УДК 533; 517.958

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА 2-ПОДМОДЕЛЕЙ КЛАССА Е УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Е. В. Мамонтов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Для системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния рассматриваются инвариантные 2-подмодели (подмодели с двумя независимыми переменными) эволюционного класса. Проводится групповой анализ этих подмоделей: указываются допускаемые операторы, преобразования эквивалентности и осуществляется групповая классификация.

Как известно, все инвариантные 2-подмодели (подмодели с двумя независимыми переменными) уравнений газовой динамики приводятся к одной из двух систем: системе уравнений Е эволюционного класса или системе уравнений S стационарного класса [1, 2]. Все такие подмодели получаются относительно двухпараметрических подгрупп, отвечающих подалгебрам $L_{2,l}$ из табл. 6 работы [3] (ниже нумерация из табл. 6 используется при ссылках на соответствующую подмодель).

В настоящей работе в рамках программы ПОДМОДЕЛИ анализируются инвариантные подмодели эволюционного класса. Указываются операторы, допускаемые системой подмодели, преобразования эквивалентности и проводится групповая классификация.

Системы уравнений эволюционного класса (класса Е) получаются из подмоделей 2.8, 2.9, 2.10, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.27 и имеют вид

$$\begin{gathered} U_t + UU_\xi + (b/R)P_\xi = a_1, \qquad V_t + UV_\xi = a_2, \qquad W_t + UW_\xi = a_3, \\ R_t + UR_\xi + RU_\xi = Ra_4, \qquad P_t + UP_\xi + A(R,P)U_\xi = A(R,P)a_4, \end{gathered} \tag{1}$$

где $b = b(t) > 0$; функции $a_i = a_i(t,\xi,U,V,W)$ — линейные или квадратичные функции по переменным U, V, W; $A = Rc^2 = -RS_R/S_P$; скорость звука $c = c(R,P)$ находится из уравнения состояния $S = S(R,P)$.

Уравнение для энтропии S принимает вид $S_t + US_\xi = 0$.

Инвариантные переменные ξ, U, V, W, R, P для каждой подмодели описаны в [2]. Выбор этих переменных не однозначен. Так, в подмодели 2.8 вместо функций V, W можно ввести функции tV, ξW. При этом правые части уравнений a_2, a_3 становятся нулевыми. Однако существенного упрощения уравнений при этом не происходит, поэтому в данной работе используются переменные, описанные в [2].

Операторы алгебры Ли, допускаемой системой, ищутся в виде

$$X = \alpha^t\partial_t + \alpha^\xi\partial_\xi + \alpha^U\partial_U + \alpha^V\partial_V + \alpha^W\partial_W + \alpha^R\partial_R + \alpha^P\partial_P.$$

Все коэффициенты α — функции переменных t, ξ, U, V, W, R, P. Продолженный оператор $\tilde X$ записывается следующим образом:

$$\tilde X = X + \zeta^{U_t}\partial_{U_t} + \ldots + \zeta^{R_\xi}\partial_{R_\xi},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01780) в рамках программы "Ведущие научные школы" (код проекта 96-15-96283).

где

$$\zeta^{U_t} = D_t(\alpha^U) - U_t D_t(\alpha^t) - U_\xi D_t(\alpha^\xi), \qquad \zeta^{U_\xi} = D_\xi(\alpha^U) - U_t D_\xi(\alpha^t) - U_\xi D_\xi(\alpha^\xi),$$

. . . .

$$\zeta^{R_t} = D_t(\alpha^R) - R_t D_t(\alpha^t) - R_\xi D_t(\alpha^\xi), \qquad \zeta^{R_\xi} = D_\xi(\alpha^R) - R_t D_\xi(\alpha^t) - R_\xi D_\xi(\alpha^\xi);$$

D_t, D_ξ — операторы полного дифференцирования:

$$D_t = \partial_t + U_t\partial_U + V_t\partial_V + W_t\partial_W + P_t\partial_P + R_t\partial_R, \quad D_\xi = \partial_\xi + U_\xi\partial_U + V_\xi\partial_V + W_\xi\partial_W + P_\xi\partial_P + R_\xi\partial_R.$$

Подействуем продолженным оператором на систему (1). После подстановки выражений для коэффициентов ζ и исключения производных U_t, V_t, W_t, R_t, P_t, взятых из системы (1), получим пять равенств. Приравнивание к нулю коэффициентов при квадратичных слагаемых по производным U_ξ, V_ξ, W_ξ, R_ξ, P_ξ дает 2-уравнения, при линейных слагаемых — 1-уравнения. Остальные слагаемые приводят к 0-уравнениям.

Из 2-уравнений следует только, что имеет место x-автономия (по терминологии работы [4]): $\alpha^\xi = \alpha^\xi(t, \xi)$, $\alpha^t = \alpha^t(t, \xi)$.

Из анализа 1-уравнений следует

$$\alpha^t = \alpha^t(t), \qquad \alpha^\xi = \alpha^\xi(t, \xi), \qquad \alpha^U = \alpha^\xi_t + U(\alpha^\xi_\xi - \alpha^t_t),$$

$$\alpha^V = \alpha^V(t, \xi, V, W, R, P), \qquad \alpha^W = \alpha^W(t, \xi, V, W, R, P),$$

$$\alpha^R = R\alpha^P_P + R(2\alpha^t_t - 2\alpha^\xi_\xi + (b_t/b)\alpha^t), \qquad \alpha^P = \alpha^P(t, \xi, P), \qquad A\alpha^P_{PP} = 0,$$

$$A_P\alpha^P + A_R\alpha^R - A\alpha^P_P = 0, \qquad A\alpha^V_P + R\alpha^V_R = 0, \qquad A\alpha^W_P + R\alpha^W_R = 0.$$

Если $A = 0$, то $\alpha^P = \alpha^P(t, \xi, P)$, $\alpha^V = \alpha^V(t, \xi, V, W, P)$, $\alpha^W = \alpha^W(t, \xi, V, W, P)$.

Если $A \neq 0$, то $\alpha^P = f^P(t, \xi)P + g^P(t, \xi)$.

Вместо переменных R, P введем переменные R, S, где S — любая функция, удовлетворяющая уравнению $S_t + US_\xi = 0$ (в частности, энтропия). Тогда $\alpha^V_R = 0$, $\alpha^W_R = 0$, откуда $\alpha^V = \alpha^V(t, \xi, V, W, S)$, $\alpha^W = \alpha^W(t, \xi, V, W, S)$.

0-уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
(b/R)\alpha^P_\xi + U\alpha^U_\xi - a_1\alpha^t_t + \alpha^U_t + a_1\alpha^U_U - (a_{1t}\alpha^t + a_{1\xi}\alpha^\xi + a_{1U}\alpha^U + a_{1V}\alpha^V + a_{1W}\alpha^W) = 0,\\
\alpha^V_t - a_2\alpha^t_t + U\alpha^V_\xi + a_2\alpha^V_V + a_3\alpha^V_W - (a_{2t}\alpha^t + a_{2\xi}\alpha^\xi + a_{2U}\alpha^U + a_{2V}\alpha^V + a_{2W}\alpha^W) = 0,\\
\alpha^W_t - a_3\alpha^t_t + U\alpha^W_\xi + a_2\alpha^W_V + a_3\alpha^W_W - (a_{3t}\alpha^t + a_{3\xi}\alpha^\xi + a_{3U}\alpha^U + a_{3V}\alpha^V + a_{3W}\alpha^W) = 0,\\
\alpha^R_t - Ra_4\alpha^t_t + U\alpha^R_\xi + R\alpha^U_\xi - R(a_{4t}\alpha^t + a_{4\xi}\alpha^\xi + a_{4U}\alpha^U + a_{4V}\alpha^V + a_{4W}\alpha^W) = 0,\\
\alpha^P_t + U\alpha^P_\xi - Aa_4\alpha^t_t + A\alpha^U_\xi - A(a_{4t}\alpha^t + a_{4\xi}\alpha^\xi + a_{4U}\alpha^U + a_{4V}\alpha^V + a_{4W}\alpha^W) = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Для нахождения преобразований эквивалентности исходную систему (1) дополняем уравнениями $A_t = A_\xi = A_U = A_V = A_W = 0$. Операторы преобразований эквивалентности ищутся в виде

$$X^e = \alpha^t\partial_t + \alpha^\xi\partial_\xi + \alpha^U\partial_U + \alpha^V\partial_V + \alpha^W\partial_W + \alpha^R\partial_R + \alpha^P\partial_P + \alpha^A\partial_A.$$

Все коэффициенты α — функции переменных t, ξ, U, V, W, R, P, A.

Введем операторы полного дифференцирования

$$D^e_t = \partial_t + U_t\partial_U + V_t\partial_V + \ldots + (A_R R_t + A_P P_t)\partial_A,$$

$$D^e_\xi = \partial_\xi + U_\xi\partial_U + V_\xi\partial_V + \ldots + (A_R R_\xi + A_P P_\xi)\partial_A,$$

$$\widetilde{D^e_t} = \partial_t, \qquad \widetilde{D^e_\xi} = \partial_\xi, \qquad \widetilde{D^e_U} = \partial_U, \qquad \widetilde{D^e_V} = \partial_V,$$
$$\widetilde{D^e_W} = \partial_W, \qquad \widetilde{D^e_R} = \partial_R + A_R\partial_A, \qquad \widetilde{D^e_P} = \partial_P + A_P\partial_A.$$

Коэффициенты продолженного оператора

$$\widetilde{X^e} = X^e + \zeta^{U_t}\,\partial_{U_t} + \ldots + \zeta^{R_\xi}\partial_{R_\xi} + \zeta^{A_t}\partial_{A_t} + \ldots + \zeta^{A_R}\partial_{A_R}$$

находятся по формулам

$$\zeta^{U_t} = D^e_t\alpha^U - U_t D^e_t(\alpha^t) - U_\xi D^e_t(\alpha^\xi),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\zeta^{R_\xi} = D^e_\xi\alpha^R - R_t D^e_\xi(\alpha^t) - R_\xi D^e_\xi(\alpha^\xi),$$
$$\zeta^{A_t} = \widetilde{D^e_t}\alpha^A - A_R\widetilde{D^e_t}(\alpha^R) - A_P\widetilde{D^e_t}(\alpha^P),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\zeta^{A_P} = \widetilde{D^e_P}\alpha^A - A_R\widetilde{D^e_P}(\alpha^R) - A_P\widetilde{D^e_P}(\alpha^P).$$

Подействуем продолженным оператором на систему. После исключения производных U_t, V_t, W_t, R_t, P_t получим 10 равенств. Приравнивание к нулю коэффициентов при кубичных слагаемых по производным U_ξ, V_ξ, W_ξ, R_ξ, P_ξ, A_R, A_P дает 3-уравнения, при квадратичных — 2-уравнения, при линейных слагаемых — 1-уравнения. Остальные слагаемые приводят к 0-уравнениям.

Из 3-, 2-уравнений следует

$$\alpha^t = \alpha^t(t,\xi), \quad \alpha^\xi = \alpha^\xi(t,\xi), \quad \alpha^U = \alpha^U(t,\xi,U,V,W,R,P), \quad \alpha^V = \alpha^V(t,\xi,U,V,W,R,P),$$
$$\alpha^W = \alpha^W(t,\xi,U,V,W,R,P), \qquad \alpha^R = \alpha^R(t,\xi,U,V,W,R,P),$$
$$\alpha^P = \alpha^P(t,\xi,U,V,W,R,P), \qquad \alpha^A = \alpha^A(R,P,A).$$

Анализ 1-, 0-уравнений показывает, что

$$\alpha^t = \alpha^t(t), \quad \alpha^\xi = \alpha^\xi(t,\xi), \quad \alpha^U = \alpha^\xi_t + U(\alpha^\xi_\xi - \alpha^t_t), \quad \alpha^V = \alpha^V(t,\xi,V,W),$$
$$\alpha^W = \alpha^W(t,\xi,V,W), \quad \alpha^R = C_1R + 2R(\alpha^t_t - \alpha^\xi_\xi) + R(b_t/b)\alpha^t, \quad \alpha^P = C_1P + C_2, \quad \alpha^A = C_1A.$$

Оставшиеся 0-уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}
\alpha^U_t - a_1\alpha^t_t + U\alpha^U_\xi + a_1\alpha^U_U - a_{1t}\alpha^t - a_{1\xi}\alpha^\xi - a_{1U}\alpha^U - a_{1V}\alpha^V - a_{1W}\alpha^W = 0,\\
\alpha^V_t + U\alpha^V_\xi + a_2\alpha^V_V + a_3\alpha^V_W - a_2\alpha^t_t - a_{2t}\alpha^t - a_{2\xi}\alpha^\xi - a_{2U}\alpha^U - a_{2V}\alpha^V - a_{2W}\alpha^W = 0,\\
\alpha^W_t + U\alpha^W_\xi + a_2\alpha^W_V + a_3\alpha^W_W - a_3\alpha^t_t - a_{3t}\alpha^t - a_{3\xi}\alpha^\xi - a_{3U}\alpha^U - a_{3V}\alpha^V - a_{3W}\alpha^W = 0,\\
\alpha^U_\xi - a_4\alpha^t_t - (a_{4t}\alpha^t + a_{4\xi}\alpha^\xi + a_{4U}\alpha^U + a_{4V}\alpha^V + a_{4W}\alpha^W) = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Проанализируем 0-уравнения (2), (3) для каждой подмодели. Для описания результатов введем операторы

$$Z_1 = \partial_t, \quad Z_2 = \partial_\xi, \quad Z_3 = t\partial_t + \xi\partial_\xi, \quad Z_4 = t\partial_t + \xi\partial_\xi - V\partial_V, \quad Z_5 = t\partial_\xi + \partial_U,$$
$$Z_6 = t\partial_t + \xi\partial_\xi - tW\partial_V, \quad Z_7 = t\partial_\xi + \partial_U + \alpha\partial_V + t\partial_W, \quad Z_8 = (\alpha^2+1)\partial_V + \alpha t\partial_W,$$
$$Z_9 = t^2\partial_\xi + 2t\partial_U + \alpha t\partial_V + (t^2-1)\partial_W, \quad Z_{10} = \lambda(V,W)\,\partial_V, \quad Z^*_{10} = \partial_V, \quad Z^{**}_{10} = W\partial_V,$$
$$Z_{11} = \mu(V,W)\,\partial_W, \quad Z^*_{11} = \partial_W, \quad Z^{**}_{11} = V\partial_W, \quad Z_{12} = f(\xi W)\partial_V, \quad Z^*_{12} = \partial_V,$$

$$Z_{13} = \lambda(tW+V,W)\,\partial_V, \quad Z_{14} = \mu(tW+V,W)(t\,\partial_V - \partial_W), \quad Z_{14}^* = t\partial_V - \partial_W,$$
$$Z_{15} = (1/t)\lambda(tV,tW)\,\partial_V, \quad Z_{16} = (1/t)\mu(tV,tW)\,\partial_W, \quad Z_{17} = (1/t)\lambda(tV-\alpha tW,W)\,\partial_V,$$
$$Z_{18} = \mu(tV-\alpha tW,W)(\alpha\partial_V + \partial_W), \quad Z_{19} = (1/t)f(\xi W)\,\partial_V, \quad Z_{19}^* = (1/t)\,\partial_V,$$
$$Z_{20} = (1/t)f(tV,\xi W)\,\partial_V, \quad Z_{21} = t\partial_\xi + \partial_U + \frac{\alpha t - \beta\sigma}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_V + \frac{\beta t - \alpha\tau}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_W,$$
$$Z_{22} = \frac{\alpha\tau - \beta t}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_\xi + \frac{\tau(\beta\sigma-\alpha t) - t(\alpha\tau-\beta t)}{(t^2-\sigma\tau)^2}\partial_U + \frac{\tau}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_V - \frac{t}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_W,$$
$$Z_{23} = \frac{\beta\sigma - \alpha t}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_\xi + \frac{\sigma(\alpha\tau-\beta t) - t(\beta\sigma-\alpha t)}{(t^2-\sigma\tau)^2}\,\partial_U - \frac{t}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_V + \frac{\sigma}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_W,$$
$$Z_{24} = \frac{\beta\sigma - \alpha t}{t^2-\sigma\tau}\,t\partial_\xi - \frac{\sigma(\beta t^2 - 2\alpha\tau t + \beta\sigma\tau)}{(t^2-\sigma\tau)^2}\,\partial_U - \frac{\sigma\tau}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_V + \frac{\sigma t}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_W,$$
$$Z_{25} = \frac{\alpha\tau - \beta t}{t^2-\sigma\tau}\,t\partial_\xi - \frac{\tau(\alpha t^2 - 2\beta\sigma t + \alpha\sigma\tau)}{(t^2-\sigma\tau)^2}\,\partial_U + \frac{\tau\,t}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_V - \frac{\sigma\tau}{t^2-\sigma\tau}\,\partial_W,$$

принадлежащие ядрам допускаемых групп, и “расширяющие” операторы

$$Y_1 = R\partial_R + P\partial_P, \quad Y_2 = \partial_P, \quad Y_3 = -t\partial_t + U\partial_U - 2R\partial_R, \quad Y_4 = \xi\partial_\xi + U\partial_U - 2R\partial_R,$$
$$Y_5 = \xi\partial_\xi + U\partial_U + W\partial_W - 2R\partial_R, \qquad Y_6 = -t\partial_t + U\partial_U + tW\partial_V - 2R\partial_R,$$
$$Y_7 = t\partial_t + \xi\partial_\xi + 2/(1+t^2)(R\partial_R + P\partial_P), \quad Y_8 = t^2\partial_t + t\xi\partial_\xi + (\xi - tU)\partial_U - 3tP\partial_P - tR\partial_R,$$
$$Y_9 = t^2\partial_t + t\xi\partial_\xi + (\xi - tU)\partial_U - t^2W\partial_V - 3tP\partial_P - tR\partial_R,$$
$$Y_{10} = t^2\partial_t + t\xi\partial_\xi + (\xi - tU)\partial_U - t(V-\alpha W)\partial_V - 4tP\partial_P - 2tR\partial_R,$$
$$Y_{11} = \partial_t - (1/t)((V-\alpha W)\,\partial_W + R\partial_R + P\partial_P),$$
$$Y_{12} = t^2\partial_t + t\xi\partial_\xi + (\xi - tU)\,\partial_U - tW\partial_W - 2tR\partial_R - 4tP\partial_P,$$
$$Y_{13} = t^2\partial_t + t\xi\partial_\xi + (\xi - tU)\,\partial_U - tV\partial_V - tW\partial_W - 3tR\partial_R - 5tP\partial_P,$$
$$Y_{14} = (t^2+1)\,\partial_t + t\xi\partial_\xi + (\xi - tU)\,\partial_U - 3tR\partial_R - 5tP\partial_P,$$
$$Y_{15} = \partial_t - 2t/(1+t^2)(R\partial_R + P\partial_P), \qquad Y_{16} = \partial_t - (1/t)(V\partial_V + R\partial_R + P\partial_P),$$
$$Y_{17} = \partial_t - (1/t)(V\partial_V + W\partial_W + 2R\partial_R + 2P\partial_P), \qquad Y_g = Rg'(P)\,\partial_R + g(P)\,\partial_P.$$

Здесь α, β, σ, τ — параметры серий подалгебр; f, g, λ, μ — произвольные функции.

Ядра допускаемых алгебр (пересечение алгебр, допускаемых системами с различными функциями A) приведены в табл. 1. Известно, что в ядрах содержатся факторы нормализаторов, вычисляемые непосредственно по подалгебрам, порождающим подмодель [3]. Расширение фактора нормализатора в ядре указано в последней графе табл. 1.

Для специальных уравнений состояния возможны расширения ядра допускаемых алгебр. В табл. 2, 3 приведены все возможные расширения (F — произвольная функция).

Для полноты изложения приведем: 1) коэффициенты рассматриваемых подмоделей; 2) их преобразования эквивалентности.

Подмодель 2.8

1) $b = 1$, $a_1 = W^2/\xi$, $a_2 = -V/t$, $a_3 = -UW/\xi$, $a_4 = -(1/t + U/\xi)$;

2) $\xi^* = q_1\xi$, $U^* = q_1 U$, $W^* = q_1 W$, $P^* = q_2 q_1^2(P + q_3)$, $R^* = q_2 R$, $A^* = q_2 q_1^2 A$.

Подмодель 2.9

1) $b = 1$, $a_1 = W^2/\xi$, $a_2 = -\beta W/\xi$, $a_3 = -UW/\xi$, $a_4 = -U/\xi$;

Таблица 1

Подмодель	Фактор нормализатора	Дополнительные операторы
2.8	Z_3, Z_{19}^*	Z_{20}
2.9	Z_1, Z_3, Z_{12}^*	Z_{12}
2.10	Z_4, Z_{19}^*	Z_{19}
2.20	Z_2, Z_{21}, Z_{22}, Z_{23}, Z_{24}, Z_{25}	—
2.21	Z_2, Z_5	Z_{10}, Z_{11}
2.22	Z_2, Z_3, Z_5, Z_{19}^*, Z_{16}^*, $Z_{10}^{**}-Z_{11}^{**}$	Z_{15}, Z_{16}
2.23	Z_2, Z_7, Z_8, Z_9	—
2.24	Z_2, Z_3, Z_5, $\alpha Z_{12}^*+Z_{11}^*$, Z_{19}^*	Z_{17}, Z_{18}
2.25	Z_1, Z_2, Z_5, Z_{12}^*, Z_{14}^*	Z_6, Z_{13}, Z_{14}
2.27	Z_1, Z_2, Z_3, Z_5, Z_{10}^*, Z_{11}^*, $Z_{10}^{**}-Z_{11}^{**}$	Z_{10}, Z_{11}

2) $\xi^*=q_1\xi$, $U^*=q_1U$, $V^*=q_4V+q_5h(\xi W,\beta)$, $W^*=q_1W$, $P^*=q_2P+q_3$, $R^*=q_1^{-2}q_2R$, $A^*=q_2A$, $\beta^*=q_4\beta$, где h — произвольная функция.

Подмодель 2.10

1) $b=1$, $a_1=W^2/\xi$, $a_2=W/(t\xi)-V/t$, $a_3=-UW/\xi$, $a_4=-(1/t+U/\xi)$;

2) $\xi^*=q_1\xi$, $U^*=q_1U$, $W^*=q_1W$, $R^*=q_2R$, $P^*=q_2q_1^2(P+q_3)$, $A^*=q_2q_1^2A$.

Подмодель 2.20

1) $b=1+((\beta\sigma-\alpha t)/(t^2-\sigma\tau))^2+((\alpha\tau-\beta t)/(t^2-\sigma\tau))^2$, $a_1=(2/\Delta)[(-(\alpha^2+\beta^2)t^3+3\alpha\beta(\sigma+\tau)t^2-(2\beta^2\sigma^2+2\alpha^2\tau^2+\sigma\tau(\alpha^2+\beta^2)t+\alpha\beta\sigma\tau(\sigma+\tau)))U+(\alpha t^4-2\beta\sigma t^3+\beta(-\beta^2\sigma+2\sigma^2\tau+\alpha^2\tau)t+\alpha(\beta^2\sigma\tau-\alpha^2\tau^2-\sigma^2\tau^2))V+(\beta t^4-2\alpha\tau t^3+\alpha(2\sigma\tau^2+\beta^2\sigma-\alpha^2\tau)t+\beta\sigma(\alpha^2\tau-\beta^2\sigma-\sigma\tau^2))W]$, $a_2=(1/\Delta)[((t^2-\sigma\tau)(\tau-\sigma)(\alpha\tau-\beta t))U-(t^5+(\alpha^2+\beta^2-2\sigma\tau)t^3-\alpha\beta(3\sigma+\tau)t^2+\sigma(2\beta^2\sigma+\sigma\tau^2+\alpha^2\tau-\beta^2\tau)t+\alpha\beta\sigma\tau(\sigma-\tau))V+(\tau t^4+(\alpha^2\tau+\beta^2\sigma-2\sigma\tau^2)t^2-4\alpha\beta\sigma\tau t+\sigma\tau(\sigma\tau^2+\alpha^2\tau+\beta^2\sigma))W]$, $a_3=(1/\Delta)[(t^2-\sigma\tau)(\alpha t-\beta\sigma)(\tau-\sigma)U+(\sigma t^4+(\beta^2\sigma+\alpha^2\tau-2\sigma^2\tau)t^2-4\alpha\beta\sigma\tau t+\sigma\tau(\alpha^2\tau+\sigma^2\tau+\beta^2\sigma))V-(t^5+(\alpha^2+\beta^2-2\sigma\tau)t^3-\alpha\beta(\sigma+3\tau)t^2+\tau(2\alpha^2\tau+\sigma^2\tau-\alpha^2\sigma+\beta^2\sigma)t+\alpha\beta\sigma\tau(\sigma-\tau))W]$, $a_4=-2t/(t^2-\sigma\tau)$, $\Delta=(t^2-\sigma\tau)[(t^2-\sigma\tau)^2+(\alpha\tau-\beta t)^2+(\alpha t-\beta\sigma)^2]$;

2) $P^*=q_1P+q_2$, $R^*=q_1R$, $A^*=q_1A$.

Подмодель 2.21

1) $b=1$, $a_1=a_2=a_3=0$, $a_4=-2t/(1+t^2)$;

2) $P^*=q_3P+q_2$, $R^*=q_1q_3R$, $A^*=q_3A$.

Подмодель 2.22

1) $b=1$, $a_1=0$, $a_2=-V/t$, $a_3=-W/t$, $a_4=-2/t$;

2) $\xi^*=q_1\xi$, $U^*=q_1U$, $P^*=q_2q_1^2(P+q_3)$, $R^*=q_2R$, $A^*=q_2q_1^2A$.

Подмодель 2.23

1) $b=1+\alpha^2+t^2$, $a_1=2(tU+\alpha tV-(1+\alpha^2)W)/(1+\alpha^2+t^2)$, $a_2=\alpha(tU+\alpha tV-(1+\alpha^2)W)/(1+\alpha^2+t^2)$, $a_3=((1+t^2)U+\alpha(1+t^2)V-\alpha^2tW)/(1+\alpha^2+t^2)$, $a_4=0$;

2) $P^*=q_1P+q_2$, $R^*=q_1R$, $A^*=q_1A$.

Подмодель 2.24

1) $b=1$, $a_1=0$, $a_2=-V/t+\alpha W/t$, $a_3=0$, $a_4=-1/t$;

2) $\xi^*=q_1\xi$, $U^*=q_1U$, $R^*=q_2R$, $P^*=q_2q_1^2(P+q_3)$, $A^*=q_1^2A$.

Подмодель 2.25

1) $b=1$, $a_1=0$, $a_2=-W$, $a_3=a_4=0$;

2) $t^*=q_1t$, $U^*=q_1^{-1}U$, $W^*=q_1^{-1}W$, $R^*=(q_1+q_2)R$, $P^*=q_2P+q_3$, $A^*=q_2A$.

Таблица 2

A	Подмодель		
	2.8, 2.10	2.9	2.20, 2.23
$PF(P\,R^{-\gamma})$	$(\gamma-1)Y_5+2\gamma Y_1$	$(\gamma-1)Y_5+2\gamma Y_1$	—
$PF(P\,R^{-1})$	Y_1	Y_1	Y_1
$F(P)$	Y_5	Y_5	—
$PF(R)$	$2Y_1+Y_5$	$2Y_1+Y_5$	—
γP	Y_1, Y_5	Y_1, Y_5	—
P	Y_1, Y_5, Y_{16}	—	—
$(5/3)P$	Y_1, Y_5, Y_{13}	—	—
$2P$	—	Y_1, Y_5, Y_{12}	—
$3P$	—	—	—
$F(R\,\mathrm{e}^{-P})$	Y_5-2Y_2	Y_5-2Y_2	—
$F(R)$	Y_2	Y_2	Y_2
γR^{γ}	$Y_2, (\gamma-1)Y_5+2\gamma Y_1$	$Y_2, (\gamma-1)Y_5+2\gamma Y_1$	Y_2
R	Y_1, Y_2	Y_1, Y_2	Y_1, Y_2
1	Y_2, Y_5	Y_2, Y_5	Y_2
0	Y_5, Y_g	Y_5, Y_g	Y_g

Таблица 3

A	Подмодель				
	2.21	2.22	2.24	2.25	2.27
$PF(P\,R^{-\gamma})$	$(\gamma-1)Y_4+$ $+2\gamma Y_1$	$(\gamma-1)Y_4+$ $+2\gamma Y_1$	$(\gamma-1)Y_4+$ $+2\gamma Y_1$	$(\gamma-1)Y_6+$ $+2\gamma Y_1$	$(\gamma-1)Y_3+$ $+2\gamma Y_1$
$F(P)$	Y_4	Y_4	Y_4	Y_6	Y_3
$PF(R)$	$2Y_1+Y_4$	$2Y_1+Y_4$	$2Y_1+Y_4$	$2Y_1+Y_6$	$2Y_1+Y_3$
γP	Y_1, Y_4	Y_1, Y_4	Y_1, Y_4	Y_1, Y_6	Y_1, Y_3
P	Y_1, Y_4, Y_7, Y_{15}	Y_1, Y_4, Y_{17}	Y_1, Y_4, Y_{11}	—	—
$(5/3)P$	Y_1, Y_4, Y_{14}	Y_1, Y_4, Y_{13}	—	—	—
$2P$	—	—	Y_1, Y_4, Y_{10}	—	—
$3P$	—	—	—	Y_1, Y_6, Y_9	Y_1, Y_3, Y_8
$F(R\,\mathrm{e}^{-P})$	Y_4-2Y_2	Y_4-2Y_2	Y_4-2Y_2	Y_6-2Y_2	Y_3-2Y_2
$F(R)$	Y_2	Y_2	Y_2	Y_2	Y_2
γR^{γ}	$Y_2, (\gamma-1)Y_4+$ $+2\gamma Y_1$	$Y_2, (\gamma-1)Y_4+$ $+2\gamma Y_1$	$Y_2, (\gamma-1)Y_4+$ $+2\gamma Y_1$	$Y_2, (\gamma-1)Y_6+$ $+2\gamma Y_1$	$Y_2, (\gamma-1)Y_3+$ $+2\gamma Y_1$
R	Y_1, Y_2	Y_1, Y_2	Y_1, Y_2	Y_1, Y_2	Y_1, Y_2
1	Y_2, Y_4	Y_2, Y_4	Y_2, Y_4	Y_2, Y_6	Y_2, Y_3
0	Y_4, Y_g	Y_4, Y_g	Y_4, Y_g	Y_6, Y_g	Y_3, Y_g

Подмодель 2.27

1) $b = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$;

2) $t^* = q_1^{-1} t$, $U^* = q_1 U$, $R^* = q_2 R$, $P^* = (q_1^2 + q_2)P$, $A^* = (q_1^2 + q_2)A$.

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову и участникам программы ПОДМОДЕЛИ С. В. Хабирову, А. П. Чупахину, С. В. Головину, А. А. Черевко за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хабиров С. В.** К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 6. С. 764–766.
2. **Мамонтов Е. В.** Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.
3. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
4. **Овсянников Л. В.** О свойстве x-автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 5. С. 559–561.

Поступила в редакцию 6/VII 2000 г.