

где для выбранного материала $m = 0,018\%$, $\sigma_m = 2100$ psi, $n = 0.3109$; время в часах. Предполагаем, что при постоянных напряжениях составляющие деформации ползучести разделены следующим образом:

$$e(\sigma, t) = \frac{m}{\sigma_m} \sigma t^n, \quad p(\sigma, t) = m \left(\operatorname{sh} \frac{\sigma}{\sigma_m} - \frac{\sigma}{\sigma_m} \right) t^n \quad (17)$$

Обобщая эти равенства на случай переменных напряжений при помощи гипотез (б) и (в), получим уравнение, аналогичное (16)

$$\varepsilon(t) = \frac{mn}{\sigma_m} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \sigma(\tau) d\tau + \left[m \int_0^t \left(\operatorname{sh} \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_m} - \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_m} \right) d\tau \right]^n \quad (18)$$

На фиг. 5 зависимость (18) сравнивается с экспериментом при ступенчато меняющихся нагрузках. Для каждого участка с экспериментальных кривых фиг. 4 работы [3] снято по несколько точек. Мгновенные деформации исключены.

Результаты обработки аналогичного эксперимента с другой программой ступенчатых догрузок, не представленные здесь, дают такое же хорошее совпадение теории и эксперимента. Это подтверждает, в частности, принятое в (17) и отмеченное ранее в работе [1] предположение о линейной зависимости обратимых деформаций от напряжения. Существенная нелинейность, полученная в (12), по-видимому, объясняется относительно высоким уровнем напряжений и температуры для выбранного материала.

Поступила 5 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
2. Розовский М. И. О нелинейных интегральных уравнениях ползучести бетонной цилиндрической оболочки, находящейся под внешним давлением. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9.
3. Findley W. and Kosla G. Application of the Superposition Principle and Theories of Mechanical Equation of State, Strain, and Time Hardening to Creep of Plastics under Changing Loads, Journal of Applied Physics, July 1955, vol. 26, p. 7.

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЕЩИНАХ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Р. Л. Салганик (Москва)

В рамках общей теории трещин, образующихся при хрупком разрушении, развитой Г. И. Баренблаттом [1,2], рассматриваются две задачи: о дискообразной и бесконечной кольцевой трещинах продольного сдвига в безграничном упругом теле. Трещины находятся под действием распределенных по их поверхностям скручивающих касательных напряжений. Первая из этих задач была предложена Л. А. Галиным.

Отметим, что осесимметричная контактная задача для случая, когда есть только касательные напряжения, рассматривалась в работе [3]. Отметим также, что рассмотрение трещины с приложенными к ее поверхности силами можно считать составной частью задачи о свободной от напряжений трещине, развивающейся под действием приложенных к телу внешних сил. В этом случае поле упругих элементов разлагается на два: одно вычисляется как результат действия внешних сил на сплошное тело, а другое — как результат присутствия в теле трещины, нагруженной напряжениями, равными по величине и обратными по знаку тем, которые в этом месте имели первое поле.

§ 1. Вывод формулы для радиуса дискообразной трещины продольного сдвига.

1°. Рассмотрим безграничное тело и дискообразную трещину в нем (фиг. 1). Ее радиус обозначим через a . Ось z цилиндрической системы координат r, θ, z направим перпендикулярно к плоскости трещины через ее центр, который примем за начало отсчета. К поверхностям трещины приложены только касательные напряжения $\tau_{z\theta}$, в каждой точке равные одно другому по величине и противоположные по знаку. Вектор смещения имеет единственную отличную от нуля компоненту v по оси θ . Из-за осевой симметрии v не зависит от θ , а из-за антисимметрии относительно плоскости трещины $z=0$ величина v — нечетная функция z . Из последнего и непрерывности смещения в сплошном теле следует, что в плоскости трещины вне ее $v = 0$. Таким образом, учитывая уравнения равновесия и связь между напряжениями и деформациями, приходим к следующей постановке задачи для v в безразмерных координатах $\xi = z/a, \rho = r/a$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{v}{\rho^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{a}{\mu} \varphi(\rho) \equiv -g(\rho) \quad (0 < \rho < 1), \quad v = 0 \quad (1 < \rho < \infty) \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.2)$$

Здесь μ — модуль сдвига, $\varphi(\rho) = \tau_{z\theta}$ — заданная функция.

Разделяя в (1.1) переменные и требуя исчезновения v на бесконечности, получаем

$$v(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} f(s) e^{-\zeta s} J_1(\rho s) ds \quad (1.3)$$

Здесь $f(s)$ — неизвестная функция, подлежащая определению из граничных условий (1.2). Подставляя (1.3) в (1.2), находим

$$\int_0^{\infty} s^{\beta} f(s) J_{\nu}(\rho s) ds = g(\rho), \quad \int_0^{\infty} f(s) J_{\nu}(\rho s) ds = 0 \quad (1.4)$$

$$(0 < \rho < 1, \beta = 1, \nu = 1) \quad (1 < \rho < \infty, \nu = 1)$$

Это дуальные интегральные уравнения. Их общее решение [4] в данном случае имеет вид

$$f(s) = \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \int_0^1 \eta^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\eta s) d\eta \int_0^1 g(\eta \lambda) \lambda^2 (1 - \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в выражение для $\partial v / \partial \zeta$ из (1.3), выполняя внутреннее интегрирование по s и используя известные соотношения

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad (1.6)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px} J_1(bx) dx = \frac{\sqrt{p^2 + b^2} - p}{b + \sqrt{p^2 + b^2}}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \quad (1.7)$$

получим при $\rho > 1$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=+0} = \frac{2}{\pi \rho} \int_0^1 \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_0^1 \frac{\eta^3 g(\eta \lambda) d\eta}{(\rho^2 - \eta^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

Выполняя во внутреннем интеграле (1.8) интегрирование по частям и полагая $\rho \rightarrow 1$, находим

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=+0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\rho - 1}} \int_0^1 \frac{g(\lambda) \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} + O(1) \quad (1.9)$$

или при $r \rightarrow a + 0$

$$\tau_{z0} \Big|_{z=+0} = - \frac{\sqrt{2a}}{\pi \sqrt{r - a}} \int_0^1 \frac{\Phi(a\lambda) \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} + O(1) \quad (1.10)$$

Примененный здесь способ выделения особенности аналогичен изложенному в [5].

2°. Кроме напряжений τ_{z0} от приложенных нагрузок, в теле возникают напряжения τ_{z0}° от сил сцепления, действующих в концевой области внутри трещины. Размеры этой области у макротрещин можно считать пренебрежимо малыми. При повышении приложенной нагрузки, стремящейся увеличить размеры трещины, силы сцепления возрастают, приспосабливаясь к изменяющейся нагрузке до тех пор, пока последняя не достигнет некоторой критической величины. При ее превышении в какой-либо точке контур трещины перемещается в глубь тела — трещина становится в этой точке подвижно-равновесной. Если считать, что область действия и распределение сил сцепления при достижении состояния подвижного равновесия автономны (не зависят от приложенной нагрузки), то для напряжений, возникающих от действия сил сцепления, вне трещины вблизи ее контура получается (в рассматриваемом случае) формула

$$\tau_{z0}^{\circ} = \frac{L}{\pi \sqrt{r - a}} + O(1) \quad (1.11)$$

Здесь L — постоянная материала.

Можно доказать, что напряжения, возникающие от всех сил, действующих на сплошное тело, вблизи контура трещины конечны. Поэтому коэффициент при $(r - a)^{-1/2}$ в сумме $\tau_{z0} + \tau_{z0}^{\circ}$ должен обращаться в нуль и из (1.10) и (1.11) получаем

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\Phi(a\lambda) \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = L \quad (1.12)$$

уравнение для радиуса подвижно-равновесной трещины (в рассматриваемом случае симметричных нагрузки и трещины состояние подвижного равновесия достигается сразу во всех точках контура).

Достигнутое состояние подвижного равновесия может быть устойчивым или неустойчивым. В первом случае малое увеличение нагрузки сверх критической приводит к малому продвижению контура трещины в глубь тела в окрестности рассматриваемой точки. Во втором случае всякая сверхкритическая нагрузка приводит к динамическому развитию трещины. Это развитие происходит до ближайшего устойчивого состояния подвижного равновесия, а если такого нет — до полного разрушения тела. Критическая нагрузка в последнем случае — разрушающая. Если зависимость подвижно-равновесного размера трещины от приложенной нагрузки известна, то ее участки, где трещина сокращается с увеличением приложенной нагрузки, соответствуют неустойчивым состояниям подвижного равновесия.

§ 2. Примеры. 1°. Нагрузка $\varphi = \text{const}$. Из уравнения (1.12) для радиуса подвижно-равновесной трещины находим

$$a = 8 \left(\frac{L}{\pi\varphi} \right)^2 \quad (2.1)$$

Из (2.1) видно, что с увеличением нагрузки φ радиус a убывает. Это свидетельствует о неустойчивости подвижно-равновесной трещины. Нагрузка φ , определяемая для каждого a из (2.1), является разрушающей, так как соответствующий ей радиус a подвижно-равновесной трещины единственный.

2°. Нагрузка $\varphi = \varphi_0 r/a$ — малая трещина, расположенная в центре длинного упругого круглого цилиндра, к торцам которого приложены скручивающие касательные напряжения. Из (1.12) получается формула, лишь численным коэффициентом отличающаяся от (2.1). И в этом случае подвижно-равновесная трещина неустойчива.

3°. Трещина развивается под действием приложенного в ее центре момента, направленного по оси z . Полагая $\varphi = \text{const } \delta (r - r_0)$ и, следовательно, момент $M = 2\pi \text{const } r_0^2$, из уравнения (1.12) при $r_0 \rightarrow 0$ и M постоянном получаем

$$a = \left(\frac{M}{\sqrt{2}\pi L} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.2)$$

В этом случае с увеличением приложенной нагрузки (момента M) радиус трещины сначала не меняется, а после достижения подвижно-равновесного состояния начинает увеличиваться: происходит устойчивое развитие трещины.

§ 3. Вывод формулы для радиуса бесконечной кольцевой трещины продольного сдвига. Эта задача отличается от рассмотренной в § 1 тем, что теперь на плоскости $z = 0$ трещина занимает область $a < r < \infty$. Граничные условия в этом случае получаются из (1.2) взаимной перестановкой областей определения. Поэтому соответствующие дуальные интегральные уравнения приобретают вид

$$\int_1^{\infty} s^\beta f(s) J_\nu(\rho s) ds = g(\rho), \quad \int_1^{\infty} f(s) J_\nu(\rho s) ds = 0 \quad (3.1)$$

$$(1 < \rho < \infty, \beta = 1, \nu = 1) \quad (0 < \rho < 1, \nu = 1)$$

Такие уравнения в [4] не рассмотрены. Однако несложным видоизменением метода, которым в [4] было получено общее решение уравнений (1.4) при $\beta > 0$, можно найти общее решение и этих уравнений при этом же условии. Оно имеет вид

$$f(s) = \frac{(2s)^{1-\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \int_1^{\infty} \eta^{1+\beta/2} J_{1-\beta/2}(\eta s) d\eta \int_1^{\infty} \lambda^{1-\nu} (\lambda^2 - 1)^{1-\beta/2} g(\eta\lambda) d\lambda \quad (3.2)$$

Полагая $\beta = 1, \nu = 1$ в (3.2), подставляя его в $(\partial v / \partial \zeta)_{\zeta=+0}$ из (1.3), при помощи соотношения (1.7), равенства

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (3.3)$$

и преобразований, аналогичных сделанным в § 1, найдем при $\rho \rightarrow 1 - 0$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=+0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{1-\rho}} \int_1^{\infty} \frac{g(\lambda) d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} + O(1) \quad (3.4)$$

или, учитывая $\tau_{z0} = \mu \partial v / a \partial \zeta$, получаем при $r \rightarrow a - 0$

$$\tau_{z0} = - \frac{\sqrt{2}a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r-a}} \int_1^{\infty} \frac{\varphi(a\lambda) d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} + O(1) \quad (3.5)$$

Из (3.5) на основании изложенного в п. 2, § 1 получаем уравнение для внутреннего радиуса подвижно-равновесной бесконечной кольцевой трещины

$$\sqrt{2a} \int_1^{\infty} \frac{\varphi(a\lambda) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = L \quad (3.6)$$

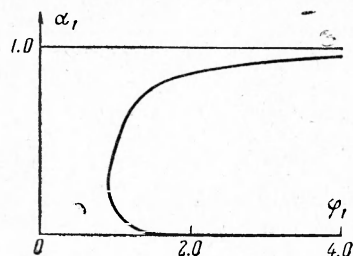
§ 4. Примеры. 1°. Рассмотрим сначала случай

$$\varphi = \{\text{const } (a < r < r_0), \quad 0 \quad (r_0 < r < \infty)\} \quad (4.1)$$

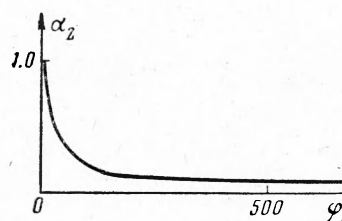
Тогда из формулы (3.6) получим уравнение, определяющее безразмерный радиус подвижно-равновесной трещины $\alpha_1 = a/r_0$

$$1 + \sqrt{1 - \alpha_1^2} = \alpha_1 \exp\left(\frac{1}{\varphi_1 \sqrt{\alpha_1}}\right) \quad \left(\varphi_1 = \frac{\varphi}{L} \sqrt{\frac{r_0}{2}}\right) \quad (4.2)$$

График зависимости $\alpha_1(\varphi_1)$ представлен на фиг. 2. Из него видно следующее развитие трещины из некоторого начального состояния, задаваемого отношением $\alpha_{10} = a_0/r_0$ (r_0 в процессе нагружения фиксировано). При увеличении φ от нуля до значения, соответствующего достижению трещиной состояния подвижного равновесия (оно определяется как точка пересечения графика (4.2) с прямой $\alpha_1 = \alpha_{10}$), трещина не развивается $\alpha_1 = \alpha_{10}$. Затем ее развитие идет по-разному в зависимости от того, меньше или больше начальное значение α_{10} критического значения α_1^* , определяемого как точка минимума кривой $\varphi_1(\alpha_1)$. Когда $\alpha_{10} < \alpha_1^*$, трещина через последовательность устойчивых подвижно-равновесных состояний продвигается к оси цилиндра. Когда $\alpha_{10} > \alpha_1^*$, подвижно-равновесное состояние, соответствующее $\alpha_1 = \alpha_{10}$, неустойчиво, и как только оно достигается, начинается динамическое развитие трещины до ближайшего устойчивого подвижно-равновесного состояния. После этого трещина через последовательность устойчивых подвижно-равновесных состояний будет стягиваться к оси цилиндра. Следует отметить, что трещина, начав развиваться динамически, может проскочить состояние подвижного равновесия, соответствующее данной (не меняющейся в процессе динамического развития) нагрузке. Важно, однако, что при этом все равно окажется $\alpha_1 < \alpha_1^*$ и дальнейшее развитие трещины будет устойчивым.



Фиг. 2



Фиг. 3

2°. Рассмотрим случай распределения нагрузки вдоль некоторой окружности, концентричной контуру трещины и охватывающей его, т. е.

$$\varphi = \text{const } \delta (r - r_0), \quad r_0 > a \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (3.6), получим следующее уравнение для безразмерного радиуса подвижно-равновесной трещины $\alpha_2 = a/r_0$

$$\varphi_2 \alpha_2^3 + \alpha_2^2 - 1 = 0 \quad (\varphi_2 = \varphi \sqrt{2r_0} / L) \quad (4.4)$$

Зависимость α_2 от φ_2 представлена на фиг. 3. Из нее видно, что развитие трещины из любого начального состояния происходит устойчиво и качественно не отличается от случая $\alpha_1 < \alpha_1^*$ предыдущего пункта.

Автор признателен И. Н. Балашовой за помощь при оформлении работы.

Институт механики

Поступила 13 III 1962

Московского государственного университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины. ПММ, 1961, XXV, вып. 4.
3. Reissner E. and Sagossi H. Forced torsional oscillations of an elastic half space; Journal of applied Physics, 1944, vol. 15, № 9.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИИЛ, 1955.
5. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.