^* d \mu},$$

где  $N_A$  — число Авогадро.

Таким образом, оказывается, что для оценок удельной мощности достаточно следующей информации о течении: при заданной геометрии резонатора и процентном составе смеси необходимо знать температуру  $T$  в резонаторе для вычисления  $e_{10}$  и начальные данные для вычисления  $e_1^*$ . Знания констант элементарных процессов не требуется, необходимо только выполнение неравенства  $u_\infty \tau_3 \gg u_\infty \tau_1$ . Для очень коротких резонаторов ( $L \leq u_\infty \tau_1$ ) необходимо вычисление величины  $u_\infty \tau_1$ .

Для того чтобы оценить влияние излучения на изменение газодинамических параметров в резонаторе, необходимо рассмотреть следующее приближение по  $\varepsilon$ ,

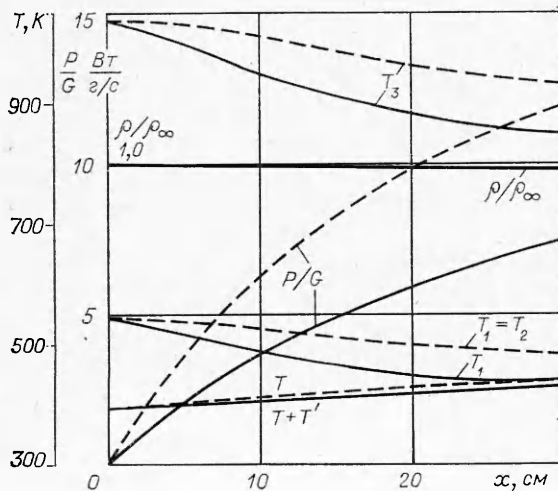
т. е. найти величины  $p' = (p - p_\infty)/p_\infty$ ,  $\rho' = (\rho - \rho_\infty)/\rho_\infty$  и т. д. Последние определяются в результате линеаризации системы (1) по параметру  $\varepsilon$  и имеют вид

$$(8) \quad p' = \frac{\gamma M_\infty^2 \varepsilon(x)}{1 - M_\infty^2},$$

$$\rho' = \frac{\varepsilon(x)}{1 - M_\infty^2},$$

$$u' = -\frac{\varepsilon(x)}{1 - M_\infty^2},$$

$$T' = \frac{(\gamma M_\infty^2 - 1) \varepsilon(x)}{M_\infty^2 - 1},$$



\* Столкновительная дезактивация в модах  $i = 3, 4$  становится существенной после обращения в нуль интенсивности излучения, когда фактически условие  $k^* = \text{const}$  уже не выполняется.

где  $M_\infty$  — число Маха потока при  $\varepsilon = 0$ ;  $\gamma$  — постоянная адиабаты. На фигуре показаны результаты расчетов, полученных на ЭВМ В. Н. Макаровым (штриховые линии) и по формулам (3) — (8) (сплошные линии) для одного и того же режима течения. Начальные данные следующие: смесь 15%  $\text{CO}_2 + 83\% \text{N}_2 + 2\% \text{H}_2\text{O}$ , в форкамере сопла  $p = 15$  атм,  $T = 2060$  К, на входе в резонатор  $u_\infty = 2 \cdot 10^5$  см/с,  $p_\infty/p = 10^{-4}$ ,  $\rho_\infty/\rho = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_\infty = 393$  К,  $k_\infty = 0,004809$  см $^{-1}$ , в резонаторе  $k^* = 0,000799$  см $^{-1}$ ,  $d = 80$  см,  $L = 30$  см,  $t = 0,1$ ,  $\alpha = 0,02$  на два прохода луча, отношение высоты выхода сопла к критической  $S_1 = 53,83$ . В рамках исследуемых моделей [1—6] соответствие следует считать удовлетворительным. При расчетах профилей температур  $T_1$ ,  $T_3$  использовались константы скоростей, полученные на основе работы [11].

Автор выражает благодарность В. Н. Макарову за предоставление расчетных данных для сравнения и полезное обсуждение.

Поступила 17 X 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Генералов И. А., Козлов Г. И., Селезнева И. К. Расчет характеристик газодинамического лазера. — ПМТФ, 1972, № 5.
2. Лосев С. А., Макаров В. Н. О мощностях газодинамического лазера при высоком давлении. — ПМТФ, 1975, № 4.
3. Cool T. A. Power and gain characteristic of high speed flow lasers. — J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, N 9.
4. Микаэля А. Л., Минаев В. П., Обод Ю. А., Гурков Ю. Г. О характеристиках лазера на двуокиси углерода с поперечной прокачкой, работающей в режиме усиления. — Квант. электроника, 1974, № 5.
5. Конохов В. К. Газодинамические  $\text{CO}_2$ -лазеры. Препринт ФИАН, № 141, 1976.
6. Анашкин А. И. О расчете электрических характеристик проточных газовых лазеров. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. общ. техн., 1976, № 1.
7. Кузнецов В. М. Инверсия населенностей колебательных уровней молекул около тел при гиперзвуковом обтекании. — Учен. зап. ЦАГИ, 1973, т. 5, № 6.
8. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. М., Наука, 1977.
9. Кузнецов В. М. О колебательной релаксации многоатомных молекул в поле монохроматического излучения за фронтом ударной волны. — ПМТФ, 1977, № 1.
10. Жигулев В. Н. К вопросу о течении неравновесного газа. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 6.
11. Taylor R. L., Bitterman S. Survey of vibrational relaxation data for processes important in the  $\text{CO}_2 - \text{N}_2$  laser system. — Rev. Mod. Phys., 1969, vol. 41, N 1.

УДК 541.124 : 532.5

### О СТРУКТУРЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЗОН ПОЗАДИ УДАРНОГО ФРОНТА В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ

А. Л. Ни, О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются вещества с произвольным числом химических реакций в предположении, что замороженная и равновесная скорости звука близки по своей величине. Скорость набегающего потока считается больше скорости распространения малых колебаний в смеси с замороженным составом. При этом условии границей невозмущенного течения служит ударный фронт, за которым расположены релаксационные зоны. При помощи метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений изучается, как изменяется их структура с увеличением скорости потока на бесконечности.

**1. Исходные уравнения.** Используем индекс  $\infty$  для характеристики вещества в невозмущенном состоянии. Будем считать, что замороженная  $a_{f\infty}$  и равновесная  $a_{e\infty}$  скорости звука близки по величине, а их разность

3 ПМТФ, № 1, 1980 г.