

УДК 532.536

## ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СЫПУЧИХ СРЕДАХ

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева\*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

На основе гипопластической модели сред с дилатансией выведено нелинейное неоднородное волновое уравнение, описывающее волны сжатия в грунтах, и проанализированы его решения.

Изучение закономерностей распространения сейсмических волн в грунтах позволяет получить более полную информацию о механических свойствах сыпучих сред. Построение моделей грунтов основано, как правило, на представлениях механики сплошных сред, что подразумевает осреднение кинематических и динамических характеристик зерен по физически бесконечно малым объемам, т. е. объемам, достаточно малым по сравнению с характерными пространственными масштабами изучаемых процессов, но содержащим большое число зерен. Во всех моделях закон изменения импульса среды записывается одинаково:

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $v_i$  — компонента вектора скорости  $\mathbf{v}$ ;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $x_i$  — декартовы координаты; точка обозначает материальную производную  $d/dt = \partial/\partial t + v_j \partial/\partial x_j$ ; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Чтобы получить замкнутую математическую модель, необходимо кроме указанных уравнений ввести зависимость между напряжениями и деформациями (или скоростями деформаций). Такая связь называется определяющим уравнением или замыкающим соотношением.

Простейшим определяющим уравнением является закон Гука  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , из которого следует, что напряжение не зависит от пути нагружения и истории деформирования. Материалы и среды, которые могут быть описаны подобными соотношениями, называются упругими. Они изучаются с использованием теории упругости. Как показывают многочисленные наблюдения, проведенные в полевых и лабораторных условиях, грунты не являются упругими, поэтому замыкающие соотношения должны быть иными.

В начале 50-х гг. XX в. Трусделл ввел определяющее уравнение в виде зависимости между мгновенными значениями напряжений и деформаций, которая записывается как уравнение эволюционного типа, связывающее скорость изменения напряжения и скорость деформации среды  $d\sigma = f(d\varepsilon)$  (или  $\dot{\sigma} = f(\dot{\varepsilon})$ , где  $\dot{\varepsilon}_{ij} \equiv D_{ij} = (\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)/2$  — тензор скоростей деформаций). Производная  $d\sigma/d\varepsilon$  характеризует жесткость рассматриваемого материала. Грунты являются неупругими (пластическими) средами, и их жесткость значительно больше при разгрузке, чем при нагружении. Замыкающие соотношения, введенные Трусделлом и названные им гипоупругими, могут быть записаны в общем виде  $\dot{\sigma} = h(\sigma, D)$ , где функция  $h$  линейна по функциям  $\sigma$  и  $D$ . Среда называется гипоупругой, если в каждой точке в каждый момент времени тензор скоростей изменения напряжений представляет собой линейную функцию тензора скоростей деформаций, причем эта функция, в свою очередь, может линейно зависеть от тензора напряжений [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-05-65337).

При построении моделей обычно используют производную тензора напряжений по времени, которая обращается в нуль при вращении материала как твердого тела относительно неподвижной системы координат. Такая производная называется производной Яуманна и имеет вид

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{d\sigma_{ij}}{dt} + (\sigma\Omega)_{ij} - (\Omega\sigma)_{ij},$$

где  $\Omega_{ij} = (\partial v_i/\partial x_j - \partial v_j/\partial x_i)/2$  — тензор скоростей вращений. Таким образом, гипопругая среда описывается следующим инкрементальным законом:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -(\sigma\Omega)_{ij} + (\Omega\sigma)_{ij} + L_{ijkl}(\sigma)D_{ij}.$$

Здесь  $L_{ijkl}$  — тензорная функция, которая в общем случае может линейно зависеть от компонент тензора напряжений. Для простейшей гипопругой изотропной среды эта функция может быть записана в виде  $L_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ , где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе.

Из последнего соотношения следует, что жесткость материала при нагружении и разгрузке одна и та же, поэтому определяющие соотношения для гипопругой среды не пригодны для описания поведения грунтов, которые обладают свойством пластичности и жесткость которых при нагружении меньше жесткости при разгрузке. Иногда эту проблему можно решить, используя два различных соотношения между  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$ , одно из которых выбирается для участков нагружения среды, а другое — для участков разгрузки. В качестве примера запишем замыкающие соотношения в одномерном случае ( $u = v_1, x = x_1$ ) при малых нагружениях и разгрузках пластической среды в конечных приращениях  $\Delta\sigma = \mu_s\Delta\epsilon$  или в дифференциальной форме  $\sigma_t = \mu_s u_x$ , где индекс  $x$  обозначает дифференцирование по координате, жесткость  $\mu_s = \mu_1$  при нагрузке ( $\Delta\sigma < 0$ ) и  $\mu_s = \mu_2$  при разгрузке ( $\Delta\sigma > 0$ ), причем  $\mu_2 > \mu_1$ . Если обозначить  $\nu_1 = (\mu_2 + \mu_1)/2$ ,  $\nu_2 = (\mu_2 - \mu_1)/2$ , то указанные дифференциальные уравнения можно представить в виде одного уравнения  $\sigma_t = \nu_1 u_x + \nu_2 |u_x|$ , которое справедливо и при нагружении, и при разгрузке. Это уравнение содержит модуль производной скорости среды по координате и поэтому является нелинейным даже в малом. Заметим, что описанная процедура известна в вычислительной математике и используется при формальном переходе от двухточечных сеточных уравнений к трехточечным с последующим применением метода прогонки.

В настоящее время такой подход используется для описания поведения сыпучих сред, в частности песчаных грунтов [1–5]. Определяющее уравнение гипопластической среды можно записать в общем виде:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -(\sigma\Omega)_{ij} + (\Omega\sigma)_{ij} + L_{ijkl}(D, e)D_{ij} + N_{ij}(D, e)\|D\|,$$

где  $e = (V - V_s)/V_s$  — пористость среды;  $V_s$  — объем твердой фазы;  $V$  — полный объем;  $\|D\| = \sqrt{\text{tr}(D^2)}$  — норма тензора скоростей деформаций;  $L$  и  $N$  — некоторые тензорные функции указанных аргументов, имеющие различные представления, в которые входят константы, характеризующие свойства материала.

Для исследования волн сжатия в сыпучих средах нами выбрана математическая модель [4], в которой пренебрегается изменением пористости. Эта модель включает уравнения движения и инкрементальной связи напряжений и деформаций

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}; \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -(\sigma\Omega)_{ij} + (\Omega\sigma)_{ij} + f_1(\sigma)D_{ij} + f_2(\sigma)\sigma_{ij}\text{tr}(\sigma D) + \varphi_{ij}\|D\|. \quad (2)$$

Здесь  $f_1(\sigma) = C_1 \text{tr}(\sigma)$ ;  $f_2(\sigma) = C_2/\text{tr}(\sigma)$ ;  $\varphi_{ij}(\sigma) = (C_3(\sigma^2)_{ij} + C_4(\sigma^{*2})_{ij})/\text{tr}(\sigma) + (C_5(\sigma^3)_{ij} + C_6(\sigma_{ij}^{*3}))/\text{tr}(\sigma^2)$ ;  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - (1/3)\text{tr}(\sigma)\delta_{ij}$ ;  $C_1, \dots, C_6$  — эмпирические константы, которые определяются из тестовых экспериментов в сочетании с решением определяющего уравнения. Такая процедура называется калибровкой.

Наличие в (2) слагаемого, пропорционального норме тензора скоростей деформаций, делает рассматриваемую гипопластическую модель нелинейной даже в малом, так как она не допускает линеаризации в окрестности значения  $\|D\| = 0$ .

Рассмотрим одномерные продольные движения гипопластической среды, предположив, что искомые функции зависят только от одной координаты, например  $x$ , и времени  $t$ . Будем считать, что отклонения напряжений от начальных значений малы ( $\|\sigma - \sigma^0\| \ll \|\sigma^0\|$ ), оси  $x, y, z$  совпадают с главными осями тензора напряжений и начальное напряженное состояние  $\sigma^0$  является однородным и гидростатическим. Вектор скорости имеет только  $x$ -компоненту:  $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$ . Тогда для продольной компоненты скорости деформаций среды получим следующее уравнение:

$$u_{tt} - c_p^2 u_{xx} = b|u_x|_x. \quad (3)$$

Здесь коэффициент  $c_p$ , имеющий размерность скорости и зависящий от невозмущенного напряженного состояния, определяется формулой  $c_p^2 = (C_1 \text{tr}(\sigma^0) + C_2(\sigma_{xx}^0)^2/\text{tr}(\sigma^0))/\rho$  и может быть назван скоростью продольных волн. Коэффициент  $b$ , имеющий размерность квадрата скорости, характеризует нелинейные и дилатантные свойства среды, зависит от характеристик невозмущенного состояния и равен

$$b = (1/\rho)\{(\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 + \sigma_{zz}^0)^{-1}[C_3(\sigma_{xx}^0)^2 + C_4(\sigma_{xx}^0 - \text{tr}(\sigma^0)/3)^2] + [(\sigma_{xx}^0)^2 + (\sigma_{yy}^0)^2 + (\sigma_{zz}^0)^2]^{-1}[C_5(\sigma_{xx}^0)^3 + C_6(\sigma_{xx}^0 - \text{tr}(\sigma^0)/3)^3]\}.$$

Этот коэффициент может быть и положительным, и отрицательным в зависимости от исходных напряжений  $\sigma^0$  и констант модели  $C_3, \dots, C_6$ .

Уравнение (3) представляет собой неоднородное волновое уравнение с нелинейным источником. Предположим, что невозмущенное напряженное состояние изотропно:  $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{zz}^0 \equiv \sigma_0$ . Тогда выражения для скорости продольной волны и параметра  $b$  значительно упрощаются:  $c_p^2 = (3C_1 + C_2/3)\sigma_0/\rho$ ,  $b = (C_3 + C_5)\sigma_0/(3\rho)$ . Рассмотрим свойства волн сжатия. Факторизуем волновой оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_p \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_p \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

и с использованием приближенного метода, изложенного, например, в [6], выделим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . Для любого волнового профиля, распространяющегося в сторону  $x > 0$  со скоростью, приближенно равной  $U$ , производные по  $x$  и  $t$  связаны соотношением  $\partial/\partial t \approx -U\partial/\partial x$ . Это можно использовать при анализе свойств волновых пакетов, состоящих из волн, распространяющихся с различными скоростями. Для того чтобы выделить волну, движущуюся в положительном направлении оси  $x$  и описываемую оператором  $\partial/\partial t + c_p\partial/\partial x$ , сделаем замену  $\partial/\partial t \approx -c_p\partial/\partial x$  в операторе  $\partial/\partial t - c_p\partial/\partial x$ , который соответствует волне, распространяющейся в направлении  $x < 0$ . В результате получаем уравнение

$$-2c_p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c_p \frac{\partial u}{\partial x} \right) = b \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|,$$

интегрирование которого по координате дает уравнение первого порядка для продольной волны

$$u_t + c_p u_x + \frac{b}{2c_p} |u_x| = 0. \quad (4)$$

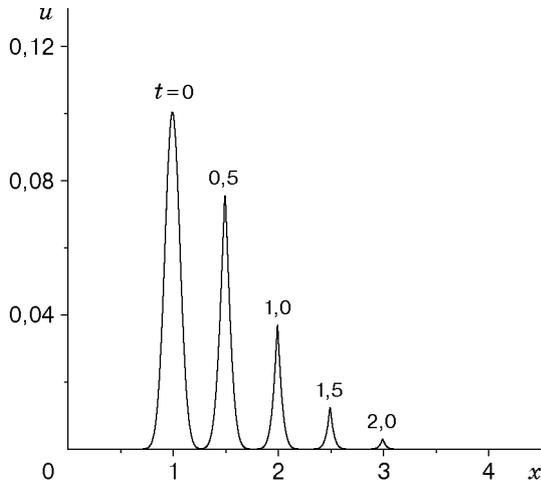


Рис. 1

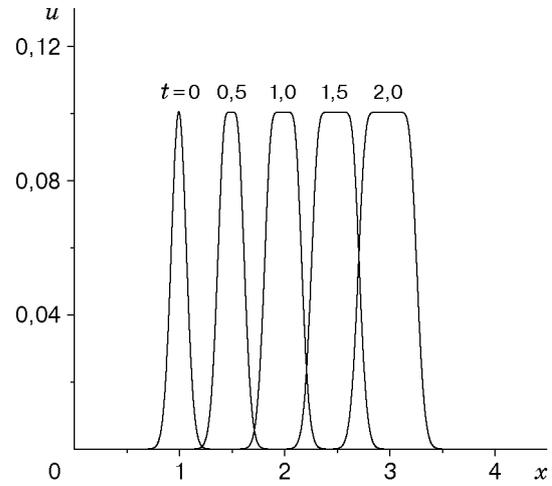


Рис. 2

Наличие модуля производной скорости среды по координате делает это уравнение нелинейным даже в малом. Переходя к анализу уравнения (4), заметим, что если  $u_x > 0$  всюду, то указанное уравнение принимает вид  $u_t + (c_p + b/(2c_p))u_x = 0$ , что соответствует переносу профиля искомой функции в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $c_1 = c_p + b/(2c_p)$ . Если  $u_x < 0$  всюду, уравнение (4) сводится к виду  $u_t + (c_p - b/(2c_p))u_x = 0$ , что соответствует переносу профиля искомой функции в направлении  $x > 0$  со скоростью  $c_2 = c_p - b/(2c_p)$ .

В качестве начального условия для численного решения уравнения (4) использовано пространственно-локализованное распределение

$$u(x, 0) = u_0 \exp [-(x - x_0)^2 / l^2], \tag{5}$$

граничные условия приняты в виде

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(x, t) = 0. \tag{6}$$

Этот импульс симметричен относительно точки  $x_0$ . Производная  $u_x$  начальной функции (5) меняет знак при  $x = x_0$ , поэтому профиль возмущения с течением времени меняется, так как участки с положительной производной движутся со скоростью  $c_1$ , а с отрицательной производной — со скоростью  $c_2 > c_1$ . Из представленного на рис. 1 решения следует, что амплитуда возмущения с течением времени уменьшается (тем быстрее, чем больше параметр  $b$ ), и импульс полностью затухает. Если изменить знак этого параметра, характер эволюции меняется: участки профиля с положительной производной распространяются со скоростью  $c'_1 = c_p - |b|/(2c_p)$ , с отрицательной производной — со скоростью  $c'_2 = c_p + |b|/(2c_p)$ , причем  $c'_2 > c'_1$ . Поэтому передний фронт возмущения, где  $u_x < 0$ , опережает задний фронт, где  $u_x > 0$ , и импульс с течением времени расширяется, сохраняя амплитуду неизменной (рис. 2).

Рассмотрим решения волнового уравнения (3), которое описывает распространение волн сжатия и в положительном, и в отрицательном направлениях оси  $x$ . Прежде всего заметим, что изменение знака координаты  $x \rightarrow -x$  эквивалентно изменению знака параметра  $b \rightarrow -b$ . Полагая  $b > 0$ , получим  $c_1 - c_2 = b/c_p > 0$ , откуда следует, что участки профиля возмущений, где  $u_x > 0$ , распространяются быстрее, чем участки с  $u_x < 0$ , а это должно приводить к искажению профилей волн сжатия при их распространении по среде. Отметим также, что при одновременной замене знаков  $x \rightarrow -x$ ,  $b \rightarrow -b$  уравнение (3) остается неизменным. Поэтому решения, соответствующие отрицательным значениям параметра  $b$ , являются зеркальным отражением относительно точки  $x = x_0$  решений, соответствующих

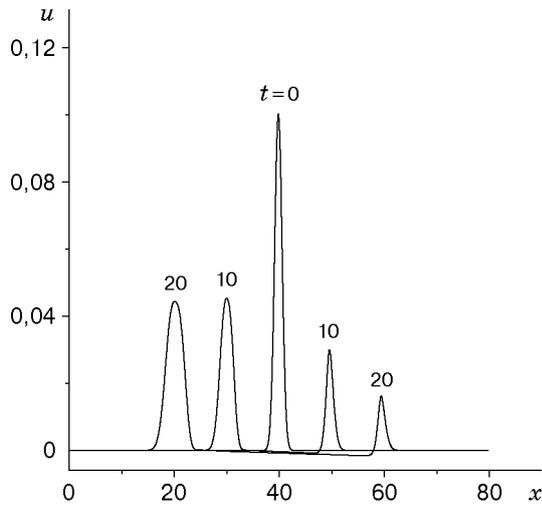


Рис. 3

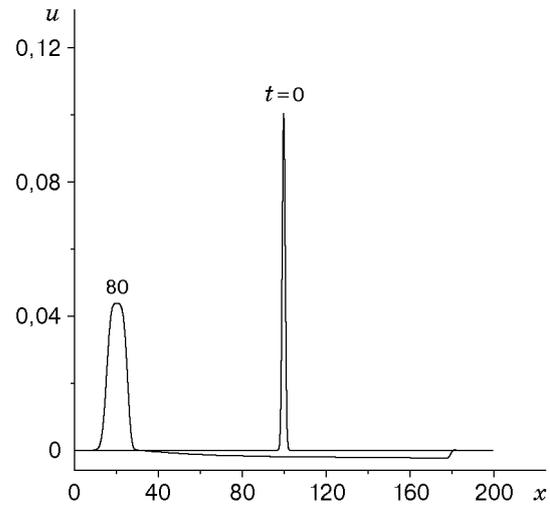


Рис. 4

положительным значениям этого коэффициента. Выберем начальное возмущение в виде пространственно-локализованного импульса (5), задав дополнительно  $u_t(x, 0) = 0$  и граничные условия (6). Условие  $u_t(x, 0) = 0$  соответствует выбору начального возмущения напряжения  $\sigma_{xx}$ , удовлетворяющего условию  $\partial\sigma_{xx}(x, 0)/\partial x = 0$  при всех значениях  $x$ . Из результатов расчетов следует, что такое начальное возмущение порождает волновые движения в обоих направлениях оси  $x$ , картины которых несимметричны (рис. 3). Параметр  $b$  выбран положительным, поэтому при сравнительно небольших временах движущийся влево импульс изменяется так, как это следует из решения уравнения переноса (4) при  $b < 0$ : амплитуда импульса остается постоянной, а ширина возрастает. Амплитуда импульса, движущегося вправо, уменьшается, стремясь к нулю, и при больших временах остается только движущийся влево импульс, который сопровождается расширяющимся вправо “хвостом” малой амплитуды с противоположным знаком (рис. 4). Дальнейшая эволюция может быть изучена только с использованием нелинеаризованных уравнений (1), (2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Kolymbas D.** An outline of hypoplasticity // Arch. Appl. Mech. 1991. V. 61. P. 143–151.
2. **Gudehus G.** A comprehensive constitutive equation for granular materials // Soils Found. 1996. V. 36, N 1. P. 1–12.
3. **Wu W., Bauer E., Kolymbas D.** Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials // Mech. Materials. 1996. V. 23. P. 45–69.
4. **Колимбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 133–142.
5. **Osinov V. A., Gudehus G.** Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body // Mech. Cohesive-Frict. Materials. 1996. V. 1. P. 25–44.
6. **Whitham G. B.** Linear and nonlinear waves. N. Y.: Wiley, 1974.

Поступила в редакцию 14/IX 2000 г.