

AMS subject classification: 49J20, 65N30

Априорные оценки ошибки метода конечных объемов для нелинейной задачи оптимального управления*

З. Лу^{1,2}, Л. Ли¹, Л. Као¹, С. Хоу³

¹Key Laboratory for Nonlinear Science and System Structure, Chongqing Three Gorges University, Chongqing, 404000, P.R. China

²Research Center for Mathematics and Economics, Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin, 300222, P.R. China

³Huashang College Guangdong University of Finance, Guangzhou, 511300, P.R. China

E-mails: zulianglux@126.com (Лу З.), linlix@126.com (Ли Л.), caolongzhou@126.com (Као Л.),
houchunjuanhao@163.com (Хоу С.)

Лу З., Ли Л., Као Л., Хоу С. Априорные оценки ошибки метода конечных объемов для нелинейной задачи оптимального управления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 273–287.

В данной статье исследуются априорные оценки ошибки для конечно-объемной элементной аппроксимации нелинейной задачи оптимального управления. В схемах используется дискретизация на основе метода конечных объемов. Для вариационного неравенства применяется метод вариационной дискретизации для получения управления. При некоторых разумных предположениях получены оценки ошибки оптимального порядка. Порядок аппроксимации переменных состояния, сопряженного состояния и управления — $O(h^2)$ или $O(h^2\sqrt{|\ln h|})$ в смысле L^2 -нормы или L^∞ -нормы. Представлен численный эксперимент для проверки теоретических результатов. В заключение даны выводы и планы будущих работ.

DOI: 10.15372/SJNM20170304

Ключевые слова: априорные оценки ошибки, нелинейная задача оптимального управления, метод конечных объемов, вариационная дискретизация.

Lu Z., Li L., Cao L., Hou Ch. A priori error estimates of finite volume method for nonlinear optimal control problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 273–287.

In this paper, we study a priori error estimates for a finite volume element approximation of a nonlinear optimal control problem. The schemes use discretizations base on a finite volume method. For the variational inequality, we use a method of the variational discretization concept to obtain the control. Under some reasonable assumptions, we obtain some optimal order error estimates. The approximate order for the state, costate, and control variables is $O(h^2)$ or $O(h^2\sqrt{|\ln h|})$ in the sense of L^2 -norm or L^∞ -norm. A numerical experiment is presented to test the theoretical results. Finally, we give some conclusions and future works.

Keywords: a priori error estimates, nonlinear optimal control problem, finite volume method, variational discretization.

*Работа выполнена при поддержке National Science Foundation of China (№ 11201510, № 11171251), Innovation Team Building at Institutions of Higher Education in Chongqing (№ CXTDX201601035), China Postdoctoral Science Foundation (№ 2015M580197), Chongqing Research Program of Basic Research and Frontier Technology (№ cstc2015jcyjA20001), Ministry of education Chunhui projects (№ Z2015139), Science and Technology Project of Wanzhou District of Chongqing.

1. Введение

Задачи оптимального управления играют все более важную роль в науке, технике и различных социальных и физических применениях. Их успешное решение должно проводиться с использованием эффективных численных методов. Метод конечных элементов — эффективный численный метод изучения дифференциальных уравнений в частных производных, и он широко используется для численного решения задачи оптимального управления. Задачам оптимального управления, описываемым линейными эллиптическими уравнениями, посвящены две пионерские работы по конечно-элементной аппроксимации: статьи Фалька [19] и Гевечи [20]. В [8–11, 13, 23–25, 29–31] авторы систематически используют метод конечных элементов для задач оптимального управления. Недавно было проведено широкое исследование адаптивного метода конечных элементов, и он стал одним из наиболее популярных методов научных вычислений и численного моделирования. Апостериорные оценки ошибки для адаптивной конечно-элементной дискретизации задач граничного управления исследовались в [22].

Метод конечных объемов является эффективным методом дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных. Благодаря свойству локальной консервативности и другим привлекательным свойствам метода конечных объемов, он широко используется для численной аппроксимации некоторых задач дифференциальных уравнений в частных производных. Со времени создания этого метода в литературе появилось множество исследований по математической теории. Ранние работы по методу конечных объемов описаны в статьях [2, 3, 6, 7, 14, 15, 17, 18]. В статье [2] Бэнк и Розе получили следующий результат: конечно-объемная аппроксимация сравнима с конечно-элементной аппроксимацией в H^1 -норме. При предположении, что $f \in H^1$, оптимальная оценка L^2 -ошибки была получена в [14, 18]. В статье [18] авторы представили оценки в H^1 -норме и максимум-норме. В [7] предложен неконформный метод конечных объемов и получены оценки ошибки в L^2 -норме и H^1 -норме. Наконец появилось два подхода к нахождению приближенного решения задач оптимального управления, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Один из них — метод оптимизации и последующей дискретизации. Другой сначала применялся к методам лагранжевых множителей для получения оптимальной системы, на непрерывном уровне он состоял из уравнения состояния, сопряженного уравнения и условия оптимальности, затем использовался численный метод для дискретизации полученной в результате системы.

Методы конечных объемов и конечных элементов обычно используются в вычислительной гидродинамике и вычислительной механике твердого тела, где метод конечных объемов традиционно ассоциируется с вычислительной гидродинамикой, а метод конечных элементов — с вычислительной механикой твердого тела. В общем, в методе конечных объемов используются два различных функциональных пространства (одно для пробного пространства и одно для проверочного пространства). Вследствие наличия двух различных пространств численный анализ труднее, чем анализ метода конечных элементов и конечно-разностного метода.

Цель нашей статьи — установить априорные оценки ошибки для конечно-объемной элементной аппроксимации нелинейных задач оптимального управления. В качестве первой попытки мы используем метод конечных объемов для дискретизации уравнения состояния и сопряженного уравнения задач оптимального управления. В [21] предложена концепция вариационной дискретизации для задач оптимального управления с ограничениями на управление. В этой концепции переменная управления дискретизируется не прямым образом, а путем проекции переменной дискретного сопряженного состояния. Затем мы получим некоторые оценки ошибки оптимального порядка при приемлемых

предположениях. Кстати, порядок аппроксимации переменных состояния, сопряженного состояния и управления — $O(h^2)$ или $O(h^2\sqrt{|\ln h|})$ в смысле L^2 -нормы или L^∞ -нормы.

В данной работе мы используем стандартное обозначение $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева на Ω с нормой $\|v\|_{m,p}^p$, задаваемой как $\|v\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$, и полу-нормой $|v|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$. Положим $W_0^{m,p}(\Omega) = \{v \in W^{m,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Для $p = 2$ обозначим $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$ и $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}$. Пусть $\|\cdot\|_\infty$ обозначает максимум-норму, $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$, $\|\cdot\|_{0,4} = \|\cdot\|_{L^4(\Omega)}$. Как обычно, мы используем (\cdot, \cdot) для обозначения $L^2(\Omega)$ -скалярного произведения.

В данной статье мы рассматриваем следующие нелинейные задачи оптимального управления:

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}} \left(\frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \tag{1.1}$$

$$-\text{div}(A\nabla y) + \phi(y) = f + u \quad \text{в } \Omega, \tag{1.2}$$

$$y = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная выпуклая многоугольная область с границей $\partial\Omega$, f и $y_d \in L^2(\Omega)$ или $H^1(\Omega)$, U_{ad} определяется как

$$U_{\text{ad}} = \{u \in L^2(\Omega) : a \leq u(x) \leq b \text{ п. в. в } \Omega, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Кроме того, предположим, что матрица коэффициентов $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ является симметричной положительно определенной матрицей и имеется постоянная $c > 0$ такая, что для любого вектора $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X}^t A \mathbf{X} \geq c \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{R}^2}^2$. Предположим, что $\phi(y)$ удовлетворяет локальному условию Липшица, функция $\phi(\cdot) \in W^{2,\infty}(-R, R)$ для любого $R > 0$, $\phi'(y) \in L^2(\Omega)$ для любого $y \in H^1(\Omega)$ и $\phi' \geq 0$.

Сначала применим метод лагранжевых множителей (1.1)–(1.3) и получим оптимальную систему. Затем используем метод конечных объемов для дискретизации уравнения состояния и сопряженного уравнения системы. Для условия оптимальности (вариационного неравенства) мы используем концепцию вариационной дискретизации для получения управления. Предположим, что (y_h, p_h, u_h) — численное решение задачи (1.1)–(1.3) методом конечных объемов. При некотором приемлемом предположении мы получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &= O(h^2), \\ \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L^\infty(\Omega)} &= O(h^2 |\ln h|^{1/2}). \end{aligned}$$

Статья организована следующим образом. В пункте 2 мы представим некоторые обозначения и кратко опишем метод конечных объемов. В п. 3 мы применим кусочно-линейный метод конечных объемов и концепцию вариационной дискретизации к задаче (1.1)–(1.3) и получим дискретизованную оптимальную систему. В п. 4 будут проанализированы оценки ошибки между точным решением и конечно-объемной элементной аппроксимацией. В п. 5 представлен численный пример для проверки теоретических результатов, а в п. 6 мы даем выводы и представляем планы возможных будущих работ.

2. Метод конечных объемов

Как показано в [18], разделение \mathcal{T}_h является квазиоднородным, т. е. существует положительная постоянная C такая, что

$$C^{-1}h^2 \leq \text{meas}(V_i) \leq Ch^2 \quad \forall V_i \in \mathcal{T}_h.$$

Для выпуклого многоугольника Ω рассмотрим квазиоднородную триангуляцию \mathcal{T}_h , состоящую из замкнутых треугольных элементов K таких, что $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Используем N_h для обозначения множества всех узлов или вершин \mathcal{T}_h . Для определения двойственного разбиения \mathcal{T}_h^* из \mathcal{T}_h разделим каждый $K \in \mathcal{T}_h$ на три четырехугольника путем соединения центра тяжести C_K в K линейными сегментами со средними точками границ K , как показано на рисунке 1. Контрольный объем V_i состоит из четырехугольников, имеющих общую вершину z_i , как показано на рис. 2.

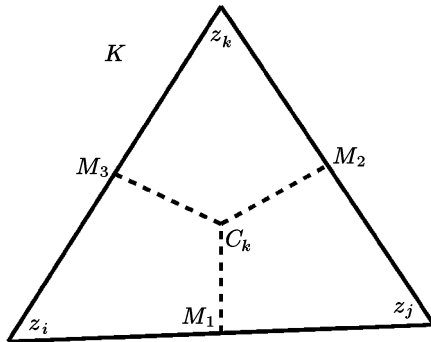


Рис. 1. Двойственное разбиение треугольника K

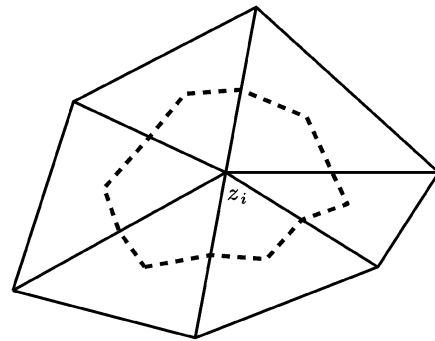


Рис. 2. Контрольный объем из четырехугольников, имеющих общую вершину

Двойственное разбиение \mathcal{T}_h^* состоит из объединения контрольных объемов V_i . Пусть $h = \max\{h_K\}$, где h_K — диаметр треугольника K . Двойственное разбиение \mathcal{T}_h^* также является квазиоднородным.

Определим конечномерное пространство V_h , связанное с \mathcal{T}_h для пробных функций, следующим образом:

$$V_h = \{v : v \in H^1(\Omega), v|_K \in P_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Также определим конечномерное пространство Q_h , связанное с двойственным разбиением \mathcal{T}_h^* для проверочных функций, следующим образом:

$$Q_h = \{q \in L^2(\Omega) : q|_V \in P_0(V) \forall V \in \mathcal{T}_h^*, q|_{z_i} = 0, z_i \in \partial\Omega\},$$

где $P_l(K)$ или $P_l(V)$ состоит из всех многочленов, степень которых меньше или равна l и определенных на K или V .

Для соединения пробного пространства с проверочным пространством определим оператор перехода $I_h : V_h \rightarrow Q_h$ следующим образом:

$$I_h v_h = \sum_{z_i \in N_h} v_h(z_i) \chi_i, \quad I_h v_h|_{V_i} = v_h(z_i) \quad \forall V_i \in \mathcal{T}_h^*,$$

где χ_i — характеристическая функция V_i . Известно, что для оператора I_h существует положительная постоянная C , такая что для всех $v \in V_h$

$$\|v - I_h v\| \leq Ch \|v\|_1. \quad (2.1)$$

Для правильного использования метода конечных объемов рассмотрим следующую задачу:

$$-\operatorname{div}(A\nabla\varphi) + \phi'(\varphi) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

где A , Ω , $\partial\Omega$ такие же, как в (1.2), (1.3), $f \in L^2(\Omega)$ или $H^1(\Omega)$.

Конечно-объемная элементная аппроксимация φ_h в (2.2), (2.3) определяется как решение задачи: найти $\varphi_h \in V_h$ такую, что

$$a(\varphi_h, I_h v_h) + (\phi'(\varphi_h), I_h v_h) = (f, I_h v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.4)$$

где билинейная форма $a(\varphi_h, I_h v_h)$ определяется таким образом:

$$a(\varphi_h, I_h v_h) = - \sum_{z_i \in N_h} v_h(z_i) \int_{\partial V_i} A\nabla\varphi_h \mathbf{n} \, ds, \quad \varphi_h, v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h.$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к ∂V_i .

Билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ не является симметричной, хотя задача самосопряженная. Тогда для всех $w_h, v_h \in V_h$ существуют положительные постоянные C и $h_0 \geq 0$, такие что [15] для всех $0 < h < h_0$:

$$|a(w_h, I_h v_h) - a(v_h, I_h w_h)| \leq Ch \|w_h\|_1 \|v_h\|_1. \quad (2.5)$$

Известно (см., например, [26]), что задача оптимального управления (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно решение (y, p, u) , и что, если триплет (y, p, u) является решением (1.1)–(1.3), то имеется сопряженное состояние $p \in H_0^1(\Omega)$ такое, что (y, p, u) удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$(A\nabla y, \nabla w) + (\phi(y), w) = (f + u, w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad (2.6)$$

$$(A\nabla p, \nabla q) + (\phi'(y)p, q) = (y - y_d, q) \quad \forall q \in H_0^1(\Omega), \quad (2.7)$$

$$(u + p, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U_{\text{ad}}. \quad (2.8)$$

Если $y \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ и $p \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, то условия оптимальности (2.6)–(2.8) (см., например, [32]) можно записать так:

$$-\operatorname{div}(A\nabla y) + \phi(y) = f + u \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$y(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (2.10)$$

$$-\operatorname{div}(A\nabla p) + \phi'(y)p = y - y_d \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$p(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (2.12)$$

$$(u + p, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U_{\text{ad}}. \quad (2.13)$$

Используем метод конечных объемов для дискретизации уравнения состояния и сопряженного состояния. Тогда задачу оптимального управления (2.9)–(2.13) можно аппроксимировать следующим образом: найти $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ad}}$ такие, что

$$a(y_h, I_h w_h) + (\phi(y_h), I_h w_h) = (f + u_h, I_h w_h) \quad \forall w_h \in V_h, \quad (2.14)$$

$$a(p_h, I_h q_h) + (\phi'(y_h)p_h, I_h q_h) = (y_h - y_d, I_h q_h) \quad \forall q_h \in V_h, \quad (2.15)$$

$$(u_h + p_h, v - u_h) \geq 0 \quad \forall v \in U_{\text{ad}}. \quad (2.16)$$

Чтобы выразить управление в краткой форме, введем проекцию (см., например, [21]):

$$P_{[a,b]}(f(x)) = \max(a, \min(b, f(x))).$$

Вариационное неравенство (2.13) можно представить таким образом:

$$u(x) = P_{[a,b]}(-p(x)). \quad (2.17)$$

Вариационное неравенство (2.16) эквивалентно

$$u_h(x) = P_{[a,b]}(-p_h(x)). \quad (2.18)$$

Тогда условие дискретной оптимальности можно переписать следующим образом: найти $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ад}}$ такие, что

$$a(y_h, I_h w_h) + (\phi(y_h), I_h w_h) = (f + u_h, I_h w_h) \quad \forall w_h \in V_h, \quad (2.19)$$

$$a(p_h, I_h q_h) + (\phi'(y_h)p_h, I_h q_h) = (y_h - y_d, I_h q_h) \quad \forall q_h \in V_h, \quad (2.20)$$

$$u_h(x) = P_{[a,b]}(-p_h). \quad (2.21)$$

Для $\varphi \in V_h$ запишем

$$\phi(\varphi) - \phi(\rho) = -\tilde{\phi}'(\varphi)(\rho - \varphi) = -\phi'(\rho)(\rho - \varphi) + \tilde{\phi}''(\varphi)(\rho - \varphi)^2, \quad (2.22)$$

где

$$\tilde{\phi}'(\varphi) = \int_0^1 \phi'(\varphi + s(\rho - \varphi)) ds, \quad \tilde{\phi}''(\varphi) = \int_0^1 (1-s)\phi''(\rho + s(\varphi - \rho)) ds$$

суть ограниченные функции в $\bar{\Omega}$. Более подробную информацию можно найти в [12].

3. Оценки L^2 -ошибки

В данном пункте представим анализ ошибки конечно-объемной элементной аппроксимации. Пусть $(y_h(u), p_h(u))$ является решением

$$a(y_h(u), I_h w_h) + (\phi(y_h(u)), I_h w_h) = (f + u, I_h w_h) \quad \forall w_h \in V_h, \quad (3.1)$$

$$a(p_h(u), I_h q_h) + (\phi'(y_h(u))p_h(u), I_h q_h) = (y_h(u) - y_d, I_h q_h) \quad \forall q_h \in V_h. \quad (3.2)$$

Для $y_h(u)$ и $p_h(u)$ отметим, что $y_h = y_h(u_h)$ и $p_h = p_h(u_h)$.

Прежде всего представим некоторые промежуточные оценки ошибки.

Лемма 1. Пусть $(y, p, u) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times U_{\text{ад}}$ и $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ад}}$ — решения (2.6)–(2.8) и (2.14)–(2.16) соответственно. Предположим, что $(y_h(u), p_h(u))$ и (y_h, p_h) — решения (3.1), (3.2) и (2.14)–(2.16) соответственно. Тогда имеем

$$\|p_h(u) - p_h\|_1 + \|y_h(u) - y_h\|_1 \leq C\|u - u_h\|. \quad (3.3)$$

Доказательство. После вычитания (2.14), (2.15) из (3.1), (3.2) имеем

$$\begin{aligned} a(y_h(u) - y_h, I_h w_h) + (\phi(y_h(u)) - \phi(y_h), I_h w_h) &= (u - u_h, I_h w_h) \quad \forall w_h \in V_h, \\ a(p_h(u) - p_h, I_h q_h) + (\phi'(y_h(u))p_h(u) - \phi'(y_h)p_h, I_h q_h) &= (y_h(u) - y_h, I_h q_h) \quad \forall q_h \in V_h. \end{aligned}$$

Прямое вычисление с использованием (2.22) показывает, что

$$a(y_h(u) - y_h, I_h w_h) + (\tilde{\phi}'(y_h(u))(y_h(u) - y_h), I_h w_h) = (u - u_h, I_h w_h), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} a(p_h(u) - p_h, I_h q_h) + (\phi'(y_h(u))(p_h(u) - p_h), I_h q_h) \\ = (y_h(u) - y_h, I_h q_h) + (\phi'(y_h)p_h - \phi'(y_h(u))p_h, I_h q_h), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $w_h \in V_h$ и $q_h \in V_h$. Пусть $w_h = y_h(u) - y_h$ и $q_h = p_h(u) - p_h$. Из (3.4), [18, лемма 2.2] и неравенства Коши–Шварца мы получим

$$\|y_h(u) - y_h\|_1 \leq C \|u - u_h\|. \quad (3.6)$$

Отметим, что

$$(y_h(u) - y_h, I_h q_h) \leq C \|y_h(u) - y_h\|_1 \cdot \|p_h(u) - p_h\|_1 \leq C \|u - u_h\| \cdot \|p_h(u) - p_h\|_1. \quad (3.7)$$

С использованием неравенства Гельдера получим

$$\begin{aligned} (\phi'(y_h)p_h - \phi'(y_h(u))p_h, I_h(p_h(u) - p_h)) &= ((\phi'(y_h) - \phi'(y_h(u)))p_h, I_h(p_h(u) - p_h)) \\ &\leq C \|p_h\|_{0,4} \cdot \|\phi'(y_h) - \phi'(y_h(u))\| \cdot \|p_h(u) - p_h\|_{0,4} \\ &\leq C \|p_h\|_1 \cdot \|\tilde{\phi}''(y_h(u))(y_h(u) - y_h)\| \cdot \|p_h(u) - p_h\|_1 \\ &\leq C \|\phi\|_{2,\infty} \cdot \|y_h(u) - y_h\| \cdot \|p_h(u) - p_h\|_1 \\ &\leq C \|u - u_h\| \cdot \|p_h(u) - p_h\|_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Собирая (3.5), (3.7) и (3.8), получим

$$\|p_h(u) - p_h\|_1 \leq \|y_h(u) - y_h\| \leq \|y_h(u) - y_h\|_1 \leq C \|u - u_h\|. \quad (3.9)$$

Объединив (3.6) и (3.9), имеем

$$\|p_h(u) - p_h\|_1 + \|y_h(u) - y_h\|_1 \leq C \|u - u_h\|. \quad (3.10)$$

Подобно доказательству из [18, следствие 3.6] при $\alpha = 1$ мы можем получить следующий результат.

Лемма 2. Пусть $(y, p, u) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times U_{\text{ad}}$ и $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ad}}$ — решения (2.6)–(2.8) и (2.14)–(2.16) соответственно. Предположим, что $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ и $u, f, y_d \in H^1(\Omega)$. Тогда имеем

$$\|p_h(u) - p\| + \|y_h(u) - y\| \leq Ch^2. \quad (3.11)$$

Доказательство. Более подробную информацию можно найти в [18]. \square

Определим производную по направлению $F(\cdot)$ в точке $u \in U_{\text{ad}}$ в направлении $v \in U_{\text{ad}}$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = F'(u)(v).$$

Если $F'(u)(\cdot)$ — непрерывный линейный функционал на U_{ad} , то мы можем сказать, что F на u D -дифференцируемо.

Пусть $(p(u), y(u))$ и $(p_h(u), y_h(u))$ — решения (2.14)–(2.15) и (2.19)–(2.20) соответственно. Пусть также $J(\cdot) : U_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{R}$ есть D -дифференцируемый выпуклый функционал вблизи решения u , который удовлетворяет следующей форме:

$$J(u) = \frac{1}{2} \|y(u) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Тогда мы имеем последовательность выпуклых функционалов $J_h : U_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$J_h(u) = \frac{1}{2} \|y_h(u) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$J_h(u_h) = \frac{1}{2} \|y_h(u_h) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

В соответствии с [27] мы можем показать, что

$$(J'(u), v) = (u + p(u), v),$$

$$(J'_h(u), v) = (u + p_h(u), v),$$

$$(J'_h(u_h), v) = (u_h + p_h(u_h), v).$$

Далее оценим $\|u - u_h\|$. Предположим, что функция стоимости J является строго выпуклой вблизи решения u , т. е. для решения u существует окрестность u в L^2 такая, что J является выпуклым в том смысле, что имеется постоянная $c > 0$, удовлетворяющая выражению

$$(J'(u) - J'(v), u - v) \geq c \|u - v\|^2 \quad (3.12)$$

для всех v в этой окрестности u . Выпуклости $J(\cdot)$ и $J_h(\cdot)$ тесно связаны с достаточными условиями второго порядка для всех v в этой окрестности u . Выпуклости $J(\cdot)$ и $J_h(\cdot)$ тесно связаны с достаточными условиями второго порядка задачи управления, предлагаемыми во многих исследованиях численных методов для решения подобных задач. Например, авторы статьи [4] рассматривают некоторые задачи оптимального управления, описываемые полулинейными эллиптическими уравнениями, и условия оптимальности первого и второго порядка для оптимальных решений. Казас, Трелш и Унгер обсуждают условия оптимальности, необходимые и достаточные для решения общих нелинейных задач оптимального управления, и получают условия оптимальности первого порядка с использованием лагранжевой формулировки и условия оптимальности второго порядка с использованием лагранжевых и гамильтоновых функций в [5]. Тогда удовлетворяется следующее достаточное условие оптимальности второго порядка (см. [16, 28]): имеется $c > 0$ такое, что $J''(u)v^2 \geq c\|v\|_0^2$.

На основании предположения (3.12) и доказательства, имеющегося в [1], существует постоянная $c > 0$, удовлетворяющая

$$(J'_h(v) - J'_h(u), v - u) \geq c \|v - u\|^2 \quad \forall v \in U_{\text{ad}}. \quad (3.13)$$

Теперь оценим ошибку приближенного управления в L^2 -норме.

Теорема 1. Пусть $(y, p, u) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times U_{\text{ad}}$ и $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ad}}$ — решения (2.6)–(2.8) и (2.14)–(2.16) соответственно. Предположим, что $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ и $u, p, f, y_d \in H^1(\Omega)$. Тогда мы имеем следующую оценку ошибки:

$$\|u - u_h\| \leq Ch^2. \quad (3.14)$$

Доказательство. Пусть $v = u_h$ в (2.8) и $v = u$ в (2.16). Тогда имеем

$$(u + p, u_h - u) \geq 0, \quad (3.15)$$

$$(u_h + p_h, u - u_h) \geq 0. \quad (3.16)$$

Из (3.15) и (3.16) ясно, что

$$(u - u_h, u - u_h) \leq -(p - p_h, u - u_h). \quad (3.17)$$

Используя (3.13) и (3.17), получим

$$\begin{aligned} c \|u - u_h\|^2 &\leq (J'_h(u), u - u_h) - (J'_h(u_h), u - u_h) \\ &= (u + p_h(u), u - u_h) - (u_h + p_h, u - u_h) \\ &= (u - u_h, u - u_h) + (p_h(u) - p_h, u - u_h) \\ &\leq (p_h(u) - p_h, u - u_h) - (p - p_h, u - u_h) \\ &= (p_h(u) - p, u - u_h). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Теперь оценим все члены правой части (3.18). Из леммы 2 и δ -неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} (p_h(u) - p, u - u_h) &\leq C \|p_h(u) - p\| \|u - u_h\| \\ &\leq Ch^2 \|u - u_h\| \\ &\leq Ch^4 + \delta \|u - u_h\|^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\delta \in (0, c)$, c — достаточно малая положительная постоянная. Объединив (3.18) и (3.19), мы получим результат (3.14). \square

Теорема 2. Пусть $(y, p, u) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times U_{\text{ad}}$ и $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ad}}$ — решения (2.6)–(2.8) и (2.14)–(2.16) соответственно. Предположим, что $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ и $u, p, f, y_d \in H^1(\Omega)$. Тогда существует $h_0 > 0$ такое, что для всех $0 < h \leq h_0$

$$\|u - u_h\| + \|y - y_h\| + \|p - p_h\| \leq Ch^2. \quad (3.20)$$

Доказательство. Используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} \|y - y_h\| &\leq \|y - y_h(u)\| + \|y_h(u) - y_h\|, \\ \|p - p_h\| &\leq \|p - p_h(u)\| + \|p_h(u) - p_h\|. \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\|y - y_h\| \leq \|y - y_h(u)\| + C\|u - u_h\|, \quad (3.21)$$

$$\|p - p_h\| \leq \|p - p_h(u)\| + C\|u - u_h\|. \quad (3.22)$$

Отметим, что $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ и $u, f, y_d \in H^1(\Omega)$, и, используя лемму 2, легко получить

$$\|y - y_h(u)\| \leq Ch^2, \quad \|p - p_h(u)\| \leq Ch^2. \quad (3.23)$$

Из (3.14) и (3.21) имеем

$$\|y - y_h\| \leq Ch^2. \quad (3.24)$$

С использованием (3.22), (3.14) и $\|p - p_h(u)\| \leq Ch^2$ получим

$$\|p - p_h\| \leq Ch^2. \quad (3.25)$$

Из (3.24), (3.25) и (3.14) мы можем получить (3.20). \square

4. Оценки L^∞ -ошибки

В данном пункте мы сначала дадим оценки ошибки численных решений уравнений состояния и сопряженного состояния в H^1 -норме.

Теорема 3. *Предположим, что $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ и $u, p, f, y_d \in L^2(\Omega)$. Пусть $(y, p, u) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times U_{\text{ad}}$ и $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ad}}$ — решения (2.6)–(2.8) и (2.14)–(2.16) соответственно. Тогда существует $h_0 > 0$ такое, что для всех $0 < h \leq h_0$*

$$\|y - y_h\|_1 + \|p - p_h\|_1 \leq Ch. \quad (4.1)$$

Доказательство. Используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} \|y - y_h\|_1 &\leq \|y - y_h(u)\|_1 + \|y_h(u) - y_h\|_1, \\ \|p - p_h\|_1 &\leq \|p - p_h(u)\|_1 + \|p_h(u) - p_h\|_1. \end{aligned}$$

Лемма 1 означает, что

$$\|y - y_h\|_1 \leq \|y - y_h(u)\|_1 + C\|u - u_h\|, \quad (4.2)$$

$$\|p - p_h\|_1 \leq \|p - p_h(u)\|_1 + C\|u - u_h\|. \quad (4.3)$$

Используя [18, теорема 3.3], получим

$$\|y - y_h(u)\|_1 \leq Ch, \quad \|p - p_h(u)\|_1 \leq Ch. \quad (4.4)$$

Из теоремы 2 и (4.2)–(4.4) легко получить (4.1). \square

Теперь оценим ошибку численных решений уравнений управления, состояния и сопряженного состояния в $L^\infty(\Omega)$ -норме.

Теорема 4. *Предположим, что $A \in W^{2,\infty}(\Omega)$ и $u, p, f, y_d \in H^1(\Omega)$. Пусть $(y, p, u) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times U_{\text{ad}}$ и $(y_h, p_h, u_h) \in V_h \times V_h \times U_{\text{ad}}$ — решения (2.6)–(2.8) и (2.14)–(2.16) соответственно. Тогда существует $h_0 > 0$ такое, что для всех $0 < h \leq h_0$*

$$\|u - u_h\|_\infty + \|y - y_h\|_\infty + \|p - p_h\|_\infty \leq Ch^2 \sqrt{|\ln h|}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Используя определение $P_{[a,b]}(\cdot)$ и (2.17), (2.18), можем получить

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\infty &\leq C\|p - p_h\|_\infty \\ &\leq C(\|p - p_h(u)\|_\infty + \|p_h(u) - p_h\|_\infty) \\ &\leq C\|p - p_h(u)\|_\infty + C(|\ln h|)^{1/2}\|p_h(u) - p_h\|_1 \\ &\leq C\|p - p_h(u)\|_\infty + C(|\ln h|)^{1/2}\|y - y_h\| \\ &\leq Ch^2(|\ln h|)^{1/2}, \end{aligned}$$

где мы использовали лемму 1, [33, лемма 10.5.1; 18, теорема 3.11] и теорему 1. Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \|y - y_h\|_\infty &\leq \|y - y_h(u)\|_\infty + \|y_h(u) - y_h\|_\infty \\ &\leq \|y - y_h(u)\|_\infty + C(|\ln h|)^{1/2}\|y_h(u) - y_h\|_1 \\ &\leq \|y - y_h(u)\|_\infty + C(|\ln h|)^{1/2}\|u - u_h\| \\ &\leq Ch^2(|\ln h|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Снова, используя лемму 1, [33, лемма 10.5.1; 18, теорема 3.11] и теорему 1, получим

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_\infty &\leq \|p - p_h(u)\|_\infty + \|p_h(u) - p_h\|_\infty \\ &\leq \|p - p_h(u)\|_\infty + C(|\ln h|)^{1/2}\|p_h(u) - p_h\|_1 \\ &\leq \|p - p_h(u)\|_\infty + C(|\ln h|)^{1/2}\|y - y_h\| \\ &\leq Ch^2(|\ln h|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Завершим теперь доказательство (4.5). □

5. Численный пример

Для проверки теории, представленной в предыдущем пункте, дадим один численный пример. Оптимальная задача была численно решена с использованием алгоритма проекционного предобуславливания с кодами, разработанными на основе AFERack.

В данном примере мы рассмотрим нелинейную эллиптическую задачу оптимального управления:

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}} \left[\frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

подчиняющуюся уравнению состояния

$$\begin{aligned} -\Delta y + y^3 &= u + f, & -\Delta p + 3y^2 p &= y - y_d & \text{в } \Omega, \\ & & y &= 0 & \text{на } \Gamma, \end{aligned}$$

где $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ и $U_{\text{ad}} = \{u : u \geq 0\}$.

Теперь предположим, что

$$\begin{aligned} y &= \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \\ p &= 2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \\ y_d &= y + \Delta p - 3y^2 p, \\ u &= \max(-p, 0), \\ f &= -\Delta y + y^3 - u. \end{aligned}$$

Представим ошибку численного решения триплета (u_h, y_h, p_h) в таблицах 1 и 2. В численной реализации ошибки $\|u - u_h\|_{L^2}$, $\|y - y_h\|_{L^2}$ и $\|p - p_h\|_{L^2}$, полученные на последовательности равномерно разбитых сеток, представлены в табл. 1. Ошибки $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|y - y_h\|_{L^\infty}$ и $\|p - p_h\|_{L^\infty}$ представлены в табл. 2. В табл. 1 строка i в четыре раза больше строки $(i + 1)$, $i = 3, 4, 5$. Ясно, что $\|u - u_h\|_{L^2}$, $\|y - y_h\|_{L^2}$ и $\|p - p_h\|_{L^2}$ имеют порядок сходимости $O(h^2)$. В табл. 2 строка i почти в четыре раза больше строки $(i + 1)$, $i = 3, 4, 5$, что означает, что скорость сходимости равна $O(h^2 \sqrt{|\ln h|})$. Таким образом, $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|y - y_h\|_{L^\infty}$ и $\|p - p_h\|_{L^\infty}$ имеют скорость сходимости $O(h^2 \sqrt{|\ln h|})$. Численные результаты показывают, что априорные оценки ошибки являются надежными, что согласуется с нашими теоретическими результатами.

Таблица 1. L^2 -ошибки переменных состояния и управления

| dof | Ошибки | | |
|------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | $\ u - u_h\ _{L^2}$ | $\ y - y_h\ _{L^2}$ | $\ p - p_h\ _{L^2}$ |
| 49 | 3.48573E-02 | 2.40798E-02 | 4.78575E-02 |
| 225 | 8.71856E-03 | 6.08546E-03 | 1.25367E-02 |
| 961 | 2.21423E-03 | 1.50809E-03 | 3.05864E-03 |
| 3969 | 5.37573E-04 | 3.85875E-04 | 7.53643E-04 |

Таблица 2. L^∞ -ошибки переменных состояния и управления

| dof | Ошибки | | |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | $\ u - u_h\ _{L^\infty}$ | $\ y - y_h\ _{L^\infty}$ | $\ p - p_h\ _{L^\infty}$ |
| 49 | 9.01533E-02 | 3.85715E-02 | 7.69858E-02 |
| 225 | 2.36452E-02 | 9.83623E-03 | 1.93561E-02 |
| 961 | 5.68646E-03 | 2.41389E-03 | 4.92130E-03 |
| 3969 | 1.51334E-03 | 6.15235E-04 | 1.23641E-03 |

Соответствующие скорости сходимости этих аппроксимаций представлены на рис. 3, где наклон сплошной линии равен -1 , что означает скорость сходимости $O(h^2)$ или $O(h^2 \sqrt{|\ln h|})$.

Как показывают численные результаты, представленные в таблицах 1 и 2 и на рис. 3, порядки сходимости согласуются с теоретическими результатами, полученными в предыдущих пунктах.

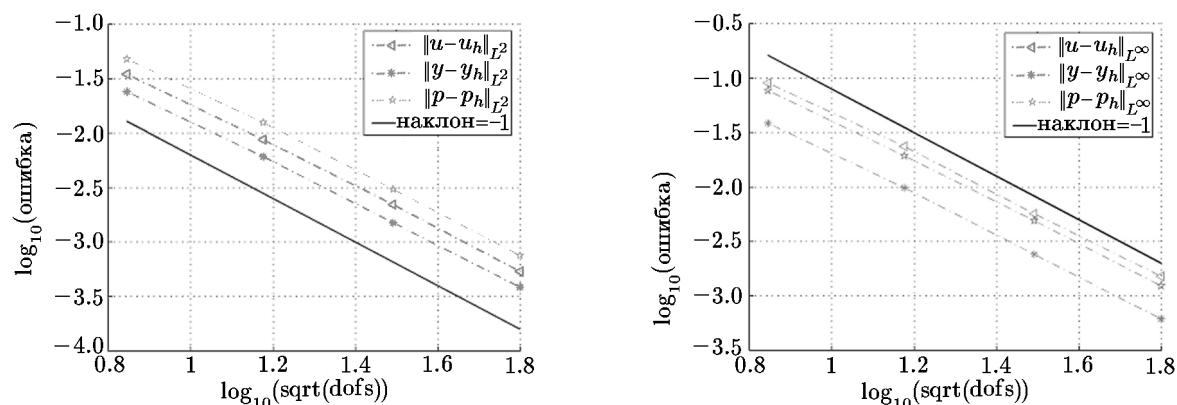


Рис. 3. Скорости сходимости конечно-объемной элементной аппроксимации в L^2 -норме (слева) и в L^∞ -норме (справа)

6. Выводы и планы будущих работ

В данной статье рассмотрены априорные оценки ошибки конечно-объемной элементной аппроксимации нелинейной задачи оптимального управления. Метод конечных объемов использовался для дискретизации уравнения состояния и сопряженного уравнения системы. При приемлемых предположениях получены оценки ошибки оптимального порядка, где порядок аппроксимации переменных состояния, сопряженного состояния и управления — $O(h^2)$ или $O(h^2\sqrt{|\ln h|})$ в смысле L^2 -нормы или L^∞ -нормы. Насколько нам известно, в контексте задач оптимального управления эти априорные оценки ошибки метода конечных объемов являются новыми для нелинейной задачи оптимального управления.

В будущем метод конечных объемов будет рассмотрен для нелинейных гиперболических задач оптимального управления. Кроме того, будут рассмотрены апостериорные оценки ошибки и сверхсходимость конечно-объемных элементных решений нелинейных гиперболических задач оптимального управления.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить благодарность рецензентам за полезные предложения, которые позволили улучшить статью.

Литература

1. Arada N., Casas E., and F. Tröltzsch Error estimates for the numerical approximation of a semilinear elliptic control problem // Comput. Optim. Appl. — 2002. — Vol. 23. — P. 201–229.
2. Bank R.E., Rose D.J. Some error estimates for the box method // SIAM J. Numer. Anal. — 1987. — Vol. 24. — P. 777–787.
3. Boyer F., Hubert F. Finite volume method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities // SIAM J. Numer. Anal. — 2008. — Vol. 6. — P. 3032–3070.
4. Casas E., Tröltzsch F. Second-order necessary optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations // Appl. Math. Optim. — 1999. — Vol. 39. — P. 211–227.
5. Casas E., Tröltzsch F., and Unger A. Second order sufficient optimality conditions nonlinear elliptic control problem // Z. Anal. Anwendungen. — 1996. — Vol. 15. — P. 687–707.
6. Cai Z. On the finite volume element method // Numer. Math. — 1991. — Vol. 58. — P. 713–735.

7. **Chatzipantelidis P.** A finite volume method based on the Crouzeix–Raviart element for elliptic PDEs in two dimensions // *Numer. Math.*—1999.— Vol. 82.— P. 409–432.
8. **Chen Y., Lu Z.** High Efficient and Accuracy Numerical Methods for Optimal Control Problems.— Beijing: Science Press, 2015.
9. **Chen Y., Lu Z.** Error estimates of fully discrete mixed finite element methods for semilinear quadratic parabolic optimal control problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*—2010.— Vol. 199.— P. 1415–1423.
10. **Chen Y., Lu Z.** Error estimates for parabolic optimal control problem by fully discrete mixed finite element methods // *Finite Elem. Anal. Des.*—2010.— Vol. 46.— P. 957–965.
11. **Chen Y., Lu Z., and Huang Y.** Superconvergence of triangular Raviart–Thomas mixed finite element methods for bilinear constrained optimal control problem // *Comp. Math. Appl.*—2013.— Vol. 66.— P. 1498–1513.
12. **Chen Y., Lu Z., and Guo R.** Error estimates of triangular mixed finite element methods for quasilinear optimal control problems // *Front. Math. China.*—2012.— Vol. 1.— P. 397–413.
13. **Chen Y., Yi N., and Liu W.** A Legendre–Galerkin spectral method for optimal control problems governed by elliptic equations // *SIAM J. Numer. Anal.*—2008.— Vol. 46.— P. 2254–2275.
14. **Chen Z., Li R., and Zhou A.** A note on the optimal L^2 estimate of the finite volume element method // *Adv. Comput. Math.*—2002.— Vol. 16.— P. 291–303.
15. **Chou S., Li Q.** Error estimates in L^2 , H^1 and L^∞ in covolume methods for elliptic and parabolic problems: a unified approach // *Math. Comp.*—2000.— Vol. 69.— P. 103–120.
16. **Chou S., Ye X.** Unified analysis of finite volume methods for second order elliptic problems // *SIAM J. Numer. Anal.*—2007.— Vol. 45.— P. 1639–1653.
17. **Estep D., Pernice M., and Du P.** A posteriori, error analysis of a cell-centered finite volume method for semilinear elliptic problems // *J. Comput. Appl. Math.*—2009.— Vol. 2.— P. 459–472.
18. **Ewing R.E., Lin T., and Lin Y.** On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials // *SIAM J. Numer. Anal.*—2002.— Vol. 39.— P. 1865–1888.
19. **Falk F.S.** Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates // *J. Math. Anal. Appl.*—1973.— Vol. 44.— P. 28–47.
20. **Geveci T.** On the approximation of the solution of an optimal control problem governed by an elliptic equation // *RAIRO: Numer. Anal.*—1979.— Vol. 13.— P. 313–328.
21. **Hinze M.** A variational discretization concept in control constrained optimization: the linear-quadratic case // *Comput. Optim. Appl.*—2005.— Vol. 30.— P. 45–61.
22. **Hoppe R.H.W., Iliash Y., Iyyunni C., and Sweilam N.H.** A posteriori error estimates for adaptive finite element discretizations of boundary control problems // *J. Numer. Math.*—2006.— Vol. 14.— P. 57–82.
23. **Lions J.L.** Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations.— Berlin: Springer, 1971.
24. **Li R., Liu W., Ma H., and Tang T.** Adaptive finite element approximation for distributed elliptic optimal control problems // *SIAM J. Control Optim.*—2002.— Vol. 41.— P. 1321–1349.
25. **Liu W., Yan N.** A posteriori error estimates for convex boundary control problems // *SIAM J. Numer. Anal.*—2001.— Vol. 39.— P. 73–99.
26. **Liu W., Yan N.** A posteriori error estimates for control problems governed by nonlinear elliptic equations // *Appl. Numer. Math.*—2003.— Vol. 2.— P. 173–187.
27. **Liu W., Yan N.** Adaptive Finite Element Methods for Optimal Control Governed by PDEs.— Beijing: Science Press, 2008.

28. **Liu W., Tiba D.** Error estimates for the finite element approximation of a class of nonlinear optimal control problems // J. Numer. Func. Optim.—2001.—Vol. 22.—P. 935–972.
29. **Lu Z.** A residual-based posteriori error estimates for hp finite element solutions of general bilinear optimal control problems // J. Math. Ineq.—2015.—Vol. 9.—P. 665–682.
30. **Lu Z., Chen Y.** A posteriori error estimates of triangular mixed finite element methods for semilinear optimal control problems // Adv. Appl. Math. Mech.—2009.—Vol. 1.—P. 242–256.
31. **Lu Z., Chen Y., and Zheng W.** A posteriori error estimates of lowest order Raviart–Thomas mixed finite element methods for bilinear optimal control problems // East Asia J. Appl. Math.—2012.—Vol. 2.—P. 108–125.
32. **Luo X., Chen Y., Huang Y., and Hou T.** Some error estimates of finite volume element method for parabolic optimal control problems // Optimal Control Appl. Methods.—2014.—Vol. 35.—P. 145–165.
33. **Shi Z., Wang M.** Finite Element Method.—Beijing: Science Press, 2010.

*Поступила в редакцию 8 декабря 2016 г.,
в окончательном варианте 4 марта 2017 г.*

