

УДК 536.46

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА «СОБСТВЕННОЙ» ТУРБУЛЕНТНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ВБЛИЗИ ЗОНЫ ГАЗИФИКАЦИИ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА. I. ДВУХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ ЗОНЫ ГАЗИФИКАЦИИ

К. О. Сабденов<sup>1</sup>, М. Ерзада<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, 150000 Петропавловск  
Казахстан, sabdenovko@yandex.kz

<sup>2</sup>Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, 010008 Астана, Казахстан

Предложена модель газификации твердого топлива, содержащая на промежуточной стадии двухфазную среду. Образование газовой фазы идет двумя путями: в результате химических реакций образуются газовые продукты, они, в свою очередь, инициируют появление пузырьков, в которых происходит парообразование из жидкой фазы топлива. Газовые продукты играют существенную роль только на самой начальной стадии развития пузырька, по их критическому давлению определяется минимальный размер зародыша газовой фазы. Основной рост объема пузырька происходит за счет испарения жидкой фазы. Сформулированы кинетическое уравнение для концентрации пузырьков и необходимые граничные условия. Предложены аргументы для обоснования невозможности образования максимума температуры в зоне газификации и возможности генерации «собственной» турбулентности разрушающимися пузырьками. Образующийся при горении твердых ракетных топлив звук объясняется разрушением огромного числа микроскопических пузырьков. Сформулированная система уравнений в случае игнорирования процессов в двухфазной зоне переходит в уравнения модели Беляева — Зельдовича.

Ключевые слова: твердое топливо, модель Беляева — Зельдовича, зона газификации, пузырьковое кипение.

DOI 10.15372/FGV20170508

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы в зоне газификации играют первостепенную роль при определении скорости горения твердого топлива. Для описания процессов в этой зоне часто используется модель Беляева — Зельдовича [1], где недостаточно подробно представлены процессы испарения расплавленного топлива и выделения газов в результате первичных химических реакций. Современная экспериментальная техника не позволяет детально рассмотреть процессы газификации или провести высокоточные измерения наиболее важных физических параметров. Поэтому опытные данные не всегда надежны, они интерпретируются на основе определенных представлений о процессах в зоне газификации. Эти представления, в сущности, являются моделями и оказываются лишь чрезмерно грубым приближением реальной физической картины. В результате получается замкнутый эвристический круг: ненадежные модели используются

для анализа таких же ненадежных экспериментальных данных. Для успешного исследования необходимо, чтобы хотя бы одно из них имело достаточно надежную основу.

Моделированию процессов в зоне газификации посвящено множество публикаций, обзор этих работ можно найти, например, в [2–5]. Нас интересуют исследования, где зона газификации рассматривается как отдельная система с заданными условиями на ее границах. В зависимости от этих условий анализируется поведение системы. По всей видимости, впервые такая упрощенная задача была сформулирована в [6]. На основе модели Беляева — Зельдовича авторы [6] показали, что при увеличении потока тепла из газовой фазы в зоне газификации может реализоваться профиль температуры с локальным максимумом. Это указывает на возможность нового вида неустойчивого горения, который нельзя предсказать на основе простой теории Зельдовича — Новожилова [7] или аналогичной  $T_0^*$ -теории [8, 9], где процессы

в зоне газификации и в газовой фазе детально не рассматриваются. О возможности локального максимума температуры в зоне газификации ранее сообщалось в работе [10]. Неустойчивость в этом исследовании возникает при сильной химической реакции в твердой фазе в условиях слабого отвода летучих компонентов разложения топлива, при этом неустойчивость возможна в промежуточной области давления. Но в уравнениях теории [10] содержатся параметры с неопределенными числовыми значениями, их связи между собой и степень влияния друг на друга остаются скрытыми. Такого рода информацию можно получить или экспериментально, или на основе детального моделирования процессов в зоне газификации.

Результаты [6, 10] послужили основанием для развития представлений о «собственной» турбулентности горящего топлива [11], т. е. турбулентности вблизи зоны газификации, создаваемой самим процессом горения.

«Собственная» турбулентность может возникнуть и в результате диффузионно-тепловой неустойчивости во всей системе, включающей в себя как зону газификации, так и зону прогрева в твердой фазе, газовую фазу вместе с пламенем [11]. Например, численным моделированием показана возможность реализации стохастической динамики в одномерной волне горения твердого топлива в ракетном двигателе [12, 13].

Детальное моделирование процессов в зоне газификации необходимо также для определения скорости горения в стационарных и нестационарных режимах. Поведение скорости горения во многих важных для практики случаях оказывается очень сложным и труднопредсказуемым, например при возникновении акустической неустойчивости [12–18].

Нами предпринята попытка построить модель зоны газификации твердой фазы топлива, в которой детально рассматривается образование зародышей газовой фазы в расплавленном топливе, их рост и пузырьковое кипение. Зародыши (или минимально возможные пузырьки газовой фазы) являются центрами парообразования.

## ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Еще более 40 лет назад в экспериментах были установлены факты [19–21], указывающие на сложный механизм газификации твердых взрывчатых веществ. В тонком жидком

слое зоны газификации гексогена и октогена наблюдаются пузырьки газа [19], скорость их роста находится в пределах  $10 \div 20$  м/с. Одновременно происходит конвективное движение в жидком слое. Это может быть вызвано движением очень мелких пузырьков под действием силы Архимеда (в экспериментах [19] вектор силы тяжести направлен в сторону движения фронта горения), расширением среды вследствие изменения ее плотности [22], проявлением эффекта Марангони [23, 24]. Но следует заметить, что эффект Марангони играет существенную роль только при высоком давлении или других случаях возникновения больших градиентов температуры в зоне газификации [4, 25]. Также конвективное движение возможно в результате гидродинамической неустойчивости [26].

Поскольку место и время образования пузырьков являются случайными величинами, конвективное движение в жидкости тоже должно носить случайный характер. Иногда в отдельных местах жидкая пленка разрушается и образуется комок жидкости, но обнажившееся сухое место вновь покрывается жидким слоем. Это явление можно объяснить выделением газов в твердой фазе под пленкой. Если в твердой фазе возникают микроскопические газовые полости и таких полостей много, то пленка жидкости не прилегает плотно к твердой поверхности топлива и под действием возмущающих сил разрушается.

Простые модели зоны газификации в виде двухфазной среды [22–24] не рассматривают роста пузырьков газовой фазы, в них газовая фаза образуется только в результате химического разложения твердой или жидкой фазы топлива. В более сложной модели [27] детально учитываются образование отдельных компонентов газовой фазы в результате химических реакций и частичное испарение жидкой фазы, но образование зародышей газовой фазы и рост пузырьков не рассматриваются. Такой подход не позволяет с хорошей точностью рассчитать распределение масс в зоне газификации и определить границу раздела между двухфазной средой и чистым газом. Пузырьки с газом или возможные струи газа в моделях [22–24, 27] на самом деле отсутствуют, среда наделена свойствами, не присущими реальным фазам. Это грубое приближение для такой сложной и чувствительной ко всяким изменениям области, как зона газификации.

Наиболее отчетливо пузырьки газа наблюдаются в зоне газификации дины (динитрооксиэтилнитрамина) [20]. Возможно, этому способствует низкая скорость горения, составляющая  $u \approx 0.03 \div 1.0$  мм/с в интервале давления  $p = 1 \div 100$  атм. Низкая скорость горения сочетается с широкой зоной химических реакций в твердой фазе ( $\approx 1$  мм) и примерно такой же толщиной жидкой пленки при  $p = 1$  атм. Наибольший размер пузырьков — около 0.75 мм, они плотно покрывают поверхность раздела жидкой и газовой фаз. Можно предположить [21], что в глубине такого парожидкого слоя находится двухфазная область, состоящая из микроскопических пузырьков и жидкости.

Приведенные экспериментальные данные и их краткий анализ позволяют сформулировать физическую картину газификации твердых топлив.

Схема превращений представлена на рис. 1, где условно введены три стадии газификации. Сначала твердая фаза превращается в жидкую фазу (зона I). После этого в жидкости начинают возникать зародыши ядер газовой фазы (зона II): в мельчайших областях накапливаются молекулы газовых продуктов разложения топлива во время хаотического теплового движения. Образованию таких газовых скоплений способствует более низкая

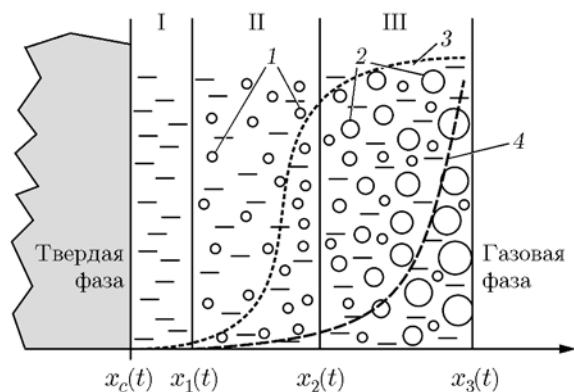


Рис. 1. Схема зоны газификации:

I — жидкая фаза без газов, II — жидкая фаза с зародышами ядер газовой фазы, III — жидкая фаза с растущими пузырьками газа; 1 — зародыши ядер газовой фазы, 2 — пузырьки из газовых продуктов разложения топлива и пара, 3 —  $n(x)$ , 4 —  $V(x)$ ;  $x_c(t)$  — граница раздела между твердой и жидкой фазами,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  — координаты условных границ между различными зонами,  $t$  — время

энергия объединенных в группу молекул газа, чем их энергия в разъединенном состоянии. Полная энергия молекулы газа в жидкости складывается из кинетической и потенциальной энергии, обе примерно одного порядка величины. В газе полная энергия молекулы в основном состоит из кинетической части.

В свою очередь, наиболее мелкие частицы газа имеют тенденцию к объединению в более крупные частицы. Это тоже энергетически выгодное состояние: поверхностная энергия двух частиц газа больше поверхностной энергии объединенной системы. Другой причиной слияния мелких частиц газа в крупные частицы является их броуновское движение.

В зоне II идет быстрый рост числа зародышей новой фазы  $n$ . Здесь в ходе химических реакций выделяется значительное количество газов. Зародыши представляют собой мельчайшие пузырьки газа, они нестабильны, часть из них разрушается из-за неустойчивости. Поэтому далее в качестве зародыша ядра газовой фазы рассматривается статистически осредненный по большому числу эволюционирующих пузырьков. Относительное увеличение объема  $V$  среднего по размеру зародыша в зоне II происходит медленно. На рис. 1 размеры пузырьков значительно меньше ширины зоны газификации  $x_g = x_3 - x_1$ , что кажется нереальным. Отношение минимального диаметра газового зародыша  $d_{\min}$  к ширине  $x_g$  имеет принципиальное значение при построении модели газификации. Ниже представлена оценка диаметра  $d_{\min}$  и показано, что он примерно в 100 раз меньше ширины зоны газификации  $x_g$ .

В зоне III наблюдается пузырьковое кипение жидкости, здесь возникшие в зоне II зародыши являются центрами парообразования. На начальной стадии кипения зародыши содержат в основном газовые продукты химической реакции. Молекул жидкости в них относительно мало. Низкое парциальное давление паров жидкой фазы в объеме пузырька и высокая температура создают благоприятные условия для парообразования. Здесь число пузырьков газа  $n$  меняется относительно медленно, но быстро растет объем пузырьков  $V$ .

Во всех областях скорость химической реакции лимитируется испарением. Испарение забирает значительную часть тепла, выделяющегося в ходе химической реакции. Поэтому доля химически прореагировавшего топлива относительно мала, образование продуктов реак-

ции и их влияние на течение химической реакции можно не учитывать.

Другие физические особенности модели рассматриваются ниже при построении уравнений математической модели.

### УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАССЫ ГАЗА В ПУЗЫРЬКЕ, МАССОВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЖИДКОЙ ФАЗЫ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Будем рассматривать двухфазную среду из жидкости (фаза 1) и газа (фаза 2) (соответственно индексы 1 и 2 указывают на принадлежность к этим фазам). Жидкость характеризуется плотностью  $\rho_1$ , относительной объемной концентрацией  $r_1$ , числом молекул жидкой фазы в единице объема  $N_1$ . Химические реакции разложения вещества топлива в жидкой фазе представлены одной реакцией  $A \rightarrow \nu B$  с энергией активации  $E$ : каждая молекула жидкости  $A$  распадается на  $\nu$  молекул газообразного продукта  $B$ . Газ может состоять из различных веществ, имеет плотность  $\rho_2$  и относительную объемную концентрацию  $r_2$ .

В области III в объеме пузырька содержатся молекулы газов, образованных в результате химических реакций, и молекулы паров жидкости.

Двухфазная среда характеризуется плотностью  $\rho$  и числом молекул в единице объема  $N$ . Уравнение для плотности ее состава:

$$\rho = \rho_1 r_1 + \rho_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = 1.$$

Число молекул  $N$  в двухфазной среде является переменной величиной по двум причинам: меняется плотность двухфазной среды при фазовом превращении; в химической реакции из одной молекулы жидкости образуются  $\nu > 1$  молекул газа. Изменение числа молекул  $\Delta N$  из-за химической реакции приводит к изменению количества молекул жидкости  $\Delta N_1$ , пара  $\Delta N_2'$  и газовых продуктов реакции  $\Delta N_2'' = \nu(\Delta N_1 - \Delta N_2')$ . В результате

$$\begin{aligned} \Delta N &= \Delta N_1 + \Delta N_2' + (\Delta N_1 - \Delta N_2')\nu = \\ &= (\Delta N_1 - \Delta N_2')(\nu - 1). \end{aligned}$$

Относительное изменение числа молекул

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta N_1 - \Delta N_2'}{N} (\nu - 1).$$

Если значение  $\nu$  не слишком велико и объем пузырька растет в основном за счет испарения, то

$\Delta N/N \ll 1$  и изменением  $N$  за счет химической реакции можно пренебречь.

Часть жидкой фазы превращается в пар, испарившиеся молекулы переходят в газовую фазу, которая представлена большим количеством пузырьков. Рассмотрим пузырек газа объемом  $V$  и площадью поверхности  $S$ . Газ поступает из жидкой фазы внутрь пузырька двумя путями: образовавшиеся в химической реакции в жидкой фазе молекулы газов проникают в объем  $V$  через поверхность  $S$ ; на внутренней поверхности пузырька происходит испарение с массовой скоростью  $j$ , кг/(м<sup>2</sup>·с).

Из образующихся в реакции молекул газа только часть попадает в объем пузырька, так как коэффициенты диффузии молекул в жидкости очень малы [28]. Ниже считается, что поток газовых продуктов химической реакции много меньше потока пара. Для массы газа в пузырьке  $M_b$  уравнение сохранения имеет вид

$$\frac{dM_b}{dt} = jS, \quad S = (36\pi)^{1/3} \left( \frac{M_b}{\rho_2} \right)^{2/3}. \quad (1)$$

Запишем уравнение для массовой концентрации жидкого топлива в двухфазной среде. Скорость химической реакции в такой среде

$$W_t = N(1 - C)k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (2)$$

где  $C$  — относительная объемная концентрация молекул продукта реакции,  $k = \text{const}$ ,  $T$  — температура,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $E$  — энергия активации. Для  $C$  можно принять уравнение [29]

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + (1 - C)k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (3)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии молекул газа в двухфазной среде.

Рассмотрим теперь тепловые процессы. В двухфазной среде в результате химических реакций с одной молекулой выделяется энергия  $q$ , Дж. Испарение в пузырьках происходит с поглощением тепла  $L$ , Дж/кг. Мощность поглощения тепла определяется уравнением

$$W_b = N_b L \frac{dM_b}{dt} = N_b L j S \text{ [Дж/(м}^3 \cdot \text{с)]}. \quad (4)$$

Молекулярный перенос тепла вдоль координаты  $x$  дает мощность рассеяния энергии

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности двухфазной среды. Тогда уравнение сохранения энергии можно записать в виде

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + qW_t - W_b,$$

где  $c$  — удельная теплоемкость двухфазной среды,  $c = \text{const}$ . Используя определения (1), (2), (4), получаем

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q\rho(1-C)k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) - N_b L_j S. \quad (5)$$

В множителе при экспоненте сделаны следующие преобразования с использованием числа Авогадро  $N_A$  и молярной массы жидкости (топлива)  $\mu$ :

$$qN = \frac{qN_A}{\mu} \frac{\mu N}{N_A} = \rho Q, \quad Q = \frac{qN_A}{\mu}, \quad \rho = \frac{\mu N}{N_A},$$

где  $Q$  — тепловой эффект химической реакции, Дж/кг.

### УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ. ОДНОГРУППОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Строгое математическое обоснование одногруппового приближения сопряжено с большими трудностями. Поэтому здесь приведены только качественные рассуждения. На рис. 2, а

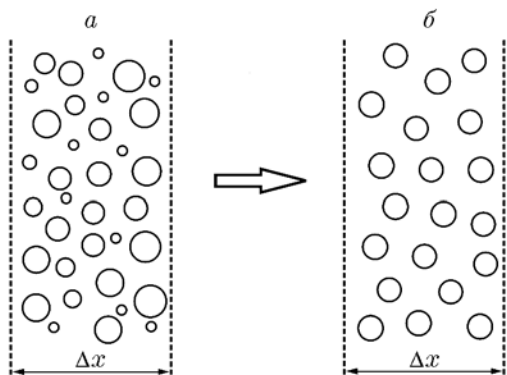


Рис. 2. Преобразование многогрупповых пузырьков в одну группу

показана предполагаемая картина динамики пузырьков. Пузырьки имеют различные размеры, их можно разбить на группы, в каждую из которых попадают пузырьки размерами из заданного интервала. В объеме с малым пространственным интервалом  $\Delta x$  проводится осреднение частиц по размерам. В результате получается картина динамики пузырьков, где имеется только одна группа с общим размером частиц (рис. 2, б), изменяющимся в пространстве и времени.

Построение уравнения для концентрации пузырьков начнем с оценки их диффузионного переноса. Характеризующий такой перенос коэффициент диффузии  $D_b$  можно определить по формуле А. Эйнштейна (см. [30])

$$D_b = \frac{RT}{3\pi N_A \eta d} = \frac{RT}{3\sqrt{\pi} N_A \eta \sqrt{S}}, \quad (6)$$

где  $d$  — диаметр пузырька,  $\eta$  — динамическая вязкость жидкой фазы. Для использования формулы (6) необходимо знать диаметр  $d$  (или площадь поверхности  $S$ ).

Теория образования газовых зародышей в чистых жидких фазах хорошо разработана [31, 32] и позволяет находить минимальный размер зародыша  $d_{\min}$  ( $\approx 10^{-6}$  м) по давлению насыщения и действительному давлению паров жидкости.

Газовые зародыши и пузырьки могут образовываться в твердой фазе, чаще всего это происходит в уране и его сплавах в результате ядерных реакций [33, 34]. Минимальный размер зародыша определяется межатомными силами в кристаллической решетке металла и равен  $d_{\min} \approx 10^{-10}$  м [34].

В рассматриваемом здесь случае зародыши образуются из растворенных в жидкости молекул газов. Для определения  $d_{\min}$  воспользуемся следующими рассуждениями. На начальной стадии, когда пузырьки еще являются зародышами, их образование идет случайным образом. Вызвано оно флуктуациями больших групп молекул газовых продуктов химической реакции. Рассмотрим в жидкой фазе группу молекул газа, отделившихся от жидкой фазы и случайно оказавшихся вместе. Вероятность такого события достаточно велика: распад одной молекулы жидкости приводит к образованию в локальном объеме  $\nu \gtrsim 5$  молекул газа [27]. Эта группа молекул начнет сжиматься силами поверхностного натяжения, из-за флуктуации такой микроскопический объем газа постоянно

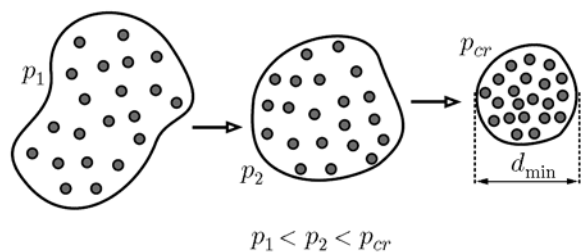


Рис. 3. Формирование минимального размера  $d_{\min}$

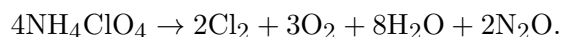
деформируется и уменьшается, давление растет еще больше (рис. 3).

Сжатие увеличивает энергию молекул газа и вероятность их возвращения обратно в жидкую фазу. Самый простой способ противостоять такому разрушительному действию — это молекулам газа вести себя как молекулы жидкости, поскольку микроскопические объемы жидкости одного вида могут свободно существовать внутри другой жидкости. Но это возможно только вблизи критической точки, где различие физических свойств газовой и жидкой фаз становится малым [30]. Поэтому можно принять условие механического равновесия:

$$\frac{4\sigma}{d_{\min}} = p_{cr}, \text{ т. е. } d_{\min} = \frac{4\sigma}{p_{cr}}, \quad (7)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $d_{\min}$  — минимальный диаметр зародыша или минимальный диаметр пузырька газовой фазы,  $p_{cr}$  — критическое давление газовых продуктов химической реакции.

Поскольку состав продуктов химической реакции сложный, для газов в качестве критического давления  $p_{cr}$  необходимо принимать значение давления при критической температуре  $T_{cr}$ , меньшей или близкой к температуре зоны газификации  $T_g$ . Например, при  $T_g < 300$  °С перхлорат аммония разлагается по схеме



Более половины (80 %) продуктов реакции составляют молекулы воды ( $T_{cr} \approx 374$  °С,  $p_{cr} \approx 22$  МПа), хлора ( $T_{cr} \approx 144$  °С,  $p_{cr} \approx 7.6$  МПа) и закиси азота ( $T_{cr} \approx 36.5$  °С,  $p_{cr} \approx 7.2$  МПа) [35]. Они могут образовывать в пузырьках малоподвижные связанные состояния, подобные молекулам жидкости. Молекулы кислорода ( $T_{cr} \approx -144$  °С) остаются подвижными, и с большой

вероятностью они покинут объем пузырька. Флуктуации в пузырьке очень велики, находящиеся в нем вода, хлор и закись азота попеременно переходят в жидкое состояние и обратно в газообразное.

Выполнение условия механического равновесия (7) не означает выполнения термодинамического равновесия. В процессе сжатия (см. рис. 3) температура газа внутри пузырька возрастает и становится выше температуры окружающей жидкости. Тогда часть молекул газа возвращается в жидкую фазу, но если в жидкости достаточно много относительно «холодных» молекул газа, то им энергетически выгодно оказаться в объеме пузырька. Такая тенденция к выравниванию температуры следует из второго закона термодинамики. Так «холодные» молекулы газа занимают место ушедших молекул с высокой кинетической энергией, и этим обеспечивается относительная стабильность зародыша газовой фазы. Поскольку в таком пузырьке давление насыщенных паров жидкости больше парциального давления паров, на следующей стадии начинается рост пузырька за счет поступления молекул жидкости. Таким образом, образование пузырьков пара в присутствии газовых продуктов реакции может происходить при меньших размерах зародышей, чем в чистых жидкостях.

Для приближенного определения диаметра  $d_{\min}$  примем  $\sigma \approx 0.1$  Н/м,  $p_{cr} \approx 22$  МПа. Тогда  $d_{\min} \approx 10^{-8}$  м. Коэффициент диффузии (6) при динамической вязкости  $\eta \approx 10^{-3}$  кг/(м·с) примерно равен  $D_b \approx 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с.

В диапазоне ракетного давления толщина жидкой фазы по различным оценкам [11, 14] около 2 ÷ 2.5 мкм, это примерно в 100 раз больше  $d_{\min}$  и согласуется с изображенными на рис. 1 соотношениями размеров пузырьков и ширины зоны газификации. При скорости горения  $u \approx 1$  мм/с пузырек находится в жидком слое примерно  $10^{-3}$  с. За это время его диффузионное смещение составляет  $\Delta x \approx (D_b \Delta t)^{1/2} \approx 1$  мкм, что сравнимо с шириной двухфазной области. Следовательно, при моделировании процессов в зоне газификации диффузионный перенос пузырьков необходимо учитывать.

Зародыши могут образовать только группы молекул, преодолевших потенциальный барьер, равный работе образования пузырька  $\varepsilon_g = \sigma S_{\min} = \pi \sigma (d_{\min})^2$ . Вероятность такого события равна  $P_g = k_g \exp(-\varepsilon_g/k_B T)$  [32],

$k_g = \text{const}$ ,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Поэтому масса газа, идущая на образование зародышей, равна  $m_g P_g N_{pr} r_1$ , где  $m_g$  — средняя масса молекул газа,  $N_{pr}$  — концентрация газовых продуктов химической реакции в жидкой фазе. Присутствие здесь множителя  $r_1$  объясняется тем, что жидкая фаза занимает в двухфазной среде объемную долю  $r_1$ .

Из произвольных  $\Delta N_1$  молекул жидкости образуется  $\nu \Delta N_1$  молекул газа:

$$N_{pr} = \nu \Delta N_1 = \nu(N_{10} - N_1),$$

где  $N_{10}$  — начальная концентрация молекул жидкой фазы, очевидно, что  $N_{10} = N$ . Таким образом, зародыши образуются из массы газа

$$m_g P_g \nu(N_{10} - N_1) r_1 =$$

$$= m_g P_g \nu N_{10} r_1 \left(1 - \frac{N_1}{N_{10}}\right) =$$

$$= m_g P_g \nu N_{10} r_1 (1 - r_1), \quad r_1 = \frac{N_1}{N_{10}} = \frac{N_1}{N}.$$

Поделив эту массу на минимальную массу зародыша  $m_{\min}$ , после простых преобразований получаем мощность источника зародышей в единице объема за единицу времени:

$$W_b = \frac{m_0 N_{10}}{m_{\min}} r_1 (1 - r_1) k_g \exp\left(-\frac{E_g}{RT}\right),$$

$$m_0 = \nu m_g, \quad E_g = \varepsilon_g N_A.$$

Появившийся параметр  $E_g$  — это энергия активации образования зародышей [32]. Функция  $W_b$  равна нулю в двух предельных случаях: при  $r_1 = 1$ , т. е. в отсутствие молекул газов в жидкости, и при  $r_1 = 0$ , т. е. в отсутствие жидкой фазы в произвольном объеме.

Минимальная масса зародыша определяется как произведение минимального объема пузырька  $V_{\min}$  на плотность газа в критической точке  $\rho_{cr}$ :

$$m_{\min} = \rho_{cr} V_{\min} = \rho_{cr} \frac{\pi d_{\min}^3}{6}, \quad V_{\min} = \frac{\pi d_{\min}^3}{6}.$$

Обозначим концентрацию зародышей символом  $N_b$ , скорость ее изменения можно определить уравнением

$$\frac{dN_b}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_b \frac{\partial N_b}{\partial x} \right) + W_b.$$

В нем не учитывается возможность коагуляции пузырьков, поэтому оно справедливо, если за время существования пузырьков они не успевают столкнуться и образовать новый пузырек. Учитывая связь  $r_1 = 1 - r_2$  и приведенное выше уравнение для  $W_b$ , запишем

$$\frac{dN_b}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_b \frac{\partial N_b}{\partial x} \right) + \frac{m_0 N_{10}}{m_{\min}} (1 - r_2) r_2 k_g \exp\left(-\frac{E_g}{RT}\right),$$

где  $r_2 = N_b V = N_b M_b / \rho_2$  — это относительная объемная концентрация газовой фазы.

Комплекс  $m_0 N_{10} / m_{\min}$  представляет собой максимально возможную концентрацию пузырьков в гипотетическом случае отсутствия испарения, когда вся жидкая фаза превращается напрямую в газовые продукты. Поэтому вместо  $N_b$  введем новую безразмерную переменную  $\varphi = N_b m_{\min} / (m_0 N_{10})$  и получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(1 - \frac{M_b \rho_1}{m_{\min} \rho_2} \varphi\right) \frac{M_b \rho_1}{m_{\min} \rho_2} \varphi k_g \exp\left(-\frac{E_g}{RT}\right). \quad (8)$$

Справедливость приведенного выше уравнения для  $N_b$  или (8) определяется величиной  $\varphi$ , эти уравнения применимы при  $\varphi \ll 1$ .

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение состояния двухфазной среды  $\rho(p, T)$  определим через соответствующие уравнения жидкой фазы  $\rho_1 = \text{const}$  и газа  $p = \rho_2 RT$ , где  $R$  — газовая постоянная. За основу возьмем формулу состава двухфазной среды  $\rho = \rho_1 r_1 + \rho_2 r_2$  и сделаем следующие преобразования:

$$\rho = \rho_1 (1 - r_2) + \rho_2 r_2 = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2) \frac{N_b M_b}{\rho_2}, \quad (9)$$

$$\rho_2 = \frac{p}{RT}.$$

Плотность жидкой фазы  $\rho_1$  — величина переменная, поскольку часть молекул газовых продуктов химической реакции остается в жидкости. Накопление молекул газов в жидкости должно снижать плотность  $\rho_1$ . Но уравнение (8) получено в предположении, что образование

газовой фазы происходит в основном за счет испарения, газообразование за счет химической реакции играет второстепенную роль. Принятие такого представления позволило считать общее число молекул  $N$  постоянным, тогда постоянной будет и плотность  $\rho_1$  (и молярная масса  $\mu$ ).

Образование пузырьков газа и их рост приводят к существенному снижению плотности двухфазной среды вдоль координаты  $x$ . Это сопровождается движением среды вдоль координаты  $x$  со скоростью  $v$ . Поэтому необходимо еще одно уравнение для нахождения скорости  $v$ . Такое уравнение выражает закон сохранения массы и для двухфазной среды имеет вид [36]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

Для расчета массовой скорости  $j$  на поверхности пузырька (уравнение (1)) можно использовать уравнение Герца — Кнудсена [37]

$$j = \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}(p_s - p_{in}). \quad (10)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент аккомодации,  $p_s$  — давление равновесного испарения,  $p_{in} = p_* + 4\sigma/d = p_* + 4\sigma/\sqrt{\pi S}$  — давление внутри пузырька,  $p_*$  — парциальное давление пара. Давление  $p_s$  определяем по закону Клапейрона — Клаузиуса [30]:

$$p_s = p_b \exp\left[\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T}\right)\right], \quad (11)$$

где  $p_b$ ,  $T_b$  — давление и температура равновесного испарения.

Приведенное ниже дополнительное уравнение позволяет определить местоположение границы  $x_3(t)$ , отделяющей двухфазную среду от газовой фазы. Объем пузырьков не может расти неограниченно, в процессе роста пузырьки всё плотнее будут заполнять ограниченное пространство. В результате они разрушатся и образуется граница раздела фаз. Естественно предположить, что разрушение пузырьков произойдет, когда у них не будет возможности расти дальше из-за сильного уплотнения и возникшего дефицита массы жидкости для образования пара. Таким образом, задача нахождения границы  $x_3(t)$  приводится к геометрической задаче о максимальной упаковке сфер. В используемом здесь одногрупповом приближении все

пузырьки вблизи точки  $x = x_3(t)$  имеют одинаковые размеры. Обратная величина концентрации пузырьков  $N_b^{-1}$  — это средний объем, занимаемый пузырьком в среде. Произведение  $N_b V$  — относительная объемная концентрация пузырьков  $r_2$ . Наиболее плотная упаковка одинаковых сфер достигается при  $N_b V = r_{2,\max} \approx 0.74$  [38]. После использования здесь равенства  $V = M_b/\rho_2$  и ввода числового параметра  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) вместо  $r_{2,\max}$  условие возникновения раздела фаз запишем в общем виде:

$$N_b V = \frac{M_b N_b}{\rho_2} = \varepsilon. \quad (12)$$

Это условие для нахождения координаты  $x_3(t)$ . Ясно, что в многогрупповом приближении  $\varepsilon \approx 1$ .

### ПРОСТЫЕ СВОЙСТВА ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗОНЫ ГАЗИФИКАЦИИ

Для качественного моделирования процессов в зоне газификации воспользуемся основными уравнениями (1), (3), (5), (8), (9) и уравнением сохранения массы. В них полные производные по времени заменим частными производными по правилу [36]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}.$$

Тогда, учитывая уравнение сохранения массы и связи  $N_b = m_0 N_{10} \varphi / m_{\min}$ ,  $N_{10} = \rho_1 N_A / \mu$  и  $m_0 = \mu / N_A$ , основные уравнения модели газификации топлива можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{Q}{c} (1 - C) k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) - \frac{L}{c} W, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + (1 - C) k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial M_b}{\partial t} + v \frac{\partial M_b}{\partial x} = jS, \quad (13)$$

$$S = (36\pi)^{1/3} \left( \frac{M_b}{\rho_2} \right)^{2/3},$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + W'_b,$$

$$W'_b = \left( 1 - \frac{\rho_1 M_b}{\rho_2 m_{\min}} \varphi \right) \frac{\rho_1 M_b}{\rho_2 m_{\min}} \varphi k_g \exp \left( -\frac{E_g}{RT} \right),$$

$$W = \frac{\rho_1 j S}{m_{\min} \rho} \varphi.$$

Эта система дополняется уравнением для коэффициента диффузии (6), уравнениями состояния двухфазной среды (9) и идеального газа  $p = \rho_2 R_g T$ , уравнениями (10), (11) для массовой скорости испарения  $j$  и условием возникновения границы между фазами (12). Если учесть возможность представления  $N_b = \rho_1 \varphi / m_{\min}$ , то условие (12) примет более удобную для использования форму

$$\frac{M_b \rho_1}{m_{\min} \rho_2} \varphi = \varepsilon.$$

Определим граничные условия. В системе (13) уравнения для  $M_b$  и  $\varphi$  используются только в интервале от  $x_c(t)$  до  $x_3(t)$ . Остальные уравнения справедливы в области  $x < x_3(t)$ , только в точке плавления  $x_3(t)$  необходимо учесть скачкообразное изменение потока тепла  $\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  на величину  $Q_m \rho_c u_c$ , где  $Q_m$  — теплота плавления,  $\rho_c$  — плотность твердой фазы,  $u_c = \frac{dx_c}{dt}$  — скорость движения границы раздела фаз. Координата  $x_c(t)$  находится из условия  $T(t, x = x_c(t)) = T_m$  — температура плавления. На границе  $x = x_c(t) \approx x_1(t)$  задаются начальная масса газа внутри пузырька  $M_{b0} = m_{\min}$ , скорость двухфазной среды  $v$  и концентрация пузырьков  $N_b$ . На начальной стадии роста пузырьки заполняются только газовыми продуктами химической реакции, их относительная объемная концентрация равна  $C_0 = C(x = x_c(t))$ . Некоторая их доля  $\chi$  ( $\chi < 1$ ) образует пузырьки, остальная часть остается растворенной в жидкости. Поэтому на границе твердой и жидкой фаз можно считать

$$V_{\min} N_b(x = x_c) = \chi C_0 \text{ или } N_b(x = x_c) = \frac{\chi C_0}{V_{\min}}.$$

Так определяется начальная концентрация пузырьков, имеющих минимальный объем  $V_{\min}$ . С переходом от функции  $N_b$  к безразмерной

функции  $\varphi$  граничные условия записываются в виде

$$x = x_c: \varphi = \chi \frac{C_0 m_{\min}}{\rho_1 V_{\min}}, \quad M_b = \rho_{cr} V_{\min}, \quad v = 0.$$

Химическая реакция идет и за пределами интервала  $x_c(t) < x < x_3(t)$ . Поэтому условия для  $C$  и  $T$  должны задаваться на бесконечности:  $C(t, x \rightarrow -\infty) = 0$ ;  $T(t, x \rightarrow -\infty) = T_0$  — начальная температура.

На правой границе  $x = x_3(t)$  задается поток тепла из газовой фазы  $j_g$  [6]. Химическая реакция в зоне газификации сильно замедляется ограниченностью в ней температуры, верхний ее предел находится вблизи температуры равновесного кипения. Это означает, что значительная часть газовой фазы вблизи границы может состоять из пара и  $C < 1$  или  $C \ll 1$ . Тогда тепловой поток  $j_g$  на правой границе будет частично определяться условиями дальнейшего разложения вещества пара на низкомолекулярные компоненты. В полном виде задача определения потока  $j_g$  не может быть решена, его вид зависит не только от свойств топлива, но и от технологических условий сжигания твердого топлива [1, 7, 14]. На границе  $x_3(t)$  пузырьки разрушаются и потенциальная энергия, связанная с избыточным давлением  $4\sigma/d$ , переходит в кинетическую энергию возмущенного движения массы пара пузырька и окружающей среды с характерной скоростью  $\Delta v$ . Это означает отбор тепловой энергии в виде потока  $j_{pt} = N_b v \varepsilon_k$ , где  $\varepsilon_k$  — кинетическая энергия, возникающая при разрушении одного пузырька. Можно принять оценку  $\varepsilon_k = M_b (\Delta v)^2$ , поскольку выбрасывается масса газа  $M_b$ . Тогда  $j_{pt} = v N_b M_b (\Delta v)^2$ . Комплекс  $v N_b M_b$  — это масса газа, проходящего за единицу времени через единичную площадь, т. е. массовая скорость горения  $m'$ . Поэтому

$$j_{pt} = m' (\Delta v)^2. \quad (14)$$

Этот поток с обратным знаком должен быть добавлен к потоку  $j_g$ . Квадрат скорости возмущения  $(\Delta v)^2$  играет такую же роль, как и теплота фазового перехода  $L$ . Но между ними есть принципиальное отличие:  $(\Delta v)^2$  — это характеристика процесса, а  $L$  характеризует вещество. Частицы газа, имеющие к средней скорости характерную добавку порядка  $\Delta v$ , со временем ее теряют за счет работы силы трения.

В интегральной форме закон сохранения энергии не нарушается, потоком  $j_{pt}$  часть поступающего из газовой фазы тепла возвращается обратно.

Если есть обдув, скорость  $\Delta v$  рассчитывается по возмущениям «собственной» турбулентности с учетом влияния обдувающего потока.

Заметим, из-за малых размеров пузырьков их концентрация становится огромной. Если вблизи поверхности  $x_3(t)$  диаметр пузырьков  $d \approx 10^{-7}$  м, то из условия (12) при  $\varepsilon \approx 1$  находим  $N_b \approx 10^{21}$  м $^{-3}$ .

При диаметре зародышей  $d_{\min} \approx 10^{-8}$  м и типичных значениях  $\sigma \approx 10^{-2}$  Н/м энергия активации равна  $E_g \approx 3 \cdot 10^5$  Дж/моль. Это примерно в 10 раз больше, чем для дины ( $E \approx 3.5 \cdot 10^4$  Дж/моль [21]), и в 3.4 раза больше, чем для октогена ( $E \approx 8.8 \cdot 10^4$  Дж/моль), при давлении 60 атм [39]. В первом случае (дина) ширина температурного интервала Семёнова, в котором существенно проявляется действие функции источника  $W'_b$ , примерно в 10 раз меньше ширины температурного интервала для скорости химической реакции. Во втором случае горения (октоген) такое различие меньше в 3.4 раза. С формальной математической точки зрения это дает основание считать зону газификации достаточной узкой и пренебречь в системе (13) уравнениями с четвертого по восьмое. Остаются только первые три уравнения, причем в первом из них отрицательный источник  $-LW/c$  переносится в граничное условие. Тогда получаются уравнения модели Беляева — Зельдовича [6]. Тем не менее приведенные различия  $E_g$  и  $E$  не означают существования максимума температуры внутри твердой фазы, на что указано в работах [6, 10]. Сильное выделение тепла в локальной области внутри твердой фазы приводит к плавлению топлива, после чего сразу же начинается процесс зарождения пузырьков и парообразования. Тогда повышение температуры остановится на уровне, определяемом равновесием между приходом энергии от химических реакций и расходом на испарение. Отвод тепла из зоны химических реакций (функция  $W$ ) обеспечивается совместным действием двух динамических параметров — поверхностью пузырьков  $S$  и их безразмерной концентрацией  $\varphi$ . Слабое парообразование на отдельных пузырьках может компенсироваться их большим числом и в сумме обеспечить высокое поглощение тепла на на-

чальном этапе роста зародышей. Кроме того, в первом уравнении системы (13) не учитывается расход энергии на образование поверхности пузырьков. В общем энергетическом балансе этот расход мощностью

$$W_\sigma = \sigma S_{\min} \frac{\partial N_b}{\partial t} \quad (15)$$

— малая величина. Но в самом начале зарождения пузырьков, когда  $\frac{\partial N_b}{\partial t}$  очень велико, затрата энергии на образование поверхности пузырьков может стать существенной. Другой случай необходимости учета (15) обсуждается ниже.

Предложенная выше модель двухфазной структуры зоны газификации твердого ракетного топлива может дать новое объяснение ряду известных экспериментальных фактов: регистрации звуков [19], конвективного движения [19–21], внезапного появления пены при резком отключении светового потока [25]. Для образования пены необходимо существование мелких газовых пузырьков в зоне газификации, пена является результатом роста таких пузырьков [25]. Горение октогена, гексогена и тетрила сопровождается звуком в виде шипения [19], что авторы [19] связывают с быстрым конвективным движением в жидкой фазе и называют его турбулентностью. Более простое объяснение происхождения звука — это появление волн сжатия при разрушении пузырьков. При их диаметре  $d = 10^{-7} \div 10^{-6}$  м и поверхностном натяжении  $\sigma \approx 10^{-2}$  Н/м избыточное давление в пузырьке составляет  $0.4 \div 4$  атм. Создаваемый им звуковой импульс чрезвычайно слабый. Но если концентрация пузырьков  $N_b$  на поверхности раздела  $x_3(t)$  велика, то суммарной амплитуды звуковых волн будет достаточно для того, чтобы их услышать. Малоамплитудные волны от большого числа хаотически разрушающихся пузырьков воспринимаются как шипение. Разрушение пузырьков приводит к возникновению нерегулярных колебаний не только в газовой фазе, но и в двухфазной области. Поэтому наблюдающееся [19–21] в зоне газификации конвективное движение высокой интенсивности можно связать с разрушением пузырьков, и оно, несомненно, является турбулентным.

Существует нижняя граница размера пузырьков, ниже которой звуковые возмущения сильно ослабевают за счет действия сил вязкости. Число Рейнольдса  $Re = d\Delta v/\nu_g$  умень-

шается вместе с  $d$ , где  $\nu_g$  — вязкость газа, но растет разность давлений внутри и снаружи пузырька:  $\Delta p \sim 4\sigma/d$ . Полагая также  $\Delta p \sim \rho_2(\Delta v)^2$ , примем следующую оценку скорости возмущенного газа:

$$\Delta v \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_2}} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_2 d}}.$$

При температуре в зоне газификации  $600 \div 700$  К коэффициент поверхностного натяжения составляет  $\sigma \approx 10^{-2}$  Н/м, плотность  $\rho_2 \approx 0.1$  кг/м<sup>3</sup>. При диаметре пузырьков  $d \approx 10^{-6} \div 10^{-7}$  м возмущения скорости порядка  $\Delta v \approx 10^2 \div 10^3$  м/с. Это существенно больше наблюдаемой скорости роста пузырьков  $10 \div 20$  м/с [19]. Поэтому конвективное движение в зоне газификации, скорее всего, вызвано разрушением пузырьков.

Рассмотрим число Рейнольдса с приведенным выше значением  $\Delta v$ :

$$\text{Re} \sim \frac{d}{\nu_g} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_2 d}} = \frac{1}{\nu_g} \sqrt{\frac{\sigma d}{\rho_2}}.$$

Силы вязкости сильно замедляют скорость разрушения пузырьков, если  $\text{Re} \ll 1$ . Отсюда получаем оценку ( $\rho_2 \nu_g \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$  кг/(м·с))

$$d \ll d_* = \frac{\rho_2 (\nu_g)^2}{\sigma} \approx 10^{-8} \text{ м.}$$

Пороговый диаметр пузырьков  $d_* \approx d_{cr} \approx 10^{-8}$  м, т. е. в реальных условиях не будет ослабления звуковых импульсов.

Таким образом, приведен еще один путь генерации «собственной» турбулентности, сконцентрированной в малой области вблизи зоны газификации. Расчет таких ее характеристик, как турбулентный коэффициент переноса, может быть выполнен на основе результатов нахождения параметров гидродинамических возмущений, возникающих при разрушении пузырьков. Для этого волну сжатия от лопнувшего пузырька назовем флуктуацией на фоне общего множества всех пузырьков. Каждый пузырек с номером  $i$  размером  $d_i$  генерирует характерное возмущение скорости  $\Delta v_i$  в течение времени  $t_i$ . Поскольку эти параметры находятся из детерминированных уравнений, их статистические распределения коррелируют со статистическим распределением размеров пузырьков, которое можно найти из экспериментальных

наблюдений и получить средние значения скорости  $\Delta v$  и времени  $t_r$ . Для расчета, например, турбулентного коэффициента «диффузии»  $D_t$  можно воспользоваться формулой  $D_t = \text{const}(\Delta v)^2 t_r$  [11].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предварительный простейший анализ показал, что предложенная модель двухфазной структуры зоны газификации твердого ракетного топлива может дать новое объяснение ряду известных экспериментальных фактов. Для объяснения других экспериментальных результатов требуется детальный анализ на основе решения уравнений системы (13) и учета факторов, представленных уравнениями (14) и (15). Необходимо отдельно рассмотреть вопрос о минимальном размере зародыша из смеси газов с различными критическими температурами и давлениями.

Остается неясным способ расчета коэффициента диффузии  $D$  и теплопроводности  $\lambda$  в двухфазной среде. «Собственная» турбулентность сильно усложняет такой расчет и, как стало ясно, может быть генерирована разрушающимися пузырьками. Сконцентрированная в окрестности зоны газификации, она характеризуется коэффициентом переноса  $D_t$  и производит отрицательный тепловой поток  $j_{pt}$  (14).

С увеличением давления до нескольких мегапаскалей все характерные масштабы сильно уменьшаются [20], пламя в газовой фазе приближается к зоне газификации. Еще большие давления могут привести к исчезновению области III (см. рис. 1). Формально уравнения (13) могут описывать и такой путь газификации, когда  $\varphi \rightarrow 1$  на поверхности раздела жидкой и газовой фаз (тогда уравнение для  $M_b$  становится лишним, в правую часть уравнения для  $T$  вместо  $-LW/c$  добавляется (15) с отрицательным знаком). В этом случае  $N_b \rightarrow m_0 N_{10}/m_{\min}$  и превращение твердой фазы в газовые продукты реакции происходит через образование только зародышей с минимальным диаметром  $d_{\min}$ . Соответственно модель газификации существенно упрощается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Теория** горения порохов и взрывчатых веществ / под ред. О. И. Лейпунского, Ю. В. Фролова. — М.: Наука, 1982.

2. Манелис Г. Б., Назин Г. М., Рубцов Ю. И., Струнин В. А. Термическое разложение и горение взрывчатых веществ и порохов. — М.: Наука, 1996.
3. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Анализ современных моделей стационарного горения смесевых твердых топлив // Физика горения и взрыва. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 3–15.
4. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Анализ моделей горения энергетических веществ с полностью газообразными продуктами реакции // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 24–40.
5. Бекстед М. В. Современный прогресс в моделировании горения твердого топлива // Физика горения и взрыва. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 4–24.
6. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е., Рычков А. Д. Неустойчивость модели горения с испарением на поверхности и перегревом в к-фазе // Физика горения и взрыва. — 1997. — Т. 33, № 1. — С. 43–50.
7. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. — М.: Наука, 1973.
8. Sabdenov K. O., Dueck J., Erzada M. Limits of steady burning propellants in the phenomenological theory using effective initial temperature // J. Therm. Sci. Technol. — 2015. — V. 10, N 1. — DOI: 10.1299/jtst.2015jtst0006.
9. Sabdenov K. O., Dueck J. Limits of stable combustion in an engine of ultra-small spacecrafts // Frontiers in Aerospace Eng. — 2016. — V. 5, N 1. — P. 49–64.
10. Струнин В. А., Манелис Г. Б. Об устойчивости стационарного процесса горения ВВ, лимитируемого реакцией в к-фазе // Физика горения и взрыва. — 1971. — Т. 7, № 4. — С. 498–501.
11. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эрозионное горение. Проблемы моделирования // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 47–58.
12. Сабденов К. О. Теория нестационарного горения твердых ракетных топлив. — Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2006.
13. Сабденов К. О. Неустойчивое горение твердых ракетных топлив. Проблемы и успехи моделирования. — Saarbrücken, Germany: Lambert Academy Publishing GmbH & Co. KG, 2012.
14. Timnat Y. M. Advanced Chemical Rocket Propulsion. — Academic Press, 1987.
15. Илюхин В. С., Левичек М. И., Марголин А. Д., Похил П. Ф. Исследование акустической неустойчивости горения порохов методом скоростной киносъемки // Вибрационное горение в некоторых модельных устройствах. — Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1970.
16. Roh T.-S., Tseng I.-S., Yang V. Effect of acoustic oscillation on flame dynamics of homogeneous propellants in rocket motors // J. Propul. Power. — 1995. — V. 11, N 4. — P. 640–650.
17. Apte S., Yang V. Unsteady flow evolution and combustion dynamics of homogeneous solid propellant in rocket motors // Combust. Flame. — 2002. — V. 131. — P. 110–131.
18. Cai W., Ma F., Yang V. Two-phase vorticoacoustic flow interactions in solid-propellant rocket motors // J. Propul. Power. — 2003. — V. 19, N 3. — P. 385–396.
19. Анников В. Э., Кондриков Б. Н. О влиянии диаметра заряда на скорость горения взрывчатых веществ // Физика горения и взрыва. — 1968. — Т. 4, № 3. — С. 350–357.
20. Максимов Э. И., Максимов Ю. М., Чуков В. Ф. Исследование горения динитроксида-этилнитрамина // Физика горения и взрыва. — 1971. — Т. 7, № 2. — С. 197–204.
21. Александров В. В., Болдырева А. В., Болдырев В. В., Тухтаев Р. К. Горение динитри при атмосферном давлении // Физика горения и взрыва. — 1973. — Т. 9, № 1. — С. 140–142.
22. Максимов Э. И., Мержанов А. Г. К теории горения конденсированных веществ // Физика горения и взрыва. — 1966. — Т. 2, № 1. — С. 47–58.
23. Margolis S. B., Williams F. A., Armstrong R. C. Influences of two-phase flow in the deflagration of homogeneous solids // Combust. Flame. — 1987. — V. 67, N 3. — P. 249–258.
24. Li S. C., Williams F. A., Margolis S. B. Effect of two-phase flow in a model for nitramine deflagration // Combust. Flame. — 1990. — V. 80, N 3. — P. 329–349.
25. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эффект Марангони при горении энергетических материалов с жидким слоем на поверхности // Физика горения и взрыва. — 1996. — Т. 32, № 2. — С. 141–142.
26. Сабденов К. О. Генерация гидродинамической неустойчивости в зоне газификации твердого ракетного топлива // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т. 52, № 6. — С. 70–82.
27. Liao Y.-C., Yangt V. Analysis of RDX monopropellant combustion with two-phase subsurface reactions // J. Propul. Power. — 1995. — V. 11, N 4. — P. 729–739.
28. Sherwood Th. K., Pigford R. L., Wilke Ch. R. Mass transfer. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1975.
29. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
30. Сивухин Д. В. Термодинамика и молекулярная физика. — М.: Физматлит, 2005.
31. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. — Л.: Наука, 1975.
32. Фольмер М. Кинетика образования новой фазы: пер. с нем. — М.: Наука, 1986.

33. **Ма Б. М.** Материалы ядерных энергетических установок: пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
34. **Физическое** материаловедение. Т. 4: Физические основы прочности. Радиационная физика твердого тела. Компьютерное моделирование. — М.: Изд-во МИФИ, 2008.
35. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам жидкостей и газов. — М.: Наука, 1972.
36. **Нигматуллин Р. И.** Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987.
37. **Knacke J., Stransky I. N.** Evaporation mechanism // Prog. Metal Phys. — 1956. — N 6. — P. 181–235.
38. **Слоэн Н. Дж. А.** Упаковка шаров // В мире науки. — 1984. — № 3. — С. 72–82.
39. **Зенин А. А., Пучков В. М., Финяков С. В.** Характеристики волн горения октогена при различных давлениях и начальных температурах // Физика горения и взрыва. — 1998. — Т. 34, № 2. — С. 59–66.

*Поступила в редакцию 14/IX 2016 г.,  
в окончательном варианте — 6/III 2017 г.*

---