

УДК 519.632.6+519.624.2+519.642

## Прецессия при параметрических колебаниях маятника на кардановом подвесе

В.И. Тараканов, С.А. Лысенкова, М.В. Нестеренко

Сургутский государственный университет, пр. Ленина, 1, г. Сургут, Тюменская обл., ХМАО-Югра, 628400  
E-mails: sprtdv@mail.ru (Тараканов В.И.), lsa1108@mail.ru (Лысенкова С.А.), chernaya@gmail.com (Нестеренко М.В.)

**Тараканов В.И., Лысенкова С.А., Нестеренко М.В.** Прецессия при параметрических колебаниях маятника на кардановом подвесе // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 393–404.

Рассматривается возможность прецессии маятника в кардановом подвесе в условиях колебания точки подвеса за счет внешней периодической силы. Исследование проведено аналитически и на основе численных расчетов параметров прецессии в зависимости от геометрических характеристик маятника и частоты внешнего воздействия.

**Ключевые слова:** оператор, спектр, итерационный алгоритм, параметрические колебания, устойчивость.

**Tarakanov V.I., Lysenkova S.A., Nesterenko M.V.** The precession of a parametric oscillation pendulum with the Cardano suspension // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 393–404.

The probability of the precession of a pendulum with the Cardano suspension in conditions of an oscillation point of suspension based on the mathematical proof is investigated.

**Key words:** operator, spectrum, iterative algorithm, parametric oscillation, stability.

---

### 1. Введение

На основе математического доказательства рассматривается возможность появления прецессии плоскости колебаний маятника в кардановом подвесе при принудительных колебаниях точки подвеса за счет внешней периодической силы и даются численные расчеты параметров прецессии.

При этом маятник совершает вынужденные колебания в вертикальном направлении и может совершать колебания относительно точки подвеса в любой плоскости, проходящей через вертикальную ось, а плоскость колебаний может свободно поворачиваться, совершая прецессионное движение.

Теория колебаний маятника при вертикальных вынужденных колебаниях точки подвеса и колебаниях маятника в одной плоскости рассматривались во многих работах [1–6] как экспериментально, так и теоретически, при этом был установлен интересный эффект стабилизации маятника в перевернутом положении, когда центр тяжести маятника был выше точки подвеса [1, 6]. Этот эффект в ряде работ [2–4] обобщался на исследование устойчивости некоторых технических систем с вибрирующим основанием.

Следует отметить, что В. Фроудом [7, с. 249] были экспериментально исследованы колебания маятника, когда точка подвеса не совершала вертикальных колебаний, но фиксировалась на вертикальном вращающемся под действием внешнего момента валу. Исследования маятника Фруда проводилось и в более поздние времена [8, 9].

Обширный материал по исследованию различных видов маятников и маятниковых систем приведен в работе [6].

Однако, судя по цитируемой литературе, схема появления прецессионного движения плоскости колебаний маятника в постановке настоящей статьи рассматривается впервые.

Интерес представляет не только сам механический эффект, но и его математическое обоснование, а также метод численного нахождения параметров прецессии. Дело в том, что уравнения параметрических колебаний маятника в проекции на оси координат, ортогональных вертикальной оси, при кардановом подвесе разбиваются на два одинаковых уравнения, казалось бы, не зависящих друг от друга. Поэтому, на первый взгляд, достаточно исследовать устойчивость или неустойчивость одного из этих двух уравнений. Однако, на самом деле, эти два уравнения можно свести к системе двух новых связанных между собой уравнений.

При этом математическая проблема состоит в решении вопроса о существовании нетривиального решения этой системы, а вычислительная проблема состоит в нахождении способа расчета параметров, при которых возможно существование этого нетривиального решения.

## 2. Математическая постановка задачи

Исходная система уравнений получается в следующих предположениях.

- Угол отклонения маятника относительно вертикальной оси  $z$  мал и синус этого угла можно заменить на величину этого угла.
- Угол  $\theta$  между плоскостью колебаний и осью координат  $x$  является функцией времени  $t$ .
- Маятник представляет собой невесомый стержень длиной  $l$ , имеющий на конце сосредоточенную массу  $m$ .
- Периодическое внешнее воздействие на вертикальной оси имеет гармонический характер с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\delta$ , и поэтому смещение  $W$  точки подвеса в вертикальном направлении задается соотношением  $W = -\delta \cos \omega t$ .

Используя закон сохранения момента количества движения маятника относительно точки подвеса, можно получить уравнение колебаний маятника, спроектированных на оси  $x, y$  в виде двух одинаковых уравнений:

$$I\varphi_{x,tt} + ml(g + \delta\omega^2 \cos \omega t)\varphi_x = 0, \quad (1)$$

$$I\varphi_{y,tt} + ml(g + \delta\omega^2 \cos \omega t)\varphi_y = 0, \quad (2)$$

где  $\varphi_x, \varphi_y$  — проекции угла отклонения маятника относительно вертикальной оси на оси  $x, y$ ;  $I$  — момент инерции маятника относительно точки подвеса;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Переходя в этих уравнениях к безразмерному времени  $\tau = \omega t/2$  и безразмерным параметрам  $a, q$ :

$$a = \frac{4}{\omega^2} \frac{mgl}{I}, \quad q = 4\delta \frac{ml}{I}, \quad (3)$$

уравнения (1), (2) можно переписать в безразмерном виде:

$$\varphi_{x,\tau\tau} + (a + q \cos 2\tau)\varphi_x = 0, \quad (4)$$

$$\varphi_{y,\tau\tau} + (a + q \cos 2\tau)\varphi_y = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) одинаковы и не зависят друг от друга, поэтому исследовать можно любое из них:

$$u_{,\tau\tau} + (a + q \cos 2\tau)u = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется уравнением Матье, известны свойства этого уравнения и зоны устойчивости и неустойчивости его решения в плоскости  $a, q$ .

В полуплоскости  $a > 0, -\infty < q < \infty$  зоны устойчивости и неустойчивости, чередуясь друг с другом, занимают всю полуплоскость. Кривые, которые отделяют зоны устойчивости и неустойчивости, известны как диаграммы Айнса–Стретта и приводятся в различных учебниках и монографиях [5, 10] с разной степенью подробности. Эти кривые симметричны относительно оси  $q = 0$ , точки  $q = 0, a = n^2, n = 1, 2, 3, \dots$ , являются точками самопересечения этих кривых.

В зонах неустойчивости колебания в направлениях осей  $x, y$  неограниченно растут, а в зонах устойчивости эти колебания отсутствуют, так как малые возмущения затухают со скоростью экспоненты от времени.

Более подробно теория этих уравнений и алгоритм нахождения зависимости  $q = q(a)$  на границе между зонами устойчивости и неустойчивости изложен в [13].

Представим функции  $\varphi_x(\tau), \varphi_y(\tau)$  в виде:

$$\varphi_x = R_1(\tau) \cos \alpha\tau + R_2(\tau) \sin \alpha\tau, \quad (7)$$

$$\varphi_y = R_1(\tau) \sin \alpha\tau - R_2(\tau) \cos \alpha\tau, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — постоянная составляющая скорости прецессии маятника.

Вводя обозначения  $\eta = q/\lambda, \psi(\tau) = 1 + \eta \cos 2\tau, \lambda = a - \alpha^2$  и подставляя (7), (8) в соотношения (4), (5), получим

$$R_{1,\tau\tau} \cos \alpha\tau - 2\alpha R_{1,\tau} \sin \alpha\tau + \lambda\psi(\tau)R_1 \cos \alpha\tau + R_{2,\tau\tau} \sin \alpha\tau + 2\alpha R_{2,\tau} \cos \alpha\tau + \lambda\psi(\tau)R_2 \sin \alpha\tau = 0, \quad (9)$$

$$R_{1,\tau\tau} \sin \alpha\tau + 2\alpha R_{1,\tau} \cos \alpha\tau + \lambda\psi(\tau)R_1 \sin \alpha\tau - R_{2,\tau\tau} \cos \alpha\tau + 2\alpha R_{2,\tau} \sin \alpha\tau - \lambda\psi(\tau)R_2 \cos \alpha\tau = 0. \quad (10)$$

Умножая (9) на  $\cos \alpha\tau$ , (10) на  $\sin \alpha\tau$  и складывая, а потом умножая (9) на  $\sin \alpha\tau$ , (10) на  $\cos \alpha\tau$  и вычитая, получим

$$R_{1,\tau\tau} + 2\alpha R_{2,\tau} + \lambda\psi(\tau)R_1 = 0, \quad (11)$$

$$R_{2,\tau\tau} - 2\alpha R_{1,\tau} + \lambda\psi(\tau)R_2 = 0. \quad (12)$$

Нетривиальное решение уравнений (11), (12) будем искать в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых  $\pi$ -периодических функций, что приводит к следующим краевым условиям:

$$R_1(0) = R_1(\pi), \quad R_2(0) = R_2(\pi), \quad R_{1,\tau}(0) = R_{1,\tau}(\pi), \quad R_{2,\tau}(0) = R_{2,\tau}(\pi). \quad (13)$$

Система уравнений (11), (12) отличается от системы (4), (5) тем, что она содержит дополнительный параметр  $\alpha$  и уравнения (11), (12) взаимно связаны.

Возникает вопрос, действительно ли система (11), (12) является более общей, чем система (4), (5), или система (11), (12) бессодержательная, если она превращается в тождество  $0 = 0$ .

Ответить на этот вопрос можно, если можно ответить на вопрос: существует ли нетривиальное решение системы (11)–(13) при  $\alpha \neq 0$ . Именно этот вопрос и является основным вопросом математического характера, который эквивалентен вопросу: существует или нет прецессия маятника на кардановом подвесе.

Проблемой вычислительного характера является проблема расчета параметра  $\lambda$  как функции от параметров  $\alpha, \eta$ .

Если нетривиальное решение задачи (11)–(13) существует, то на основании (7), (8) решение уравнений (4), (5) представляется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \cos(\alpha\tau - \beta(\tau)), & \varphi_y &= \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \sin(\alpha\tau - \beta(\tau)), \\ \cos \beta(\tau) &= \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}, & \sin \beta(\tau) &= \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha$  — постоянная составляющая скорости прецессии,  $\frac{d}{d\tau}\beta(\tau)$  — переменная составляющая скорости прецессии. Относительно свойств вектор-столбца  $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$  можно доказать следующее.

**Утверждение 1.** Компоненты  $R_1$  и  $R_2$  линейно независимы.

**Доказательство.** Действительно, если предположить противное, т. е. что выполняется

$$R_1 = \gamma R_2, \quad R_1^2 + R_2^2 \neq 0, \quad (15)$$

то, подставляя (15) в (12) и (11), можно получить

$$R_{2,tt} + \lambda\psi(t)R_2 - 2\alpha\gamma R_{2,t} = 0, \quad (16)$$

$$R_{2,tt} + \lambda\psi(t)R_2 + 2\alpha\frac{1}{\gamma}R_{2,t} = 0. \quad (17)$$

Вычитая (16) из (17), получим  $\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right)\alpha R_{2,t} = 0$ . Так как  $\frac{1}{\gamma} + \gamma \neq 0$  и  $\alpha \neq 0$ , то  $R_{2,t} = 0$ , а на основании (15)  $R_{1,t} = 0$ . Отсюда следует  $R_{1,tt} = 0, R_{2,tt} = 0$ . Но тогда из (11), (12) следует  $R_1 = 0, R_2 = 0$ , а это противоречит (15).  $\square$

**Утверждение 2.** Если компоненты вектор-столбца  $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$  удовлетворяют системе (11), (12) при  $\alpha \neq 0$ , то и компоненты  $\begin{pmatrix} R_2 \\ -R_1 \end{pmatrix}$  также удовлетворяют системе (11), (12).

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственной подстановкой.

**Утверждение 3.** Каждому значению спектрального параметра задачи (11)–(13) соответствуют два собственных ортогональных элемента.

Доказательство следует из утверждения 2.

**Утверждение 4.** Для зон неустойчивости диаграммы Айнса–Стретта в плоскости  $a, q$  ( $q = \eta a$ ) решение спектральной задачи (11)–(13) не существует.

**Доказательство.** Доказательство следует из соотношения (14), которое можно записать в виде

$$R_1^2 + R_2^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2. \quad (18)$$

Так как в зоне неустойчивости справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \infty,$$

то тогда выполняется

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_1^2 + R_2^2 = \infty,$$

но это противоречит условию (13). □

### 3. Операторная форма спектральной задачи

Для доказательства существования решения спектральной задачи (11)–(13) и для получения алгоритма нахождения спектрального параметра  $\lambda$  задаче (11)–(13) в дифференциальной форме сопоставляется эквивалентная задача в операторной форме с компактным частично симметричным оператором в гильбертовом пространстве  $H$ , элементами которого являются двухкомпонентные вектор-столбцы

$$H = \left\{ u \mid u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_1, u_2 \in L_2(0, \pi) \right\}$$

со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_0^\pi (u_1 v_1 + u_2 v_2) d\tau, \quad \|u\|^2 = (u, u).$$

Кроме того, вводятся множества  $P, E : P \subset E \subset H$  такие, что

$$\begin{aligned} E &= \left\{ u \mid u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_k \in L_2(0, \pi), \quad \int_0^\pi u_k d\tau = 0, \quad k = 1, 2 \right\}, \\ P &= \left\{ u \mid u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_k \in C_1(0, \pi), \quad \int_0^\pi u_k d\tau = 0, \right. \\ &\quad \left. u_k(0) = u_k(\pi), \quad u_{k,\tau}(0) = u_{k,\tau}(\pi), \quad k = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

В гильбертовом пространстве  $H$  рассматривается спектральное уравнение относительно спектрального параметра  $\lambda$ :

$$u = Gu + \lambda Au, \quad u \in H. \quad (19)$$

Оператор  $A$  задается следующим образом:

$$Au = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 & 0 \\ 0 & A_{11}u_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$A_{11}u_k = \int_0^\tau f(\tau_1)u_k(\tau_1) d\tau_1 - f(\tau) \int_0^\tau u_k(\tau_1) d\tau_1 + h_1 - \frac{f(\tau)}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau)u_k(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$$f(\tau) = \int_0^\tau [1 + \eta \cos 2\tau] d\tau. \quad (22)$$

Функционал  $h_1 = h_1(u_k)$  находится из условия

$$\int_0^\pi A_{11}u_k d\tau = 0, \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Оператор  $G$  задается следующим образом:

$$Gu = \alpha \begin{pmatrix} 0 & G_{12}u_2 \\ -G_{12}u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$G_{12}u_k = \int_0^\tau u_k(\tau_1) d\tau_1 + h_2(u_k), \quad k = 1, 2. \quad (25)$$

Функционал  $h_2(u_k)$  находится из условия

$$\int_0^\pi G_{12}u_k d\tau = 0, \quad k = 1, 2. \quad (26)$$

Свойства операторов  $A$ ,  $G$  и спектрального уравнения (19) описываются следующими утверждениями.

**Утверждение 5.** Операторы  $A$ ,  $G$  являются компактными в  $H$ .

**Утверждение 6.** Операторы  $A$ ,  $G$  отображают  $H \rightarrow P$ ,  $C(0, \pi) \rightarrow P$  соответственно.

**Утверждение 7.** Справедливы соотношения:

$$\int_0^\pi Au d\tau = 0, \quad \int_0^\pi Gu d\tau = 0 \quad \forall u \in E, \quad (27)$$

$$Au|_{\tau=0} = Au|_{\tau=\pi}, \quad Gu|_{\tau=0} = Gu|_{\tau=\pi}. \quad (28)$$

**Утверждение 8.** Операторы  $A$ ,  $G$  частично симметричны в  $H$ :

$$(u, Av) = (v, Au), \quad (u, Gv) = (v, Gu) \quad \forall u, v \in P \subset H. \quad (29)$$

**Утверждение 9.** Ядерное пространство  $A$  пустое:

$$\text{Ker}A = 0. \quad (30)$$

**Утверждение 10.** Справедливо неравенство

$$\|G\| < 1, \quad 0 \leq \alpha < 2. \quad (31)$$

**Утверждение 11.** Оператор  $A$  положительный при условии  $0 \leq \eta < 1$ :

$$(u, Au) \geq 0 \quad \forall u \in E. \quad (32)$$

**Утверждение 12.** Спектральное уравнение (19) эквивалентно спектральной задаче (11)–(13), если положить

$$\begin{aligned} R_1(\tau) &= \int_0^\tau u_1(\tau_1) d\tau_1 - \frac{1}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau_1)u_1(\tau_1) d\tau_1, \\ R_2(\tau) &= \int_0^\tau u_2(\tau_1) d\tau_1 - \frac{1}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau_1)u_2(\tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (33)$$

Доказательство утверждений (5)–(9) для оператора  $A$  сводится к доказательству таких же утверждений для оператора  $A_{11}$  (21), а оно, в свою очередь, аналогично доказательству этих утверждений для оператора  $B$ , приведенному в [11]. Поэтому для оператора  $A$  доказательство утверждений (5)–(9) опускается.

Доказательство утверждений (5)–(8) для оператора  $G$  сводится к следующему:

- доказательство утверждения (5) для оператора  $G$  сводится к доказательству этого утверждения для оператора  $G_{12}$ , где при доказательстве используется критерий компактности Ф. Рисса в  $L_2(0, \pi)$  [12];
- свойство (6) для оператора  $G$  доказывается на основе использования отображения оператора  $G_{12} : C(0, \pi) \rightarrow C_1(0, \pi)$ , выполнения условия (26), а также условия  $[G_{12}u]_{,\tau} |_{\tau=0} = [G_{12}u]_{,\tau} |_{\tau=\pi}$ , если  $u \in P$ ;
- свойство (7) для оператора  $G$  проверяется непосредственно, если  $u \in P$ ;
- свойство (8) доказывается следующим образом: при условии  $u, v \in P$  и интегрировании по частям, получается

$$\begin{aligned} (u, Gv) &= \int_0^\pi [u_1 G_{12} v_2 - u_2 G_{12} v_1] d\tau \\ &= \left( \int_0^\tau u_1(\tau_1) d\tau_1 \right) G_{12} v_2 \Big|_0^\pi - \left( \int_0^\tau u_2(\tau_1) d\tau_1 \right) G_{12} v_1 \Big|_0^\pi - \\ &\quad \int_0^\pi \left( \int_0^\tau u_1(\tau_1) d\tau_1 \right) v_2 d\tau + \int_0^\pi \left( \int_0^\tau u_2(\tau_1) d\tau_1 \right) v_1 d\tau \\ &\equiv \int_0^\pi v_1 \left[ \int_0^\tau u_2(\tau_1) d\tau_1 + h_2(u_2) \right] d\tau - \int_0^\pi v_2 \left[ \int_0^\tau u_1(\tau_1) d\tau_1 + h_2(u_1) \right] d\tau \\ &= (v, Gu) \quad \forall u, v \in P; \end{aligned}$$

- для доказательства утверждения (10) рассмотрим спектральное уравнение относительно спектрального параметра  $\mu$ :

$$\frac{1}{\mu} u = Gu, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u \in P. \quad (34)$$

Продифференцировав (34) по времени и расписав покомпонентно, получим

$$\frac{1}{\mu} u_{1,\tau} = \alpha u_2, \quad \frac{1}{\mu} u_{2,\tau} = -\alpha u_1. \quad (35)$$

Продифференцировав (35) еще раз по времени и исключив производные  $u_{1,\tau}$ ,  $u_{2,\tau}$  с помощью соотношения (35), получим

$$u_{k,\tau\tau} + \alpha^2 \mu^2 u_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Эти соотношения можно переписать в виде одного уравнения

$$u_{,\tau\tau} + \alpha^2 \mu^2 u = 0, \quad 0 < \tau < \pi, \quad u \in P. \quad (36)$$

Общее решение (36) имеет вид

$$u = e_1 \sin \alpha \mu \tau + e_2 \cos \alpha \mu \tau. \quad (37)$$

Уравнение (36) должно решаться при краевых условиях:

$$u(0) = u(\pi), \quad \int_0^\pi u d\tau = 0. \quad (38)$$

Из (37), (38) находится выражение для спектрального параметра  $1/\mu$ , при этом самое большое значение  $1/\mu_1$  из (37), (38) будет

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\alpha}{2}. \quad (39)$$

Так как  $1/\mu_1$  самое большое собственное число, то для него справедливо экстремальное свойство компактных частично симметричных операторов [13]:

$$\frac{1}{\mu_1} = \max_{u \in P} \frac{|(u, Gu)|}{\|u\|^2} = \max_{u \in P} \frac{\|Gu\|}{\|u\|}. \quad (40)$$

Подставив (39) в (40), можно записать

$$\|u\|^2 - \|Gu\|^2 \geq \|u\|^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) > 0, \quad 0 \leq \alpha < 2 \quad \forall u \in P.$$

Таким образом, при  $0 \leq \alpha < 2$  оператор  $I - G$  положителен;

- для доказательства утверждения (11) достаточно доказать положительность оператора  $A_{11}$ :

$$(u, A_{11}u) = \int_0^\pi u \left[ \int_0^\tau f(\tau_1)u(\tau_1) d\tau_1 - f(\tau) \int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 + h_1(u) - \frac{f(\tau)}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau_1)u(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau \quad \forall u \in E. \quad (41)$$

Так как  $u \in E$ , то  $\int_0^\pi u d\tau = 0$ , учитывая (22) и интегрируя по частям выражение в правой части (41), получим

$$\begin{aligned} (u, A_{11}u) &= \int_0^\pi \left( \int_0^\tau u d\tau_1 \right) (1 + \eta \cos 2\tau) \left[ \int_0^\tau u d\tau_1 - \frac{1}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau_1)u(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau \\ &= \int_0^\pi (1 + \eta \cos 2\tau) \left( \int_0^\tau u d\tau_1 \right)^2 d\tau - \frac{1}{f(\pi)} \left( \int_0^\pi f(\tau_1)u(\tau_1) d\tau_1 \right) \int_0^\pi f_{,\tau}(\tau) \left( \int_0^\tau u d\tau_1 \right) d\tau \\ &= \int_0^\pi (1 + \eta \cos 2\tau) \left( \int_0^\tau u d\tau_1 \right)^2 d\tau + \frac{1}{f(\pi)} \left( \int_0^\pi f(\tau_1)u(\tau_1) d\tau_1 \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если  $|\eta| < 1$ , то  $(u, A_{11}u) > 0$ ;

- для доказательства утверждения (12) достаточно спектральное уравнение (19) продифференцировать по времени дважды и расписать покомпонентно:

$$\begin{aligned} u_{1,\tau} &= \alpha u_2 - \lambda(1 + \eta \cos 2\tau) \left[ \int_0^\tau u_1(\tau_1) d\tau_1 - \frac{1}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau_1)u_1(\tau_1) d\tau_1 \right], \\ u_{2,\tau} &= -\alpha u_1 - \lambda(1 + \eta \cos 2\tau) \left[ \int_0^\tau u_2(\tau_1) d\tau_1 - \frac{1}{f(\pi)} \int_0^\pi f(\tau_1)u_2(\tau_1) d\tau_1 \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Так как из соотношения (33) следует  $u_1 = R_{1,\tau}$ ,  $u_2 = R_{2,\tau}$ , то, подставляя эти выражения в (42) и учитывая (33), получим уравнения (11), (12). Краевые условия (13) при этом удовлетворяются в силу соотношения  $u \in P$ .

На основании перечисленных утверждений (5)–(11) вытекает следующее [13].

**Теорема 1.** Уравнение (19) имеет по крайней мере одно действительное значение спектрального параметра  $\lambda \equiv \lambda(\alpha, \eta)$  при всех значениях  $0 \leq \alpha < 2$ ,  $0 \leq \eta < 1$ .



**Доказательство.** Для получения значения спектрального параметра  $\lambda$  при разных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\eta$  можно использовать итерационную схему

$$z(k+1) = Gz(k) + \sigma_k Az(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad z_1 = Ah, \quad h \in H, \quad (43)$$

$$\sigma_k = \|Az(k)\|^{-2} \times \left\{ -(Az(k), Gz(k)) + \left[ (Az(k), Gz(k))^2 + \|Az(k)\|^2 [\|z(k)\|^2 - \|Gz(k)\|^2] \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (44)$$

где  $k$  — номер итерации.

Итерационная схема (43), (44) всегда сходится в смысле

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lambda, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|z(k) - u\| = 0,$$

где  $u$  — решение спектральной задачи (19), причем  $u \in P$ . □

**Замечание 1.** Итерационная схема (43), (44) сходится и тогда, когда  $\eta \notin (0, 1)$ , но при этом она сходится необязательно к решению уравнения задачи (19).

В этом случае схемой можно пользоваться при численных расчетах и когда  $\eta > 1$ , но при этом необходимо проверять условие того, что предельная функция  $z(k)$  при  $k \rightarrow \infty$  удовлетворяет уравнению (19).

Из теоремы 1 и утверждения 12 следует

**Теорема 2.** В плоскости параметров  $\lambda$ ,  $q$  ( $q = \lambda\eta$ ) существует по крайней мере одна зона устойчивости, в которой имеется нетривиальное решение спектральной задачи (11)–(13) при  $\alpha \neq 0$ .

Отсюда следует существование по крайней мере одной зоны устойчивости, в которой существует прецессия при параметрических колебаниях маятника.

**Замечание 2.** В [13] указывается модификация схемы (43), (44), при которой можно находить следующие значения спектрального параметра  $\lambda$ , при этом получается бесконечная последовательность зон устойчивости в полуплоскости  $\lambda > 0$ ,  $-\infty < q < \infty$ .

Вопрос о том, все ли зоны устойчивости являются зонами прецессии, остается открытым.

Однако с практической точки зрения более важным является вопрос о нахождении хотя бы одной зоны устойчивости, где эта прецессия есть. Решить эту проблему можно только путем численных расчетов.

## 4. Численные расчеты

Алгоритм численных расчетов строится на основе итерационной схемы (43), (44), сходимость которой математически строго доказана в [13] для гильбертова пространства  $H$ , которое является бесконечномерным.

Однако все численные расчеты ведутся в конечномерном пространстве, и соответствующая конечномерная итерационная последовательность является лишь конечномерной аппроксимацией идеального вычислительного процесса. Поэтому итерационная последовательность (43), (44) в практическом численном использовании прошла апробацию при решении различных задач, часть из которых приведена в работах [11, 14–16].

В процессе апробации использовалось сравнение некоторых задач, полученных на основе схемы (43), (44) с решениями задач, полученных аналитически; строились различные варианты оценки погрешности получаемых решений; использовались некоторые особенности итерационной схемы (43), (44) для исключения технических ошибок при разработке и отладке программы. Решение этих задач показало практическую работоспособность итерационной схемы (43), (44). При реальных численных расчетах итерационная схема (43), (44) имеет следующие особенности, которые можно использовать для исключения ошибок при разработке и отладке программы.

На каждой итерации для итерационных параметров  $\sigma_k$  должно выполняться условие

$$\sigma_{k+1} < \sigma_k \quad \forall k, \quad (45)$$

а для нормы  $\|z(k)\|$  выполняется условие

$$\|z(k)\| = \|z(k+1)\| \quad \forall k. \quad (46)$$

При расчетах данной задачи выполнение условий (45), (46) контролировалось на каждом итерационном шаге автоматически.

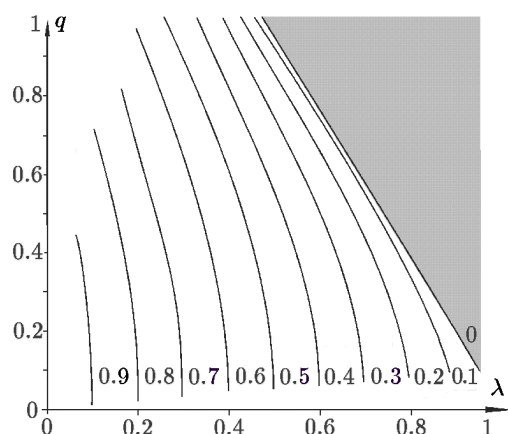
Погрешность решения, получаемого после обрывания итерационного процесса на  $k$ -й итерации, оценивалась по величине невязки в выполнении решения (19):

$$\epsilon = \frac{\|z(k) - Gz(k) - \sigma_k Az(k)\|}{\|z(k)\| + \|Gz(k)\| + \sigma_k \|Az(k)\|}. \quad (47)$$

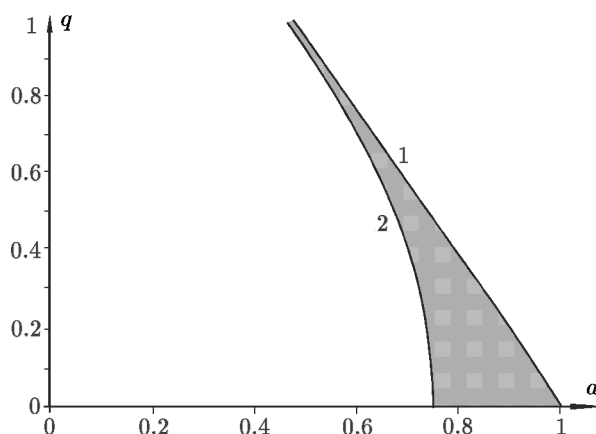
Для всех проведенных расчетов величина  $\epsilon$  удовлетворяла неравенству:  $\epsilon \leq 0.000001$ .

Тестом для решаемой задачи явилось и совпадение границы зоны прецессии с кривой, отделяющей зону устойчивости и неустойчивости на диаграмме Айнса–Стретта.

Все интегралы в операторах вычислялись по квадратурным формулам трапеций с равномерным разбиением интервала  $0 \leq \tau \leq \pi$  на 2000 частей.



**Рис. 1.** Линии уровня  $\alpha = \text{const}$  функциональной зависимости  $\alpha = \alpha(\lambda, q)$ , где значения  $\alpha$  обозначены числами на кривых



**Рис. 2.** Зона прецессии на части диаграммы Айнса–Стретта в плоскости параметров  $a, q$

Результаты численных расчетов изображены на рис. 1–3. Расчеты проводились не только в секторе  $0 < \eta \leq 1$ , но и при  $\eta > 1$ , учитывая замечание 1, при этом проверялось условие  $\epsilon \ll 1$ . На рис. 1 представлена функциональная зависимость  $\alpha = \alpha(\lambda, q)$  на

вспомогательной плоскости  $\lambda, q$ , где  $\lambda$  — результат численного решения спектральной задачи (19) в зависимости от задаваемых параметров  $\alpha, \eta$  и где  $q$  определяется формулой  $q = \lambda\eta \equiv q(\alpha, \eta)$ . Зависимость  $\alpha = \alpha(\lambda, q)$  представлена в виде линий уровня  $\alpha = \text{const}$  функции  $\alpha = \alpha(\lambda, q)$ . Серым цветом выделена зона, в которой решение спектральной задачи отсутствует.

Результаты, представленные на вспомогательной плоскости  $\lambda, q$  (рис. 1) переносятся на плоскость физических параметров  $a, q$  диаграммы Айнса–Стретта на рис. 2 на основе соотношения  $a = \lambda + \alpha^2 \equiv \lambda(\alpha, q) + \alpha^2$ . А эта зависимость является функциональной зависимостью  $\alpha = \alpha(a, q)$ .

На рис. 2 серым цветом окрашена зона параметров  $a, q$ , в которой существует прецессия боковых колебаний маятника. Эта зона представляет криволинейную полосу, отделяющую с одной стороны зону неустойчивости колебаний (кривая 1 на рис. 2), а с другой стороны зону, в которой боковые колебания маятника отсутствуют при сохранении вертикальных колебаний (кривая 2 на рис. 2). Кривая 1 на рис. 2 совпадает с кривой, отделяющей зоны устойчивости и неустойчивости на диаграмме Айнса–Стретта, и на кривой 1 скорость прецессии  $\alpha$  равна нулю.

С увеличением параметра  $q$  ширина полосы, где существует прецессия, монотонно уменьшается.

Функция  $\alpha = \alpha(a, q)$  в зоне прецессии является многозначной, каждому значениям параметров  $a, q$  соответствуют два значения параметра  $\alpha$ , что следует из численных пересчетов результатов рис. 1 на рис. 2.

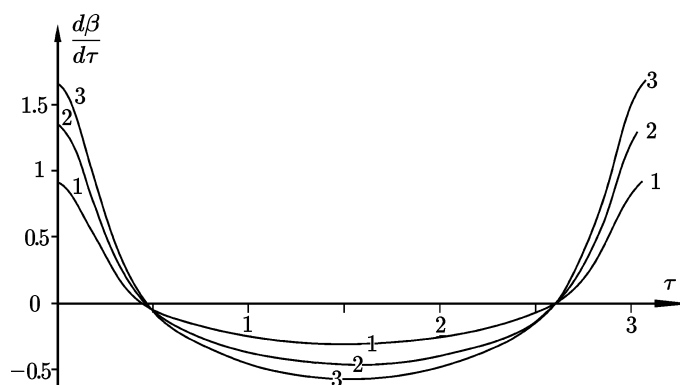
На кривой 2 рис. 2 параметр  $\alpha$  не является постоянным. Алгоритм перехода от плоскости  $\lambda, q$  к плоскости  $a, q$  следующий: варьируя  $\alpha, \eta$  на основе схемы (43), (44), находится зависимость  $\lambda = \lambda(\alpha, \eta)$  или, что то же самое,  $\alpha = \alpha(\lambda, \eta)$  (рис. 1).

Далее по формулам  $q = \lambda\eta, a = \lambda + \alpha^2$  находятся  $q = q(\alpha, \eta), a = a(\alpha, \eta)$ . Фиксируя  $\alpha$  и варьируя  $\eta$ , находится зависимость  $a = a(\alpha, q)$ . Эта зависимость однозначная и по ней можно найти обратную зависимость  $\alpha = \alpha(a, q)$ , которая является многозначной: каждому  $a$  соответствует два значения  $\alpha$ , причем область определения этой функции не отрезок  $0 < \alpha < 1$ , а только часть этого отрезка  $0 < \alpha_*(q) < a < \alpha_{**}(q) < 1$ , где зависимость  $\alpha_{**}(q)$  есть кривая 1 на рис. 2, а  $\alpha_*(q)$  — кривая 2 на рис. 2. Область, ограниченная кривыми  $\alpha_*(q), \alpha_{**}(q)$ , и есть зона прецессии.

На рис. 3 изображена переменная составляющая скорости прецессии  $\frac{d}{d\tau}\beta(\tau)$  как функция времени, где  $\beta$  вычислялась на основе формулы (14):

$$\beta(\tau) = \arcsin \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}},$$

а сама производная  $\frac{d}{d\tau}\beta(\tau)$  находилась численно. Кривые построены для разных значений параметров  $a, q$  и разной величины постоянной составляющей скорости прецессии  $\alpha$ .



**Рис. 3.** 1:  $\alpha = 0.3, a = 0.6641, q = 0.5741$ ;  
 2:  $\alpha = 0.5, a = 0.6956, q = 0.4456$ ;  
 3:  $\alpha = 0.7, a = 0.7728, q = 0.2828$

## 5. Заключение

Результаты математического исследования показали, что есть по крайней мере одна зона устойчивости на диаграмме Айнса–Стретта, в которой существует прецессия маятника, а численные расчеты показали, что в качестве этой зоны может выступать первая зона устойчивости на диаграмме Айнса–Стретта, и были найдены зависимости скорости прецессии как функции параметров  $a$ ,  $q$ .

## Литература

1. Капица П.А. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. exper. и теорет. физики. — 1951. — Т. 21, вып. 5. — С. 588–597.
2. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. — 1956. — Т. 110, вып. 3. — С. 345–347.
3. Миндлин И.Н. О параметрическом резонансе маятников с вибрирующей точкой подвеса // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1969. — № 4. — С. 36–40.
4. Валеев К.Г. Динамическая стабилизация неустойчивых систем // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1971. — № 4. — С. 13–21.
5. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1987.
6. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа “маятник”. — Алма-Ата: Наука, 1981.
7. Стретт Дж.В. (лорд Релей) Теория звука / Пер. с 3-го англ. изд. — М.-Л.: Гостехиздат, 1940.
8. Стрелков С.П. Маятник Фроуда // Журн. техн. физики. — 1933. — Т. 3, вып. 4. — С. 563–573.
9. Табуева В.А. О круговом движении маятника Фроуда // Прикл. матем. и механика. — 1961. — Т. 25, вып. 3. — С. 576–578.
10. Болотин В.В. Динамическая устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1950.
11. Тараканов В.И., Лысенкова С.А. Итерационный алгоритм определения устойчивости уравнения колебаний при наличии демпфирования // Сиб. журн. вычисл. математики. / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 1. — С. 103–119.
12. Крейн С.Г. Функциональный анализ. Справочник. — М.: Наука, 1972.
13. Тараканов В.И. Уравнения с компактными операторами в гильбертовом пространстве и итерационные алгоритмы их решения. — Томск: Из-во Томского политехн. ун-та, 2007.
14. Тараканов В.И., Нестеренко М.В. Итерационный алгоритм исследования и численного решения спектральных задач для линейного пучка компактных, частично симметричных операторов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 3. — С. 343–359.
15. Tarakanov V.I., Nesterenko M.V. Iterative algorithm of investigating and numerical solving spectral problems for a linear bunch of compact, partially symmetric operators // Numerical Analysis and Application. — Pleiades Publishing Inc., 2010. — Vol. 3, № 3. — P. 279–293. — (DOI: 10.1134/S1995423910030079).
16. Tarakanov V.I., Lysenkova S.A. Iterative algorithm of determining the stability of an equation of oscillations with damping // Numerical Analysis and Application. — Pleiades Publishing Inc., 2012. — Vol. 5, № 1. — P. 84–98. — (DOI: 10.1134/S1995423912010089).

Поступила в редакцию 25 апреля 2012 г.,  
в окончательном варианте 30 мая 2012 г.