

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ТОКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПРОВОДНИКЕ, СЖИМАЕМОМ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. Д. Гилёв, Т. Ю. Михайлова\*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Получено физически корректное и математически строгое решение задачи о структуре электромагнитного поля при вхождении ударной волны в проводящее полупространство в поперечном магнитном поле. Показано, что лишь физически обоснованные граничные условия приводят к непротиворечивой картине электромагнитного поля и системы токов в проводнике. Найдены основные параметры и характерные времена, определяющие структуру токовых волн в металле. Решение в несжатой области определяется параметром  $R_1 = \mu_0 \sigma_1 D^2 t$ , в сжатой —  $R_2 = \mu_0 \sigma_2 (D-U)^2 t$  ( $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — электропроводность несжатого и сжатого вещества соответственно,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума,  $D$  — скорость фронта,  $U$  — массовая скорость,  $t$  — время). Параметр для сжатого вещества  $R_2$  совпадает с полученным ранее параметром для ударно-волнового перехода диэлектрик — металл, управляющий параметр для несжатого вещества  $R_1$  найден впервые. Асимптотики задачи для малых и больших времен, а также рассмотренный частный случай  $R_1 = R_2$  помогают понять физический смысл найденного решения.

### ВВЕДЕНИЕ

Ударное сжатие конденсированных веществ в магнитном поле сопровождает работу энергетических импульсных устройств [1] (МГД, МК-генераторы, токовые ключи). Метод ударного сжатия позволяет получить фундаментальную информацию о состоянии вещества в области больших плотностей энергии [2, 3]. Экспериментальная техника ударных волн использует разнообразные электромагнитные методы [3] (схемы измерения электропроводности, намагнитченности, датчики массовой скорости и др.). Анализ электромагнитных процессов при ударном сжатии обеспечивает корректную интерпретацию проведенных экспериментов и служит основой для разработки новых экспериментальных методик.

Задачи, связанные с определением электромагнитного поля и токов при движении ударной волны в магнитном поле, начали формулироваться в связи с развитием магнитной гидродинамики. В конце пятидесятых годов было рассмотрена задача о движении ударной волны с фронтом нулевой толщиной в безграничном проводнике с магнитным полем [4–6]. Найденное решение основывается на том, что в системе отсчета ударного фронта задача является стационарной. В этом случае изменение магнитного поля сосредоточено в слое несжа-

того вещества толщиной  $x_* \approx 1/\mu_0 \sigma_1 D$  ( $\sigma_1$  — электропроводность несжатого вещества,  $D$  — скорость фронта ударной волны,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума). Магнитное поле изменяется в несжатой области от значения внешнего магнитного поля  $B_0$  до максимального значения, которое достигается на ударном фронте,

$$B_{f,\max} = B_0 \rho / \rho_0, \quad (1)$$

где  $\rho/\rho_0$  — уплотнение вещества в ударной волне. За фронтом ударной волны токов нет, магнитное поле постоянно и равно  $B_{f,\max}$ . Выражение (1) соответствует сохранению магнитного потока в безграничном проводнике.

В последующие годы было дано решение ряда задач, связанных с разнообразными экспериментальными постановками [7–13].

В [14] рассмотрена задача о структуре токовых волн, возникающих при движении ударной волны по металлическому проводнику конечной толщины, помещенному во внешнее магнитное поле. Численным решением уравнения диффузии магнитного поля показано, что при вхождении ударной волны в вещество возникает система из двух одинаковых по величине, но противоположных по направлению токов. Один из токов локализован перед фронтом ударной волны в слое несжатого вещества тол-

щиной порядка  $x_*$ . Второй ток течет в сжатой области. Движение ударной волны приводит к пространственному растяжению контура, образованного этими двумя токами. При вхождении ударной волны в проводник магнитное поле на фронте волны  $B_f$  растет от значения внешнего магнитного поля  $B_0$  до максимального значения  $B_{f,\max}$ , соответствующего решению стационарной задачи [4–6].

В [15] анализируется задача о вхождении ударной волны в проводящее полупространство с поперечным магнитным полем. Для построения решения считалось, что с начального момента времени магнитное поле на фронте ударной волны соответствует (1). Если принять такое предположение, то задача распадается на две независимые части: задачу о линейно растущей области с постоянными граничными полями [11] и задачу о полупространстве с подвижной границей [16, с. 64]. Решения задач [14] и [15] имеют существенно разный характер для малых времен, что ставит вопрос о выборе корректной электромагнитной модели ударного сжатия проводников, пригодной для описания результатов электромагнитных измерений.

Целью настоящей работы является построение физически корректного решения задачи о вхождении ударной волны в проводящее полупространство в поперечном магнитном поле. Интерес к такой задаче обусловлен тем, что для обычных металлов приближение полубесконечной среды легко достижимо. Толщина токового слоя  $x_*$  обычно мала (для меди  $x_* \approx 3$  мкм), так что для хороших проводников влияние второй поверхности существенно только при приближении к ней фронта ударной волны. Ниже будет показано, что для ударной волны с фронтом нулевой толщины решение задачи может быть построено совершенно строго, без привлечения каких-либо произвольных допущений. Важность такой модельной постановки обусловлена тем, что она позволяет выявить параметры, определяющие структуру токовых волн в металлах.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим проводящее немагнитное ( $\mu = 1$ ) полупространство (рис. 1). Направим ось  $x$  вглубь вещества, так что  $x = 0$  соответствует свободной границе. В начальный

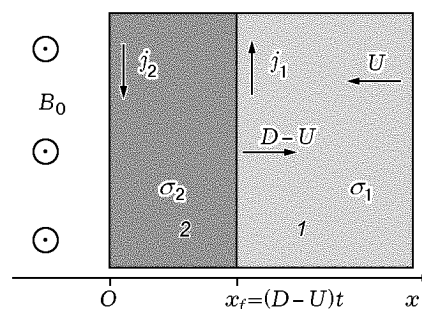


Рис. 1. Вхождение ударной волны в проводящее полупространство с поперечным магнитным полем  $B_0$ :

система отсчета связана со свободной границей полупространства; 1 — несжатое вещество, 2 — сжатое вещество; текущее положение ударного фронта  $x_f = (D - U)t$

момент времени во всем пространстве имеется постоянное поперечное магнитное поле  $B_0$  (на рисунке направлено на нас). В момент времени  $t = 0$  в проводящее полупространство входит плоская ударная волна. Предполагаем, что магнитное поле достаточно мало и не влияет на движение ударной волны. Параметры ударной волны в лабораторной системе отсчета составляют:  $D$  — скорость фронта,  $U$  — массовая скорость. Ударная волна имеет фронт нулевой толщины. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к параметрам несжатого и сжатого вещества. Электропроводность вещества изменяется скачком на ударном фронте от значения  $\sigma_1$  до  $\sigma_2$ . Будем искать магнитное поле в проводящем полупространстве  $B(x, t)$  при движении ударной волны ( $t > 0$ ).

Формализация задачи может быть выполнена аналогично [13, 14] и приводит в квазистационарном приближении к следующей системе уравнений, которые записаны в системе отсчета, связанной с поверхностью полупространства:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} - U \frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

$$(D - U)t \leq x < \infty,$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$$0 \leq x \leq (D - U)t,$$

$$B_1(x, 0) = B_0, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

$$B_2(0, t) = B_0, \quad (5)$$

$$B_1((D - U)t, t) = B_2((D - U)t, t), \quad (6)$$

$$\left( \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial B_1}{\partial x} + UB_1 \right) \Big|_{x=(D-U)t} = \\ = \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial B_2}{\partial x} \Big|_{x=(D-U)t}. \quad (7)$$

Здесь (2) и (3) — уравнения магнитной диффузии для соответствующих областей, (4) — начальное условие, (5) — граничное условие на поверхности полупространства. Остановимся подробнее на двух последних уравнениях (6), (7). Они следуют из граничных условий для векторов электромагнитного поля для движущихся сред [17, с. 436]. Действительно, непрерывность магнитного поля на ударном фронте (6) вытекает из того, что по предположению ударный фронт имеет бесконечно малую толщину и поэтому не захватывает в себя тока, а вещество является немагнитным. Отметим, что в квазистационарном приближении магнитные поля в лабораторной системе отсчета и в подвижной совпадают. В формулировке уравнения (7) использованы непрерывность электрического поля на ударном фронте, обобщенный закон Ома и дифференциальное уравнение Ампера:

$$E_1((D - U)t, t) = E_2((D - U)t, t),$$

$$j_i = \sigma_i(E_i + u_i B_i), \quad \mu_0 j_i = -\frac{\partial B_i}{\partial x}.$$

Тангенциальная составляющая электрического поля в лабораторной системе отсчета  $E^l$  непрерывна, что следует из непрерывности магнитного поля  $B$ . В подвижной системе отсчета электрическое поле меняется:  $E^m = E^l + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , но непрерывность электрического поля  $E^m$  в этой системе отсчета сохраняется, так как магнитное поле одинаково по разные стороны гидродинамического разрыва. Непрерывность электрического поля имеет место и для системы отсчета, движущейся со скоростью фронта ударной волны. В этом случае она выражает собой отсутствие генерации магнитного потока на ударном фронте.

Сформулированная система дифференциальных уравнений параболического типа (2), (3), дополненная начальными и

граничными условиями (4)–(7), определяет краевую задачу, которая имеет единственное решение [18]. Условия на разрыве необходимы для постановки задачи и, как ясно из вышеизложенного, однозначно вытекают из основных законов электромагнетизма и сделанных предположений.

В [15] вместо уравнения непрерывности электрического поля на ударном разрыве использовалось условие сохранения магнитного потока при переходе проводящей частицы через ударный фронт:  $B_f = B_0 \rho / \rho_0$ . Нетрудно понять, что замыкание системы уравнений (2)–(6) другим соотношением приводит к различию в математической постановке краевой задачи. Такая постановка не имеет физического смысла в области параметров, где условия непрерывности электрического поля и вложенности магнитного поля в вещество не тождественны. Сохранение магнитного потока имеет место только для сверхпроводника, для вещества с конечной электропроводностью магнитный поток вследствие джоулевой диссипации энергии уменьшается.

Качественно картина полей и токов при вхождении ударной волны в проводник может быть представлена следующим образом. Движение ударной волны в магнитном поле приводит к возникновению системы противоположно направленных токов (см. рис. 1): ток в первой области течет вверх, ток во второй области — вниз. Как следствие протекающих токов, магнитное поле в сжатой области превышает внешнее поле  $B_0$ . В начальные фазы движения ударной волны толщина сжатого слоя мала, градиенты магнитного поля максимальны и поле эффективно диффундирует из сжатого вещества в свободное полупространство. Это должно приводить к существенному отличию магнитного поля на фронте гидродинамического разрыва от идеального значения (1). Использование для малых времен соотношения (1) приводит к разрывности электрического поля на ударном фронте [15, рис. 3], что указывает на ошибочность полученного решения. Существование конечного тока в веществе любой электропроводности (что прямо следует из модели [15]) дает диссипацию энергии, для которой отсутствует реальный источник. Непосредственное вычисление магнитного потока по приведенным в работе распределениям  $B(x)$  [15, рис. 2] обнаруживает увеличение магнитного потока в проводнике для малых

времен. Для модели [15] проводник становится генератором магнитного потока и энергии, что невозможно. Таким образом, лишь постановка задачи, основывающаяся на законах Максвелла с правильными граничными условиями, может дать физически корректное решение данной задачи.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения краевой задачи (2)–(7) используем метод расширения [11]. Суть метода состоит в расширении исходной области переменных  $(x, t)$ , определяемой кинематикой движения ударного фронта, до области более простой формы. Удобным оказалось использование расширенной области в виде четверти плоскости  $x \geq 0, t \geq 0$ . Решение краевой задачи для четверти плоскости с заданным значением функции на оси  $t = 0$  может быть построено с помощью функции Грина. Неизвестная функция при  $t = 0$  определяется из условия на подвижной границе. Полученное таким образом решение имеет смысл в исходной области значений  $(x, t)$ . Настоящий подход имеет ряд преимуществ перед известными методами решения краевых задач уравнения теплопроводности с подвижными границами [19] (тепловые потенциалы, функция Грина, методы рядов и функциональных преобразований). Достоинство предлагаемого метода состоит в наглядности и практичности решения, несущего определенный физический смысл. Сравнение известных решений для простейшей задачи (линейно растущая область с заданными граничными полями) методами функционального преобразования Лапласа — Карсона [20], с использованием функции Грина [21] и методом расширения [11] показывает предпочтительность настоящего подхода в физических задачах.

## 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу с нулевыми начальными условиями. Для этого введем новые функции  $B'_1$  и  $B'_2$  ( $B_1 = B_0 + B_0 B'_1$ ,  $B_2 = B_0 + B_0 B'_2$ ) и без потери общности положим  $B_0 = 1$ . Тогда функция  $B'_1(x, t)$  есть решение краевой задачи

$$\frac{\partial B'_1}{\partial t} - U \frac{\partial B'_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial^2 B'_1}{\partial x^2} = 0, \quad (8)$$

$$(D - U)t \leq x < \infty,$$

$$B'_1(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial B'_1}{\partial x} + U B'_1 \right) \Big|_{x=(D-U)t} = \mu(t), \quad (10)$$

а функция  $B'_2(x, t)$  — решение краевой задачи

$$\frac{\partial B'_2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial^2 B'_2}{\partial x^2} = 0, \quad (11)$$

$$0 \leq x \leq (D - U)t,$$

$$B'_2(0, t) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{\partial B'_2}{\partial x} \Big|_{x=(D-U)t} = U + \mu(t). \quad (13)$$

Здесь введена функция  $\mu(t)$ , определяемая условием на границе раздела областей

$$B'_1((D - U)t, t) = B'_2((D - U)t, t). \quad (14)$$

Таким образом, задача может быть рассмотрена отдельно в двух областях с последующим согласованием решений согласно (14).

**Несжатое вещество.** Задачу в этой области удобно рассматривать в системе отсчета, связанной с ударным фронтом. Для этого введем пространственную переменную  $x' = x - (D - U)t$  и определим новую искомую функцию  $B''_1(x', t)$  по формуле

$$B''_1(x', t) = \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 t}{4}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D x'}{2}\right) B'_1(x, t). \quad (15)$$

Тогда задача для несжатого вещества (8)–(10) приобретает вид

$$\frac{\partial B''_1}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial^2 B''_1}{\partial x'^2} = 0, \quad 0 \leq x' < \infty, \quad (16)$$

$$B''_1(x', 0) = 0, \quad (17)$$

$$\left( \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{\partial B''_1}{\partial x'} + \left( U - \frac{D}{2} \right) B''_1 \right) \Big|_{x'=0} =$$

$$= \exp\left(\frac{\mu_0 \sigma_1 D^2 t}{4}\right) \mu(t), \quad (18)$$

а условие согласования с функцией  $B'_2(x, t)$  на ударном фронте есть

$$B'_2(x, t)|_{x=(D-U)t} = \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_1 D^2 t}{4}\right) B''_1(x', t)|_{x'=0}. \quad (19)$$

Решение задачи (16)–(18) может быть получено методом преобразования Лапласа. Технически несложная процедура приводит к формуле

$$B''_1(x', t) = -\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \times \exp\left(\frac{\mu_0\sigma_1 D^2 \tau}{4}\right) \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_1 x'^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau + h \int_0^t \mu(\tau) \exp\left(\frac{\mu_0\sigma_1 D^2 \tau}{4}\right) \exp\left(hx' + \frac{h^2(t-\tau)}{\mu_0\sigma_1}\right) \times \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_1} x'}{2\sqrt{t-\tau}} + h\sqrt{\frac{t-\tau}{\mu_0\sigma_1}}\right) d\tau, \quad (20)$$

где  $h = (D/2 - U)\mu_0\sigma_1$ ,  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ ,  $\operatorname{erf}(x)$  — функция ошибок.

**Сжатое вещество.** Пользуясь методом расширения области [11], решение задачи (11)–(13) ищем в виде

$$B'_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_2 x^2}{4t}\right) \times \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2} x \tau}{2t}\right) \times \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau. \quad (21)$$

Здесь  $f(\tau)$  — неизвестная функция, которую, как обычно, будем находить из условий на ударном фронте.

Формула (13) с учетом (21) принимает вид

$$-\frac{D-U}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_2(D-U)^2 t}{4}\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_0\sigma_2} t^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_2(D-U)^2 t}{4}\right) \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \times \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \tau \times \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau = U + \mu(t), \quad (22)$$

а формула (14) с учетом (15), (20), (21) дает

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_2(D-U)^2 t}{4}\right) \times \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \times \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_2}(D-U)\tau}{2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau = -\frac{\sqrt{\mu_0\sigma_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_1 D^2(t-\tau)}{4}\right) d\tau + h \int_0^t \mu(\tau) \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma_1 D^2(t-\tau)}{4}\right) \times \exp\left(\frac{h^2(t-\tau)}{\mu_0\sigma_1}\right) \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{\frac{t-\tau}{\mu_0\sigma_1}}\right) d\tau. \quad (23)$$

Соотношения (22), (23) есть система уравнений на функции  $f(t)$ ,  $\mu(t)$ . В ее решении существенную роль играет операционное исчисление. Не останавливаясь на ряде технических деталей, укажем, что после применения преобразования Лапласа к (22), (23) и исключения из полученной системы уравнений лапласовского образа функции  $\mu(t)$  и ряда преобразований можно получить достаточно простое уравнение

$$-\frac{U}{D-U} F_1(p) + pF_2(p) + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} F_1(p) \times \\ \times \sqrt{p^2 + \frac{D^2}{(D-U)^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1} = \frac{2U}{D-U} \frac{p}{p^2 - 1}.$$

Здесь использованы следующие обозначения для лапласовских образов:  $F_1(p) = L[f(t) \operatorname{sh} t]$ ,  $F_2(p) = L[f(t) \operatorname{ch} t]$ .

Выполняя обратное преобразование Лапласа над этим соотношением, придем к интегродифференциальному уравнению на функцию  $f(t)$ :

$$\frac{d}{dt}[f(t)(\operatorname{ch} t + \sqrt{s} \operatorname{sh} t)] - \frac{U}{D-U} f(t) \operatorname{sh} t + \\ + \sqrt{s} k \int_0^t f(\tau) \operatorname{sh} \tau \frac{J_1(k(t-\tau))}{t-\tau} d\tau = \frac{2U}{D-U} \operatorname{ch} t. \quad (24)$$

Здесь  $J_1(t)$  — цилиндрическая функция Бесселя первого рода,

$$s = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad k^2 = \frac{D^2}{(D-U)^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1.$$

Отметим, что если  $k$  чисто мнимое, то, обозначая  $k = i\lambda$ , имеем

$$\frac{k J_1(kt)}{t} = -\frac{\lambda I_1(\lambda t)}{t},$$

где  $I_1(t)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Искомое магнитное поле в сжатом веществе  $B_2(x, t)$  есть

$$B_2(x, t) = B_0 + B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{R_2 \varphi^2}{4}\right) \times \\ \times \int_0^\infty f(\sqrt{R_2} \tau) \operatorname{sh}(\sqrt{R_2} \varphi \tau) \exp(-\tau^2) d\tau. \quad (25)$$

Здесь

$$\varphi = \frac{x}{(D-U)t}, \quad R_2 = \mu_0 \sigma_2 (D-U)^2 t.$$

Переменная  $\varphi$  представляет собой безразмерную координату и меняется в сжатой области от 0 до 1. Параметр  $R_2$  является управляющим для решения в этой области и его смысл обсуждается ниже.

Таким образом, задача определения полей свелась к нахождению функции  $f(t)$ .

**Несжатое вещество (продолжение).** Зная функцию  $f(t)$ , можно, в принципе, найти функцию  $\mu(t)$  и тем самым, согласно (20), получить решение краевой задачи для первой области. Более простой способ, однако, другой. Удобно рассмотреть краевую задачу для несжатого вещества, полагая, что значение функции на границе раздела уже определено и соответствует полю  $B_2(x, t)$  на этой границе.

Найдем функцию  $B'_1(x', t)$ , удовлетворяющую краевой задаче (16), (17), (19). Такая задача может быть решена методом преобразования Лапласа. Обозначая  $\tilde{B}_1(x', p) = L[B''_1(x', t)]$ , можно получить

$$\tilde{B}_1(x', p) = \frac{F_3(\sqrt{p + \lambda_2 - \lambda_1})}{\sqrt{p + \lambda_2 - \lambda_1}} \times \\ \times \exp(-\sqrt{\mu_0 \sigma_1} x' \sqrt{p}),$$

где  $F_3(p) = L[f(\sqrt{\lambda_2} t) \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_2} t)]$ ,  $\lambda_1 = \mu_0 \sigma_1 D^2/4$ ,  $\lambda_2 = \mu_0 \sigma_2 (D-U)^2/4$ . Применяя теорему Эфроса, найдем оригинал:

$$B''_1(x', t) = \int_0^\infty f\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2} (D-U)\tau}{2}\right) \times \\ \times \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_2} \tau}{2}\right) g(x', t, \tau) d\tau,$$

где

$$g(x', t, \tau) = \frac{\sqrt{\mu_0 \sigma_1}}{2\pi} x' \int_0^t \frac{\exp((\lambda_1 - \lambda_2)(t-\theta))}{\theta^{3/2} \sqrt{t-\theta}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma_1 x'^2}{4\theta}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4(t-\theta)}\right) d\theta.$$

С учетом (15) и определения функции  $B'_1(x, t)$ , решение для несжатого вещества можно представить в виде

$$B_1(\xi, t) = B_0 + B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{R_2}{4}\right) \times \\ \times \exp(-\sqrt{R_1} \xi) \int_0^\infty f(\sqrt{R_2} \tau) \operatorname{sh}(\sqrt{R_2} \tau) \times \\ \times \exp(-(\tau + \xi)^2) G(\xi, t, \tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$G(\xi, t, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\theta - \frac{\xi\tau}{\theta}\right)^2\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{(R_1 - R_2)\xi^2}{4(\xi^2 + \theta^2)}\right) d\theta. \quad (27)$$

Здесь

$$\xi = (x'/2)\sqrt{\mu_0\sigma_1/t}, \quad R_1 = \mu_0\sigma_1 D^2 t.$$

Формулы (25)–(27) вместе с уравнением на функцию  $f(t)$  (24) дают полное решение поставленной задачи (2)–(7).

#### 4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $R_1 = R_2$

Решение задачи определяется через функцию  $f(t)$ , которая, в свою очередь, является решением интегродифференциального уравнения (24). В общем случае это уравнение решить не удастся, однако для одного частного случая можно указать явный вид функции  $f(t)$ . Пусть  $R_1 = R_2$ , т. е.  $k = 0$  и выполняется следующее условие:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{D}{D-U}\right)^2. \quad (28)$$

В этом случае уравнение (24) принимает вид линейного дифференциального уравнения первого порядка на функцию  $f_0(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ f_0(t) \left( \operatorname{ch} t + \frac{D}{D-U} \operatorname{sh} t \right) \right] - \\ - \frac{U}{D-U} f_0(t) \operatorname{sh} t = \frac{2U}{D-U} \operatorname{ch} t,$$

причем  $f_0(0) = 0$ . Решение этого уравнения есть

$$f_0(t) = \frac{2U}{D-U} \frac{q(t)}{\operatorname{ch} t + (D/(D-U)) \operatorname{sh} t} \times \\ \times \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau}{q(\tau)} d\tau, \quad (29)$$

где

$$q(t) = \exp\left(\frac{Dt}{2D-U}\right) \times \\ \times \left( \operatorname{ch} t + \frac{D}{D-U} \operatorname{sh} t \right)^{-(D-U)/(2D-U)}. \quad (30)$$

Используя функцию  $f_0(t)$ , согласно (25)–(27) можно найти решение для всего полупространства. Отметим, что в случае  $R_1 = R_2$  функция  $G(\xi, t, \tau) = 1$ .

Может показаться, что ценность подобного решения, касающегося одного случая, не слишком велика. Ниже указывается возможность нахождения функции  $f(t)$  для отклонения параметра  $k$  от нулевого значения. Пусть выполняется соотношение вида

$$\sqrt{s} = \frac{D}{D-U} + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — отклонение. Для некоторого  $\varepsilon$  можно записать уравнение для функции

$$f(t) = f_0(t) + \varepsilon f_1(t), \quad (31)$$

где  $f_0(t)$  — функция, полученная выше для частного случая  $k = 0$ ,  $f_1(t)$  — неизвестная функция. Функция  $f_1(t)$  может быть определена. Действительно, подставляя (31) в (24), найдем

$$f_1(t) = -\frac{f_0(t) \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + (D/(D-U)) \operatorname{sh} t} - \\ - \frac{2q(t)}{\operatorname{ch} t + (D/(D-U)) \operatorname{sh} t} \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{q(\tau)} d\tau + \\ + \frac{q(t)}{\operatorname{ch} t + (D/(D-U)) \operatorname{sh} t} \times \\ \times \int_0^t \frac{f_0(\tau) ((D/U) \exp 2\tau - 1)}{q(\tau) (\operatorname{ch} \tau + (D/(D-U)) \operatorname{sh} \tau)} d\tau.$$

Таким образом, можно получить решение задачи в некоторой окрестности точки  $k = 0$ . Практическая эффективность представления функции (31) основана на том, что для физически важных случаев функция  $f_1(t)$  мала.

#### 5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РЕШЕНИЯ

Для того чтобы пояснить смысл полученных решений, обратимся к графическим иллюстрациям. На рис. 2, а показаны распределения магнитного поля в веществе для двух областей. В области невозмущенного вещества (справа)

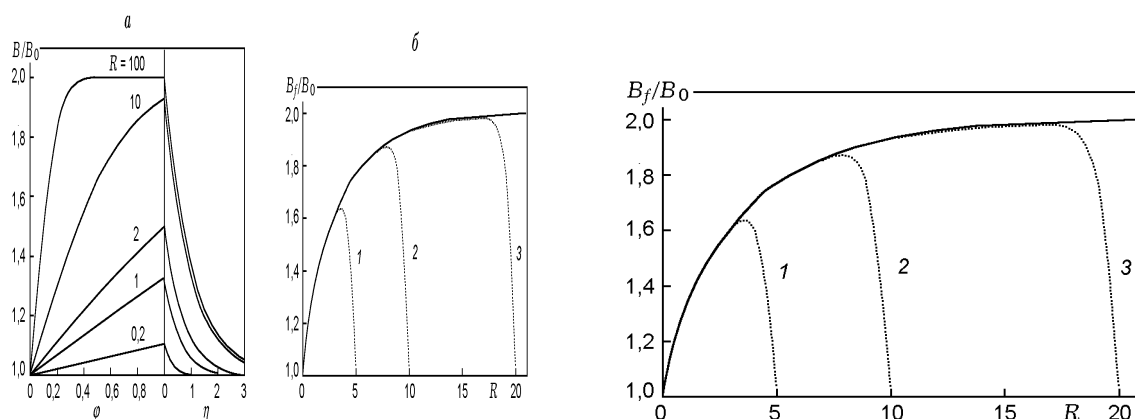


Рис. 2. Магнитное поле при вхождении ударной волны в проводящее полупространство (сплошные кривые — результаты аналитического решения),  $U/D = 0,5$ ,  $s = 4$ ,  $R_1 = R_2 = R$ :  $a$  — магнитное поле в областях сжатого ( $0 \leq \varphi \leq 1$ ) и несжатого ( $\eta \geq 0$ ) вещества; положение фронта ударной волны соответствует  $\varphi = 1$  и  $\eta = 0$ ;  $b$  — зависимость магнитного поля на фронте ударной волны  $B_f$  от параметра  $R$  (сплошная линия); пунктирные кривые — численный расчет для проводника конечной толщины [14];  $Re_m = 5$  (1), 10 (2), 20 (3)

в качестве переменной оси абсцисс использовано  $\eta$ , равное отношению координаты  $x'$  и характерной диффузионной длины  $x_*$  в стационарном случае:  $\eta = x'/x_* = \mu_0 \sigma_1 D x'$ . В области сжатого вещества (слева) в качестве переменной оси абсцисс использовано  $\varphi$ . Значения  $\eta = 0$  (для первой области) и  $\varphi = 1$  (для второй) соответствуют фронту ударной волны. Использование таких переменных позволяет представить поведение магнитного поля в широкой области изменения параметров по мере движения ударной волны. Распределения показаны для случая  $U/D = 0,5$ ,  $s = 4$ , когда  $R_1 = R_2 = R$ , но весьма показательны для понимания характера решения.

Как видно из рис. 2,  $a$ , распределения магнитного поля в двух областях существенно различаются. В несжатом веществе магнитное поле растет по мере приближения к ударному фронту. В сжатом веществе магнитное поле падает, достигая значения внешнего поля на поверхности проводника. На фронте ударной волны магнитное поле максимально. Плотность тока в веществе определяется из дифференциального уравнения Ампера.

Вхождение ударной волны (малые времена, малые значения  $R$ ) порождает систему из двух токов. Один из них локализован перед фронтом ударной волны в несжатом веществе. Равный ему по величине, но противоположно направленный ток протекает в сжатом веществе. Абсолютная величина тока растет от нуля (момент вхождения ударной волны в веще-

ство) до максимального значения. Таким образом, полученная картина качественно соответствует выводам [14].

На рис. 2,  $b$  показана зависимость магнитного поля на фронте ударной волны  $B_f$  от параметра  $R$  (сплошная кривая). По мере движения волны по веществу магнитное поле на фронте волны растет, стремясь к предельному значению (1). Здесь же приведены результаты численных расчетов для проводника конечной толщины, выполненные по методике [14] (пунктирные кривые). Они соответствуют разным значениям магнитного числа Рейнольдса проводника  $Re_m = \mu_0 \sigma_1 D x_0$  ( $x_0$  — начальная толщина проводника). Магнитное поле на фронте ударной волны  $B_f$  в проводнике конечной толщины сначала растет, далее при приближении фронта к второй границе проводника магнитное поле  $B_f$  стремится к значению внешнего поля  $B_0$ . Сравнение зависимостей, полученных аналитически (настоящая работа) и численно [14], показывает их хорошее совпадение до момента, когда расстояние между ударным фронтом и второй границей проводника становится сравнимым с толщиной токовой зоны  $x_*$ . Совпадение решений, полученных разными методами, подтверждает корректность выполненного анализа. Важность полученного аналитического решения состоит также в выявлении определяющих параметров задачи об ударном сжатии проводника в магнитном поле, что было невозможно при численном счете.



Найденное решение определяется безразмерными параметрами

$$\xi = \frac{x'}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_1}{t}}, \quad \varphi = \frac{x}{(D-U)t},$$

$$R_1 = \mu_0 \sigma_1 D^2 t, \quad R_2 = \mu_0 \sigma_2 (D-U)^2 t.$$

Параметр  $\xi$  представляет собой безразмерную координату и возникает в классических задачах магнитной диффузии [1]. Безразмерная координата  $\varphi$  удобна для описания процессов в ударных волнах. Управляющие параметры  $R_1$  и  $R_2$  отражают специфику электродинамических задач с ударными волнами. Их происхождение становится ясным, если записать уравнения диффузии (2) и (3) в системе отсчета, связанной с ударным фронтом:

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} = 0, \quad (32)$$

где  $i = 1, 2$  и  $u_1 = D$ ,  $u_2 = D - U$ . Второе слагаемое в этом уравнении отражает конвекцию магнитного поля через ударный фронт, третье слагаемое представляет собой обычный диффузионный член. Относительное влияние конвекции и диффузии дано отношением коэффициентов при соответствующих членах. Переходя в уравнении (32) от величин к их порядкам, можно получить отношение коэффициентов в виде  $R_i = \mu_0 \sigma_i u_i \Delta x_i$  ( $\Delta x_i$  — изменение размера  $i$ -й области). Для области несжатого вещества  $\Delta x_1 = Dt$  и  $R_1 = \mu_0 \sigma_1 D^2 t$ , для области сжатого вещества  $\Delta x_2 = (D - U)t$  и  $R_2 = \mu_0 \sigma_2 (D - U)^2 t$ . Таким образом, параметры  $R_1$  и  $R_2$  представляют собой количественное выражение относительного влияния конвекции и диффузии для соответствующих областей.

Обратимся к параметру  $R_1$ . На толщине токового слоя  $x_*$  параметр  $R_1 \approx 1$ . Это означает, что диффузия поля в невозмущенном веществе существенна лишь на расстоянии  $x_*$  от ударного фронта. Хотя распределение поля в первой области при малых временах зависит от второй области, можно показать, что при  $R_1 \ll 1$  распределение поля в несжатом веществе нестационарно (в системе отсчета ударного фронта) и является стационарным при  $R_1 \gg 1$ . Условие  $R_1 \approx 1$  определяет по порядку величины время  $t_*^1 = 1/\mu_0 \sigma_1 D^2$ , в течение которого устанавливается равновесное распределение магнитного поля в несжатом веществе. Это время можно представить в виде

$t_*^1 \approx x_*/D$ . Таким образом, время  $t_*^1$  соответствует прохождению ударной волной расстояния, равного толщине токового слоя  $x_*$  стационарной задачи.

Особенно нагляден смысл параметра  $R_2$ , возникшего ранее в задаче о растущей проводящей области при переходе диэлектрик — металл [11]. Его можно представить в виде отношения времени диффузии и конвекции для растущего слоя. Замечательно, что теперь параметр  $R_2$  определяет решение задачи об ударном сжатии металла, что указывает на его общее значение. В отличие от  $R_1$ , параметр  $R_2$  в настоящей задаче имеет вполне самостоятельное значение, существенно влияя на поле в первой области. Если  $R_2 \ll 1$ , то преобладающим механизмом изменения магнитного поля в сжатом веществе является диффузия. В этом случае магнитное поле меняется линейно по координате (см. рис. 2, а), электрическое поле однородно, плотность тока постоянна по сжатому веществу. При  $R_2 \gg 1$  преобладает конвекция, влияние диффузии ограничено узкой областью вблизи свободной поверхности. Таким образом, управляющие параметры  $R_1$  и  $R_2$  имеют общий характер и определяют решение класса задач с движением волновых фронтов проводимости в магнитном поле.

Если  $R_1 = R_2 = R$ , то обе области вещества описываются единым управляющим параметром  $R$ . В этом случае задача во всем полупространстве определяется одним уравнением вида (32), причем  $k = 0$  и имеет место соотношение (28) между скоростью и перестройкой электропроводности. Таким образом, частный случай  $R_1 = R_2$ , для которого в предыдущем пункте было получено простое решение, имеет определенный физический смысл.

Замечательным является сама форма полученного решения (25). Она отличается от найденного в [11, 12] лишь видом подынтегральной функции  $f(t)$ . В задаче [11] с постоянным током имелась одна проводящая область и функция  $f(t)$  определялась максимально просто, зависев лишь от параметра  $R_2$ . Для более сложной задачи с двумя областями [12] (проводник и нарастающий проводящий слой) функция  $f(t)$  определялась рекуррентно. Универсальность представления разных электродинамических задач в форме (25) указывает на эффективность и физическую наглядность настоящего метода решения.

## 6. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

Для понимания физического смысла задачи и практических целей представляют интерес асимптотики найденного решения. Для их нахождения нет необходимости решать уравнение (24). Можно показать, что функция  $f(t)$ , являющаяся решением (24), обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{U}{D - U},$$

$$f(t) = \frac{2U}{D - U}t + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Используя эти соотношения, можно получить наглядные асимптотики магнитного поля в проводнике.

При  $R_1 \rightarrow 0$ ,  $R_2 \rightarrow 0$  поле в несжатом веществе

$$B_1(x', t) \approx B_0 \left[ 1 + \frac{U}{D - U} R_2 \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x'}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_1}{t}} \right) \right) \right], \quad (33)$$

поле в сжатом веществе

$$B_2(x, t) \approx B_0(1 + \mu_0 \sigma_2 U x). \quad (34)$$

При  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 \rightarrow \infty$  поле в несжатом веществе

$$B_1(x', t) \approx B_0 \left( 1 + \frac{U}{D - U} \exp(-\mu_0 \sigma_1 D x') \right), \quad (35)$$

поле в сжатом веществе

$$B_2(x, t) \approx B_0 \left( 1 + \frac{U}{D - U} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_2}{t}} \right) \right). \quad (36)$$

Из приведенных асимптотик ясно, что при малых временах ( $R_1 \rightarrow 0$ ,  $R_2 \rightarrow 0$ ) решение в первой области определяется функцией ошибок от классической переменной  $(x'/2)\sqrt{\mu_0 \sigma_1/t}$ , во второй области магнитное поле линейно по координате, так что плотность тока однородна по сечению.

Для больших времен ( $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 \rightarrow \infty$ ) магнитное поле в несжатом веществе падает от фронта волны экспоненциально (35). Распределение магнитного поля в сжатом веществе (36) представляет собой классическую зависимость диффузии поля в проводящее полупространство [1]. При этом ток сосредоточен в

узкой зоне, примыкающей к поверхности. Замечательно, что асимптотики (35) и (36) совпадают с найденными в [14] формулами для случая безграничного проводника.

Особо выделим поведение магнитного поля на фронте ударной волны. Из (34) следует, что при малых временах поле на фронте равно

$$B_f(t) \approx B_0(1 + \mu_0 \sigma_2 (D - U) U t),$$

т. е. растет линейно со временем. Тот же результат получается из (33). Используя последнюю формулу, можно оценить время роста поля на фронте  $t_*$  от  $B_0$  до предельного значения (1). Из условия  $B_f(t_*) \approx B_{f, \max}$  получаем  $t_* \approx 1/\mu_0 \sigma_2 (D - U)^2$ . Хотя эта оценка основывается на начальной фазе процесса и потому явно занижена, она дает правильное представление о зависимости времени  $t_*$  от входящих в задачу величин. Принципиально, что время роста поля на ударном фронте  $t_*$  зависит от электропроводности вещества в сжатом состоянии  $\sigma_2$ . Для плохо проводящих веществ время  $t_*$  очень велико.

Как видно из рис. 2, б, магнитное поле на фронте ударной волны растет при увеличении параметра  $R$  (в том числе по мере движения ударной волны). Эта зависимость получена для частного случая, вместе с тем она достаточно показательна. Увеличению поля до максимума соответствует значение  $R \approx 10$ . Время, соответствующее этому условию, есть  $t_* \approx 10/\mu_0 \sigma_2 (D - U)^2$ , что на порядок отличается от оценки, полученной из асимптотики. Отметим, что в характерных ударно-волновых условиях ( $D \approx 5$  км/с) для меди  $t_* \approx 7$  нс, для нихрома  $t_* \approx 600$  нс. Время  $t_*$  определяет границу малых и больших электромагнитных времен. При  $t \ll t_*$  (малые времена) магнитное поле на фронте волны существенно отличается от своего предельного значения (1). В этом случае условия непрерывности электрического поля и сохранения магнитного потока в проводнике не равносильны и подход [15] не состоятелен. При  $t \gg t_*$  (большие времена) поле на фронте соответствует (1) и выводы [15] сводятся к предельному случаю, рассмотренному ранее в [14].

Таким образом, асимптотики задачи согласуются как с априорными представлениями, так и с известными частными случаями, что придает большую наглядность полученному решению. Приведенная оценка времени роста магнитного поля на ударном фронте по-

зволяет уточнить понятия малого и большого электромагнитных времен в данной задаче.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана ошибочность решения задачи об электромагнитном поле в ударно-сжимаемом проводнике, данного в статье [15]. Приведена корректная физическая постановка и дано правильное решение этой задачи. Найдены параметры и характерные времена, определяющие структуру токовых волн в металле. Эти результаты имеют общее значение для класса электродинамических задач с ударными волнами. Проверка сформулированной электромагнитной модели и ее использование для диагностики ударно-волновых процессов являются предметом следующей публикации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 99-02-16807).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
2. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // Успехи физических наук. 1965. Т. 85, вып. 2. С. 197–258.
3. Физика высоких плотностей энергий / Под ред. П. Калдирола, Г. Кнопфеля. М.: Мир, 1974.
4. Бюргерс Ж. М. Проникание ударной волны в магнитное поле // Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума). М.: Атомиздат, 1958.
5. Забабахин Е. И., Нечаев М. Н. Ударные волны поля и их кумуляция // Журн. эксперим. и теор. физики. 1957. Т. 33, вып. 2 (8). С. 442–450.
6. Бай Ши-И. Магнитная газодинамика и физика плазмы. М.: Мир, 1964.
7. Макаров Ю. В., Чекалин Э. К. Физические процессы в электромагнитных ударных трубах. М.: Атомиздат, 1968.
8. Бут Д. А. Вход ударной волны со скачком проводимости в поперечное магнитное поле // Магнитная гидродинамика. 1970. № 4. С. 3–10.
9. Фритц Ж. Н., Морган Ж. А. Электромагнитный метод измерения скорости частиц вещества // Приборы для научных исследований. 1973. № 2. С. 119–125.
10. Жугин Ю. Н., Крупников К. К. Индукционный метод регистрации скорости конденсированной среды в ударно-волновых процессах // ПМТФ. 1983. № 1. С. 102–108.
11. Гилев С. Д., Михайлова Т. Ю. Токовая волна при ударном сжатии вещества в магнитном поле // Журн. техн. физики. 1996. Т. 66, вып. 5. С. 1–9.
12. Гилев С. Д., Михайлова Т. Ю. Электромагнитные процессы в системе проводников, формируемой ударной волной // Журн. техн. физики. 1996. Т. 66, вып. 10. С. 109–117.
13. Гилев С. Д. Ударно-индуцированные волны проводимости в металлических образцах // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 4. С. 109–116.
14. Гилев С. Д. Ударно-индуцированные волны проводимости в проводнике, помещенном во внешнее магнитное поле // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32, № 6. С. 116–122.
15. Биченков Е. И. Электромагнитное поле и токовые волны, генерируемые при входе ударной волны в проводящий образец с поперечным магнитным полем // ПМТФ. 1997. Т. 34, № 2. С. 19–25.
16. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
17. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
19. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1985.
20. Любов Б. Я. Решение нестационарной одномерной задачи теплопроводности для области с равномерно движущейся границей // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 6. С. 551–554.
21. Карташов Э. М., Бартенев Г. М. Метод интегральных уравнений в аналитической теории теплопроводности при построении функций Грина краевых задач обобщенного типа // Изв. вузов. Физика. 1969. № 3 (82). С. 20–27.

Поступила в редакцию 28/X 1999 г.