УДК 517.9

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ГРУППОВОМУ АНАЛИЗУ ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. А. Абдуллин, С. В. Мелешко*, Ф. С. Насыров

Уфимский государственный технический авиационный университет, 450000 Уфа
* Технологический университет Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд
E-mails: 79marat97@rambler.ru, sergey@math.sut.ac.th, farsagit@yandex.ru

С помощью нового подхода к групповому анализу стохастических дифференциальных уравнений проведено исследование стохастических уравнений эволюционного типа. Показано, что при использовании предлагаемого подхода задача группового анализа для данного типа уравнений сводится к аналогичной задаче группового анализа для эволюционных уравнений специального вида без стохастических интегралов.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, симметрии, групповой анализ.

Введение. Методы группового анализа хорошо развиты и используются при изучении широкого класса детерминированных дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными), нахождении частных решений этих уравнений, а также при решении различных прикладных задач. Для учета случайных эффектов, имеющих место в сложных физических системах, необходимо построить модели, описываемые стохастическими уравнениями. Различные приложения стохастических моделей в физике, химии и других естественных науках указаны в [1, 2]. Кроме того, стохастический анализ используется при исследовании финансовых рынков [3].

В последнее время появились работы, в которых предприняты попытки распространить групповой анализ на стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), однако единой теории групп преобразований для СДУ пока не существует. Одной из проблем является определение нового винеровского процесса. Преобразование времени приводит к изменению этого процесса, причем преобразованный процесс также должен быть винеровским. Это требование существенно ограничивает класс возможных преобразований. Кроме того, вызывают затруднения построение определяющих уравнений и их решение.

Для уравнений с частными производными одним из определений допустимой группы является следующее свойство: решение уравнения преобразуется в решение того же уравнения. Предположение о наличии этого свойства используется при построении определяющих уравнений для уравнений с нелокальными членами. После того как определяющие уравнения построены, допустимой группой является группа преобразований, инфинитезимальный оператор которой удовлетворяет построенным определяющим уравнениям. Такой подход позволяет преодолеть сложности, вызванные нелокальностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ согласно постановлению № 220 (грант № 11.G34.31.0042).

При решении СДУ возникает дополнительная сложность, которая заключается в том, что для вычисления дифференциала сложной функции используется формула Ито, в отличие от случая детерминированных уравнений. С использованием определения допустимой группы преобразований, приведенного выше, и формулы Ито для вычисления соответствующих дифференциалов строятся определяющие уравнения для СДУ. При этом определяющие уравнения являются уравнениями в частных производных для коэффициентов инфинитезимального оператора, которые получаются приравниванием подынтегральных выражений интегралов Ито и Римана соответственно, продифференцированных по групповому параметру. Практически все подходы, используемые при построении симметрий для стохастических дифференциальных уравнений, основаны на этом способе и различаются только видом рассматриваемых преобразований. Например, в работе [4] время не подвергалось преобразованиям, в [5–7] время подвергалось преобразованию, но это не оказывало влияния на винеровский процесс. В работах [8–10] винеровский процесс был включен в преобразование зависимой переменной. Дифференциальное представление для преобразования винеровского процесса использовалось в [11–15]. Следует отметить, что в [11–15] независимость замены времени от пространственной переменной и зависимой переменной являлась необходимым условием при построении определяющих уравнений. Более сложные преобразования времени рассматривались в работах [16–19].

Следует отметить еще один недостаток рассмотренных выше подходов: поскольку в СДУ имеются интегралы двух типов (Ито и Римана), то приравнивание подынтегральных выражений каждого из интегралов требует обоснования. Необходимые и достаточные условия для такого обоснования получены в [20], тогда как ранее использовались только достаточные условия.

В настоящей работе предлагается подход к групповому анализу одномерных СДУ. При использовании этого подхода задача группового анализа стохастического дифференциального уравнения сводится к аналогичной задаче для обыкновенного диффеpeренциального уравнения, правая часть которого, вообще говоря, зависит от траектории винеровского процесса.

1. Предварительные сведения. Пусть в вероятностном пространстве $(\Omega, F, (F_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$ с фильтрацией задан винеровский процесс $W(t)$, $t \in [0,T]$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$u(t) = u_0 + \int\limits_0^t b(s,u(s))\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s,u(s)) * dW(s), \qquad t \in [0,T], \tag{1}$$

где второй интеграл в правой части есть стохастический интеграл Стратоновича.

Будем считать, что коэффициенты $b(s,\varphi)$ и $\sigma(s,\varphi)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) условию линейного роста $|b(t,\varphi)| + |\sigma(t,\varphi)| \leqslant C(1+|\varphi|)$ (C — константа);

2) условию Липшица $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant D|x-y|$ (D — константа);

3) $\sigma^2(t,\varphi) > 0 \quad \forall t \in [0,T]$.

Данные предположения обеспечивают существование и единственность задачи Коши для уравнения (1). Кроме того, условие 3 позволяет определить при каждом значении t функцию $\varphi^*(t,v)$, обратную функции $v = \gamma(t,\Phi) = \displaystyle\int \frac{d\Phi}{\sigma(t,\Phi)}$.

Пусть дана группа Ли преобразований временного параметра $\bar t = f(t,a)$, $f(0,a) = 0$ уравнения (1). Ниже через $f(\bar t,-a)$ обозначается функция, обратная функции $f(t,a)$ при каждом значении a. Кроме того, предполагается, что функция $f(\bar{t}, -a)$ есть случайная замена времени, обусловливающая замену винеровского процесса

$$\bar{W}(\bar{t}) = \int\limits_0^{f(\bar{t},-a)} \sqrt{f'_s(s,a)}\, dW(s), \tag{2}$$

где интеграл в правой части (2) есть интеграл Ито. Если к тому же имеется группа Ли преобразований, включающая фазовую переменную уравнения (1) вида

$$\bar{t} = f(t,a), \qquad \bar{u} = g(t, W(t), u, a),$$

то для новой функции

$$\bar{u}(\bar{t}) = g(f(\bar{t},-a), W(f(\bar{t},-a)), u(f(\bar{t},-a)), a)$$

условием допустимости группы Ли является соотношение

$$\bar{u}(\bar{t}) = \bar{u}_0 + \int\limits_0^{\bar{t}} b(\tau, \bar{u}(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^{\bar{t}} \sigma(\tau, \bar{u}(\tau))\, d\bar{W}(\tau), \tag{3}$$

где $\bar{u}_0 = g(0, 0, u(0), a)$. Поскольку a — групповой параметр, то эту группу можно задать с помощью инфинитезимального оператора

$$X = \xi(t)\, \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, W(t), u)\, \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\xi(t) = f'_a(t,a)\big|_{a=0}$; $\eta(t, W(t), u) = g'_a(t, W(t), u, a)\big|_{a=0}$; для частных производных используются обозначения, принятые в теории стохастических уравнений. Например, для функции $f(t,a)$

$$f'_t(t,a) \equiv f_t(t,a), \qquad f'_s(s,a) \equiv f_t(t,a)\big|_{t=s}.$$

В работе [21] доказано, что решение $u(t)$ уравнения (1) имеет структуру

$$u(t) = \varphi^*(t, W(t) + C(t)), \tag{4}$$

где детерминированная функция $\varphi^*(t,v)$ определена выше; гладкая случайная функция $C(t)$ есть решение задачи Коши

$$C'(t) = H(t, W(t) + C(t)), \qquad \varphi^*(0, W(0) + C(0)) = u_0; \tag{5}$$

$$H(t,v) = \frac{b(t, \varphi^*(t,v)) - (\varphi^*)_t(t,v)}{\sigma(t, \varphi^*(t,v))}.$$

Следовательно, вся вероятностная информация о процессе $u(t)$ фактически содержится в винеровском процессе со случайным гладким сносом $W(t) + C(t)$.

Уравнение (5) является обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ), но обладает следующей особенностью: его правая часть содержит траекторию винеровского процесса. Далее используется группа преобразований уравнения (5), которая обладает специальным свойством, так как при допустимых преобразованиях СДУ вида (1) винеровский процесс $W(t)$ должен переходить в новый винеровский процесс $\bar{W}(\bar{t})$, определенный формулой (2). Это требование справедливо и для допустимых преобразований ОДУ вида

$$C'(t) = B(t, C(t), W(t)), \tag{6}$$

правая часть которых зависит от винеровского процесса $W(t)$.

Итак, под группой допустимых преобразований уравнения (6) будем понимать преобразования вида $\bar{t} = f(t, a)$, $\bar{C} = h(t, C, a)$, под действием которых уравнение (6) принимает вид

$$\bar{C}'(\bar{t}) = B(\bar{t}, \bar{C}(\bar{t}), \bar{W}(\bar{t})), \tag{7}$$

где

$$\bar{C}(\bar{t}) = h(f(\bar{t}, -a), C(f(\bar{t}, -a)), a). \tag{8}$$

Эту группу можно задать с помощью инфинитезимального оператора

$$Y = \xi(t)\,\frac{\partial}{\partial t} + \zeta(t, C(t))\,\frac{\partial}{\partial C},$$

где $\zeta(t, C(t)) = h'_a(t, C, a)\big|_{a=0}$.

Определим условия, при которых преобразования $\bar{t} = f(t, a)$, $\bar{C} = h(t, C, a)$ допустимы для уравнения (7). Для этого найдем производную функции $\bar{C}(\bar{t})$ из (8) и подставим ее в уравнение (7). В результате имеем

$$\begin{aligned} \bar{C}'(\bar{t}) = h'_t(f(\bar{t}, -a), C(f(\bar{t}, -a)), a) f'_{\bar{t}}(\bar{t}, -a) + {}\\ + h'_C(f(\bar{t}, -a), C(f(\bar{t}, -a)), a) C'(f(\bar{t}, -a)) f'_{\bar{t}}(\bar{t}, -a) = {}\\ = [h'_t + h'_C B(f(\bar{t}, -a), C(f(\bar{t}, -a)), W(f(\bar{t}, -a)))]\, f'_{\bar{t}}(\bar{t}, -a) = B(\bar{t}, \bar{C}(\bar{t}), \bar{W}(\bar{t})). \end{aligned}$$

(Ниже аргументы у частных производных функции h опускаются.) Следовательно, выбрав $\bar{t} = f(t, a)$, получаем

$$\begin{aligned} [h'_t(t, C(t), a) + h'_C(t, C(t), a) B(t, C(t), W(t))] f'_{\bar{t}}(f(t, a), -a) = {}\\ = B(f(t, a), \bar{C}(f(t, a)), \bar{W}(f(t, a))), \end{aligned}$$

или, поскольку $f'_{\bar{t}}(f(t, a), -a) = 1/f'_t(t, a)$,

$$h'_t + h'_C B = (h(t, C(t)))'_t = B(f(t, a), \bar{C}(f(t, a)), \bar{W}(f(t, a))) f'_t(t, a). \tag{9}$$

Запишем это уравнение в интегральном виде

$$\begin{aligned} h(t, C(t), a) - h(0, C(0), a) = \int\limits_0^t B(f(s, a), \bar{C}(f(s, a)), \bar{W}(f(s, a))) f'_s(s, a)\, ds = {}\\ = \int\limits_0^{f(t,a)} B(s, \bar{W}(s), \bar{C}(s))\, ds. \end{aligned}$$

Дифференцируя по a и полагая $a = 0$, получаем

$$\zeta(t, C(t)) = B(f(t, a), \bar{C}(f(t, a)), \bar{W}(f(t, a))) f'_a(t, a)\big|_{a=0} = B(t, W(t), C(t))\xi(t).$$

Следовательно,

$$\zeta(t, C(t)) = B(t, W(t), C(t))\xi(t). \tag{10}$$

Уравнения (9), (10) можно считать определяющими уравнениями для допустимой группы преобразований уравнения (6).

2. Простейшее СДУ и его допустимые группы Ли. Рассмотрим СДУ вида

$$dy(t) = dW(t) + B(t, y(t))\,dt. \tag{11}$$

Решение (11) имеет вид $y(t) = W(t) + C(t)$, где

$$C'(t) = B(t, W(t) + C(t)). \tag{12}$$

Пусть $\bar{t} = f(t,a)$, $\bar{y} = r(t, W(t), y, a)$ — допустимая группа преобразований уравнения (11). Тогда

$$d\bar{y}(\bar{t}) = d\bar{W}(\bar{t}) + B(\bar{t}, \bar{y}(\bar{t}))\,d\bar{t}, \tag{13}$$

где

$$\bar{y}(\bar{t}) = r(f(\bar{t}, -a), W(f(\bar{t}, -a)), y(f(\bar{t}, -a), a)). \tag{14}$$

В то же время решение уравнения (13) имеет вид

$$\bar{y}(\bar{t}) = \bar{W}(\bar{t}) + \bar{C}(\bar{t}), \tag{15}$$

где $\bar{C}(\bar{t})$ — решение ОДУ (12). В силу формул (14), (15)

$$\bar{C}(\bar{t}) = \bar{y}(\bar{t}) - \bar{W}(\bar{t}) = r(f(\bar{t}, -a), W(f(\bar{t}, -a)), C(f(\bar{t}, -a)) + W(f(\bar{t}, -a)), a) - \bar{W}(\bar{t}).$$

Следовательно, с учетом (8) имеем

$$r(f(\bar{t}, -a), W(f(\bar{t}, -a)), C(f(\bar{t}, -a)) + W(f(\bar{t}, -a)), a) - \bar{W}(\bar{t}) = h(f(\bar{t}, -a), C(f(\bar{t}, -a))).$$

Полагая $\bar{t} = f(t,a)$ и используя формулу (2), окончательно получаем

$$r(t, W(t), C(t) + W(t), a) - \int\limits_0^t \sqrt{f'_s(s,a)}\,dW(s) = h(t, C(t), a). \tag{16}$$

Итак, преобразование $\bar{t} = f(t,a)$, $\bar{C} = h(t, C, a)$ допускается уравнением (12) тогда и только тогда, когда преобразование $\bar{t} = f(t,a)$, $\bar{y} = r(t, W(t), y, a)$ допускается уравнением (11).

Заметим, что левая часть равенства (16) не должна зависеть от $W(t)$, т. е. должна быть гладкой по переменной t функцией, поскольку такой функцией является правая часть (16). Так как $f(t,a)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию по переменной t, то ее частная производная $f'_t(t,a)$ может зависеть от винеровского процесса $W(t)$. Поэтому будем полагать

$$f'_t(t,a) = \hat{f}(t, W(t), a).$$

Будем считать, что функция $\hat{f}(t, W, a)$ непрерывна по всем переменным и имеет непрерывную частную производную $\hat{f}'_W(t, W, a)$. Тогда в силу формулы Ито, которую можно представить в виде формулы связи между интегралами Ито и Стратоновича, имеем

$$\int\limits_0^t \sqrt{f'_s(s,a)}\,dW(s) = \int\limits_0^t \sqrt{\hat{f}(s, W(s), a)} * dW(s) - \frac{1}{4}\int\limits_0^t \frac{\hat{f}'_W(s, W(s), a)}{\sqrt{\hat{f}(s, W(s), a)}}\,ds.$$

С учетом формулы для вычисления симметричного интеграла (см. теорему 7.2 в [21]) левую часть соотношения (16) запишем в виде

$$r(t,W(t),C(t)+W(t),a)-\int\limits_{W(0)}^{W(t)}\sqrt{\hat f(t,u,a)}\,du+\int\limits_0^t\int\limits_{W(0)}^{W(s)}\big(\sqrt{\hat f(s,u,a)}\,\big)'_s\,du\,ds+{}$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^t\frac{\hat f'_W(s,W(s),a)}{\sqrt{\hat f(s,W(s),a)}}\,ds.$$

Последнее выражение не зависит от $W(t)$, если его частная производная по W равна нулю:

$$r'_W(t,W(t),C(t)+W(t),a)+r'_y(t,W(t),C(t)+W(t),a)=\sqrt{f'_t(t,a)}.$$

Фактически данное соотношение и его варианты, приведенные в ряде работ, указанных во введении, являются достаточным условием независимости левой части соотношения (16) от процесса $W(t)$.

3. Основные результаты исследования. Исследуем связь между группами преобразований для уравнений (1) и (5). Заметим, что при преобразованиях $\bar t=f(t,a)$, $\bar u=g(t,W(t),u,a)$ коэффициенты уравнения (1) не меняются. В частности, это означает, что в новых переменных вид функции $\varphi^*(\bar t,\bar u)$ как функции, обратной функции $\bar u=\gamma(\bar t,\varphi)=\displaystyle\int\frac{d\varphi}{\sigma(\bar t,\varphi)}$, также не меняется. Поэтому решение уравнения (1) в переменных $(\bar t,\bar u)$ имеет тот же вид, что и уравнение (4):

$$\bar u(\bar t)=\varphi^*(\bar t,\bar W(\bar t)+\bar C(\bar t))=g(f(\bar t,-a),W(f(\bar t,-a)),u(f(\bar t,-a)),a).$$

Следовательно,

$$\bar C(\bar t)+\bar W(\bar t)=\gamma(f(\bar t,-a),g(f(\bar t,-a),W(f(\bar t,-a)),\varphi^*(f(t,-a),W(f(\bar t,-a))+C(f(\bar t,-a))),a)),$$

или

$$h(f(\bar t,-a),C(f(t,-a),a))=\gamma(f(\bar t,-a),g(f(\bar t,-a),W(f(\bar t,-a)),\varphi^*(f(t,-a),$$

$$W(f(\bar t,-a))+C(f(\bar t,-a))),a))-\int\limits_0^{f(\bar t,-a)}\sqrt{f'_s(s,a)}\,dW(s).$$

Полагая $t=f(\bar t,-a)$, получаем

$$h(t,C(t),a)=\gamma(t,g(t,W(t),\varphi^*(t,W(t)+C(t)),a))-\int\limits_0^t\sqrt{f'_s(s,a)}\,dW(s),$$

значит,

$$g(t,W(t),\varphi^*(t,W(t)+C(t)),a)=\varphi^*\Big(t,h(t,C(t),a)+\int\limits_0^t\sqrt{f'_s(s,a)}\,dW(s)\Big).$$

Поскольку $C(t)=\gamma(t,u(t))-W(t)$, имеем

$$g(t,W(t),u,a)=\varphi^*\Big(t,h(t,\gamma(t,u(t))-W(t),a)+\int\limits_0^t\sqrt{f'_s(s,a)}\,dW(s)\Big).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При предположениях, сделанных выше, справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть дана группа преобразований* $\bar{t} = f(t,a)$, $\bar{C} = h(t,C,a)$, *допускаемая обыкновенным дифференциальным уравнением* (5). *Тогда группа преобразований*

$$\bar{t} = f(t,a), \qquad \bar{u} = \varphi^*\Big(t, h(t, \gamma(t, u(t) - W(t)), a) + \int_0^t \sqrt{f_s'(s,a)}\, dW(s)\Big) \tag{17}$$

допускается стохастическим дифференциальным уравнением (1).

2. *Если преобразования* (17) *допускаются уравнением* (1), *то уравнение* (5) *допускает преобразование*

$$\bar{t} = f(t,a), \qquad \bar{C} = \gamma(t, g(t, W(t), \varphi^*(t, W(t) + C), a)) - \int_0^t \sqrt{f_s'(s,a)}\, dW(s).$$

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что оно остается справедливым для эволюционных стохастических дифференциальных уравнений вида

$$u(t,x) - u_0(x) = \int_0^t F_2(s,x,u) * dW(s) + \\ + \int_0^t F_1\Big(s, x, W(s), u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial^{k_1} x_1 \cdots \partial^{k_n} x_n}\Big)\, ds, \tag{18}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant m$. В правой части уравнения (18) аргументы у функции $u = u(s,x)$ опущены. Предполагается, что функция $F_2(s,x,u)$ отлична от нуля, имеет непрерывные частные производные $(F_2)'_s$, $(F_2)'_u$ и непрерывные частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$ до m-го порядка включительно.

В работе [21] (см. теорему 12.3) показано, что решение уравнений вида (18), если оно существует, имеет вид $\varphi(t, x, W(t) + C(t,x))$, где функция $\varphi(t,x,v)$ при любых фиксированных (t,x) является функцией, обратной функции $v = \gamma(t,x,\varphi) = \int \frac{d\varphi}{F_2(t,x,\varphi)}$; функция $C(t,x)$ есть решение уравнения

$$\varphi_s'(s,x,v+C)\big|_{v=W(s)} + \varphi_v'(s,x,v+C)\big|_{v=W(s)} C_s' = \\ = \tilde{F}_1\Big(s, x, W(s), u, \frac{\partial C}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k C}{\partial^{k_1} x_1 \cdots \partial^{k_n} x_n}\Big), \tag{19}$$

функция $\tilde{F}_1$ получена из F_1 в результате подстановки в нее функции $u(t,x) = \varphi(t, x, W(t) + C(t,x))$.

Теорема 2. *Пусть при предположениях, сделанных выше, уравнение* (18) *имеет решение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть дана группа преобразований* $\bar{t} = f(t,a)$, $\bar{x} = p(t,x,a)$, $\bar{C} = h(t,x,C,a)$, *допускаемая уравнением* (19). *Тогда группа преобразований*

$$\bar{t} = f(t,a), \qquad \bar{x} = p(t,x,a), \\ \bar{u} = \varphi^*\Big(t, x, h(t, \gamma(t,x,u(t)) - W(t), a) + \int_0^t \sqrt{f_s'(s,a)}\, dW(s)\Big) \tag{20}$$

допускается стохастическим дифференциальным уравнением (18).

2. *Если преобразования* (20) *допускаются уравнением* (18), *то уравнение* (19) *допускает преобразование*

$$\bar{t} = f(t, a), \qquad \bar{x} = p(t, x, a),$$

$$\bar{C} = \gamma(t, x, g(t, W(t), x, \varphi^*(t, W(t) + C), a)) - \int_0^t \sqrt{f_s'(s, a)}\, dW(s).$$

4. Пример. Рассмотрим уравнение

$$u(t) = u_0 + \int_0^t u(s) * dW(s) + \int_0^t u(s)(\ln|u(s)| - W(s))^2 \frac{ds}{s^2}. \qquad (21)$$

Для этого уравнения $\sigma(t, u(t)) = u(t)$, $b(t, u(t), W(t)) = u(t)[(\ln|u(t)| - W(t))/t]^2$.

В силу формулы (4) имеем $\varphi^*(t, W(t) + C(t)) = \mathrm{e}^{W(t)+C(t)}$, значит, $u(t) = \mathrm{e}^{W(t)+C(t)}$. Уравнение (5) принимает вид

$$C'(t) = (C(t)/t)^2.$$

Симметрии для этого уравнения известны:

$$\bar{t} = \mathrm{e}^a\, t, \qquad \bar{C} = h(t, C(t), a) = C\,\mathrm{e}^a\,.$$

В силу формулы (2) новый винеровский процесс имеет вид

$$\bar{W}(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}\,\mathrm{e}^{-a}} \sqrt{f_s'(s, a)}\, dW(s) = \sqrt{\mathrm{e}^a}\, W(t).$$

Из теоремы 1 вытекает, что группа допустимых преобразований для (21) определяется следующим образом:

$$\bar{t} = \mathrm{e}^a\, t, \qquad \bar{u} = \exp\,[\ln|u| - W(t)\,\mathrm{e}^a + \sqrt{\mathrm{e}^a}\, W(t)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gardiner C. W.** Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences. 2nd ed. N. Y.: Springer, 1997.
2. **Kampen van N. G.** Stochastic processes in physics and chemistry. 3rd ed. Amsterdam: Elsevier Sci. and Technol. Books, 2007.
3. **Shiryaev A. N.** Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory. Hong Kong: World Sci., 1999.
4. **Misawa T.** New conserved quantities form symmetry for stochastic dynamical systems // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 177–192.
5. **Albeverio S., Fei S.** Remark on symmetry of stochastic dynamical systems and their conserved quantities // J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6363–6371.
6. **Gaeta G., Quinter N. R.** Lie-point symmetries and differential equations // J. Phys. A. 1999.V. 32. P. 8485–8505.
7. **Gaeta G.** Symmetry of stochastic equations // Symmetry in nonlinear mathematical physics. Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2004. P. 98–109.

8. **Melnick S. A.** The group analysis of stochastic partial differential equations // Theory Stochast. Proc. 2003. V. 9, N 1/2. P. 99–107.
9. **Alexandrova O. V.** Group analysis of a two-dimensional Itô stochastic equation // Vestnik of DonNABA. 2005. V. 1. P. 140–145.
10. **Alexandrova O. V.** Group analysis of the Itô stochastic system // Different. Equat. Dynam. Syst. 2006. V. 14, N 3/4. P. 255–280.
11. **Mahomed F. M., Wafo Soh C.** Integration of stochastic ordinary differential equations from a symmetry standpoint // J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 777–782.
12. **Fredericks E., Mahomed F. M.** A formal approach for handling Lie point symmetries of scalar first-order Itô stochastic ordinary differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. 2008. V. 15. P. 44–59.
13. **Ünal G.** Symmetries of Ito and Stratonovich dynamical systems and their conserved quantities // Nonlinear Dynam. 2003. V. 32. P. 417–426.
14. **Ünal G., Sun J. Q.** Symmetries conserved quantities of stochastic dynamical control systems // Nonlinear Dynam. 2004. V. 36. P. 107–122.
15. **Ibragimov N. H., Ünal G., Jogréus C.** Approximate symmetries and conservation laws for Itô and Stratonovich dynamical systems // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297. P. 152–168.
16. **Srihirun B., Meleshko S. V., Schulz E.** On the definition of an admitted Lie group for stochastic differential equations // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2007. V. 12, N 8. P. 1379–1389.
17. **Srihirun B., Meleshko S. V., Schulz E.** On the definition of an admitted Lie group for stochastic differential equations with multi-Brownian motion // J. Phys. A. 2006. V. 39. P. 13951–13966.
18. **Schulz E., Meleshko S. V.** A new set of admitted transformations for autonomous stochastic ordinary differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. 2010. V. 17, N 2. P. 179–196.
19. **Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V.** Symmetries of integro-differential equations and their applications in mechanics and plasma physics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. (Lecture Notes Phys.; V. 806).
20. **Абдуллин М. А., Исмагилов Н. С., Насыров Ф. С.** Одномерные стохастические дифференциальные уравнения: потраекторный подход // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 3–16.
21. **Насыров Ф. С.** Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. М.: Физматлит, 2011.

Поступила в редакцию 29/X 2013 г.