

Разрежение в донной части конуса вычисляется, как для торца цилиндра. Согласно (3.11) и (3.12), максимальное сжатие и разрежение на боковой поверхности конуса возникают при  $y = 0$  соответственно на нижней и верхней поверхности конуса.

На рис. 5 приведены вычисленные максимальные силы, действующие на тела конечных размеров (торец цилиндра, сферу и конус с углом полураствора  $30^\circ$  — линии  $I-3$ ), в зависимости от  $M$  внезапного движения при  $\alpha = 0$ .

Аналогично могут быть определены мгновенные нагрузки на телах другой формы, в том числе и трехмерной конфигурации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.
2. Фонарев А. С. Расчет дифракции ударной волны на профиле с последующим установлением стационарного сверхзвукового и трансзвукового обтекания // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 4.
3. Подлубный В. В., Фонарев А. С. Отражение сферической волны от плоской поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 6.
4. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.

Поступила 3/IX 1987 г.,  
в окончательном варианте — 22/I 1988 г.

УДК 535.5 : 621.22

### КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ВИБРИРУЮЩИХ КРУГОВЫХ РЕШЕТОК ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ

В. Л. Окулов

(Новосибирск)

При исследовании некоторых вопросов аэроупругости возникает необходимость в определении присоединенных масс и коэффициентов аэродинамического демпфирования для тел, совершающих малые колебания. В решетчатых областях, моделирующих лопасти рабочих колес и направляющих аппаратов турбомашин, данная задача рассматривалась только для колебаний решеток в несжимаемой жидкости. В [1] получены присоединенные массы прямой решетки пластин, а в [2] — кольцевой решетки лопастей, которыми моделируют ступени осевых машин. В этих работах, в частности, исследовано влияние на коэффициенты присоединенных масс взаимодействия между лопатками, которые совершали малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фаз.

В сжимаемой жидкости подобные задачи рассматривались только для отдельных тел. Однако при изучении колебаний решеток в газе, помимо вопроса о взаимодействии лопаток, особый интерес представляет исследование окolorезонансных режимов, которые возникают при совпадении вещественной части собственной частоты колебаний газа около решетки с частотой колебаний лопаток.

В данной работе определяются присоединенные массы и коэффициенты демпфирования для неподвижной круговой решетки тонких профилей, совершающих малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фазы в идеальной сжимаемой жидкости. Такими решетками обычно моделируются лопаточные диффузоры и направляющие аппараты центробежных турбомашин. Проведенные расчеты показали, что на окolorезонансных режимах наблюдаются явления двух видов: резонанс с резким возрастанием амплитуды комплексных коэффициентов сил, действующих на профили в решетке, и резонанс поглощения, при котором амплитуда этих коэффициентов уменьшается, а фаза меняет знак.

1. Рассмотрим задачу о распространении в идеальном газе малых возмущений, излучаемых неподвижной круговой решеткой, профили которой совершают малые колебания по одинаковому гармоническому закону с постоянным сдвигом фазы  $\mu = 2\pi m/N$  ( $m = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $N$  — число профилей в решетке). Профили будем считать бесконечно тонкими слабоизогнутыми дугами. Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  внутренний и внешний радиусы решетки (рис. 1). Введем безразмерные полярные координаты  $\rho/R_1$ ,  $\theta$ , поместив начало системы отсчета в центр решетки.

В этих предположениях закон колебаний  $n$ -го профиля решетки можно записать в виде

$$w^{(n)}(s) = R_1 f(s) \exp [i(n\mu - \omega t)],$$

где  $w^{(n)}$  — перемещение точек  $n$ -го профиля по нормали;  $\omega$  — круговая частота колебаний;  $f(s)$  — безразмерная комплексная функция, определяющая форму колебаний;  $s$  — дуговая координата точек профиля, измеряемая от внутренней кромки фиксированного среднего положения профиля  $L_n$ .

Считая возмущенное движение газа установившимся, потенциал скоростей будем искать в форме  $\Phi(\rho, \theta, t) = iR_1^2 \omega \varphi(\rho, \theta) \times \exp(-i\omega t)$ . В линейном приближении безразмерная комплексная функция  $\varphi(\rho, \theta)$ , определяющая амплитуду установившихся колебаний газа, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца во всей плоскости вне профилей решетки  $L = \bigcup_{n=0}^{N-1} L_n$

$$(1.1) \quad \Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$$

( $k = \omega R_1 / a_\infty$  — волновое число,  $a_\infty$  — скорость звука в невозмущенном газе), условиям:

непротекания на профилях решетки

$$(1.2) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{L_n} = -f(s) e^{in\mu}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

( $\nu$  — нормаль к профилю);

излучения, которое запишем в одной из эквивалентных форм

$$(1.3) \quad \varphi(\rho, \theta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s H_s^{(1)}(k\rho) e^{is\theta} \quad \text{при } \rho > R_2$$

( $H_s^{(1)}$  — функция Ганкеля первого рода; обобщенной периодичности

$$(1.4) \quad \varphi(\rho, \theta + \alpha) = \varphi(\rho, \theta) \exp(i\mu)$$

( $\alpha = 2\pi/N$  — шаг решетки по  $\theta$ );

равенства нулю циркуляции вектора скорости вокруг каждого профиля решетки

$$(1.5) \quad \Gamma^{(n)} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

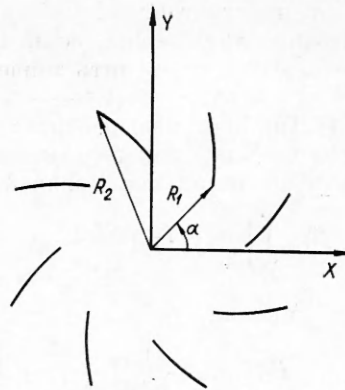
( $\Gamma^{(n)}$  — циркуляция скорости вокруг  $n$ -го профиля).

2. Получим интегральное уравнение, эквивалентное краевой задаче (1.1)–(1.5). С помощью второй формулы Грина, применяя (1.3), запишем интегральное представление решения уравнения (1.1) в любой точке плоскости, исключая некоторую окрестность  $\Omega$  профилей решетки  $L$ :

$$(2.1) \quad \varphi(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ g(y, x) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu_y} - \varphi(y) \frac{\partial g(y, x)}{\partial \nu_y} \right\} dS_y, \quad y \in \partial\Omega,$$

где  $\nu_y$  — нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ ;  $g(y, x) = H_0^{(1)}(k|y-x|)/4i$  — фундаментальное решение уравнения (1.1). После дифференцирования (2.1) для амплитуды скорости малых возмущений  $\mathbf{v}$  получим интегральное представление, которое с помощью соотношений из [3] и (1.1) преобразуется:

$$(2.2) \quad \mathbf{v} \equiv \nabla_x \varphi = - \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v}_y \times \mathbf{v}) \times \nabla_y g + (\mathbf{v}_y \cdot \mathbf{v}) \nabla_y g + k^2 g \varphi \mathbf{v}_y] dS_y.$$



Р и с. 1

При переходе от  $\partial\Omega$  к бесконечно тонким профилям решетки  $L$  (2.2) сохраняет тот же вид, если интегрирование вести по одной стороне профилей, а  $\varphi$  и  $\mathbf{v}$  заменить значениями их скачков при переходе через  $L$ :  $\Gamma = \varphi^- - \varphi^+$ ,  $\gamma = (\mathbf{v}^- - \mathbf{v}^+) \cdot \boldsymbol{\tau}$ ,  $\delta = (\mathbf{v}^- - \mathbf{v}^+) \cdot \mathbf{v}$  ( $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к  $L$ ). Так как подынтегральное выражение представления (2.2) не содержит вторых производных от  $g$ , то в соответствии с [4] находим интегродифференциальное уравнение для неизвестных функций  $\gamma(s)$  и  $\Gamma(s)$ :

$$(2.3) \quad \int_L \left\{ \gamma \left[ (\mathbf{v}_x \cdot \boldsymbol{\tau}_y) \frac{\partial g}{\partial v_y} - (\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{v}_y) \frac{\partial g}{\partial \tau_y} \right] + \Gamma k^2 g (\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{v}_y) \right\} dS_y = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L,$$

где правая часть

$$F(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \right)^- + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \right)^+ \right] - \int_L \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v_y} \right)^- - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v_y} \right)^+ \right] (\mathbf{v}_y \cdot \nabla_y g) dS_y.$$

Дополнительно искомые функции связаны соотношениями

$$(2.4) \quad \partial \Gamma(\mathbf{y}) / \partial \tau_y = \gamma(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in L, \quad \int_{L_j} \gamma(\mathbf{y}) dS_y = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

которые следуют из определения этих функций и условия (1.5).

Отметим, что уравнения (2.3), (2.4) и изложенный ниже метод решения справедливы для общего случая, когда рассматривается краевая задача Неймана для произвольной совокупности конечного числа гладких ограниченных дуг. В данном случае в силу условий (1.2) и (1.4) уравнение (2.3) переписывается в виде

$$(2.5) \quad \int_{L_0} \{ \gamma(\mathbf{y}) K_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \Gamma(\mathbf{y}) K_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \} dS_y = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L_0.$$

Здесь  $K_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\tau}_y \cdot \mathbf{v}_x) \frac{\partial g_N^m(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial v_y} - (\mathbf{v}_y \cdot \mathbf{v}_x) \frac{\partial g_N^m(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial \tau_y}$ ;  $K_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = k^2 g_N^m(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \times$

$\times (\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{v}_y)$ ;  $S_y$  — дуговая координата  $L_0$ ;  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_0$ ;  $g_N^m(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{ij\mu} H_0^{(1)}(k|\mathbf{y}_j - \mathbf{x}|)$ ,  $\mathbf{y}_j \in L_j$  — элементарное решение уравнения (1.1) для круговой решетки точечных особенностей с координатами  $\mathbf{y}_j = (\rho, \theta + j\alpha)$ .

3. Определим силы, действующие на нулевой профиль решетки, закон колебаний которого имеет вид

$$(3.1) \quad w(\rho, \theta, t) = \sum_{m=1}^{N_0} q_m(t) f_m(\rho, \theta),$$

где  $q_m(t)$  — обобщенные координаты, имеющие размерность длины;  $f_m(\rho, \theta)$  — формы колебаний;  $N_0$  — число обобщенных координат.

Для заданной формы колебаний рассмотрим обобщенную гидродинамическую силу

$$(3.2) \quad Q_n(t) = \int_{L_0} \Delta p(\rho, \theta, t) f_n(\rho, \theta) dS_y,$$

при вычислении которой перепад давления на профиле  $\Delta p$  вычисляется в линейном приближении с помощью интеграла Коши — Лагранжа

$$(3.3) \quad \Delta p(\rho, \theta, t) = -\rho_0 \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^- - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^+ \right].$$

Введем комплексные коэффициенты

$$(3.4) \quad G_{mn} = \mu_{mn} + \frac{i}{\omega} \lambda_{mn} = -R_1 \rho_0 \int_L \Gamma_m f_n dS_y$$

( $\Gamma_m(s)$  — решение уравнений (2.4), (2.5) с правой частью  $f(s_x) = f_m(\rho, \theta)$ ). Для гармонических колебаний, совершаемых по закону (3.1), в силу

линейности задачи на основании (3.3) и (3.4) соотношение (3.2) перепишем в виде

$$Q_n(t) = - \sum_{m=1}^{N_0} \mu_{mn} \ddot{q}_m - \sum_{m=1}^{N_0} \lambda_{mn} \dot{q}_m.$$

Здесь коэффициенты  $\mu_{mn}$  характеризуют инерционные силы, имеют размерность массы и называются коэффициентами присоединенных масс;  $\lambda_{mn}$  — коэффициенты демпфирования;  $\dot{q}_m$  и  $\ddot{q}_m$  — обобщенные скорости и ускорения.

Следовательно, задача определения аэродинамических сил, действующих на профиль в решетке, сведена к вычислению комплексных коэффициентов  $G_{mn}$ , которые выражаются через решение уравнений (2.4), (2.5).

4. Особенность сингулярного интегродифференциального уравнения (2.4) состоит в том, что его ядро имеет полюс первого порядка плюс слагаемое с логарифмической особенностью. Отметим, что прямые численные методы к решению уравнений указанного типа в настоящее время широко не применяются [5]. Ранее [6] было предложено для численного исследования аналогичного однородного уравнения использовать метод дискретных особенностей, который наиболее прост из числа прямых методов, применяемых к решению сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши. Вычисленные в [6] комплексные собственные частоты колебаний газа во внешности некоторых тонких тел практически совпали с частотами, полученными для этих областей методом склеивания. Однако применение данного метода к решению неоднородных уравнений (2.4), (2.5) привело к необходимости его усовершенствования.

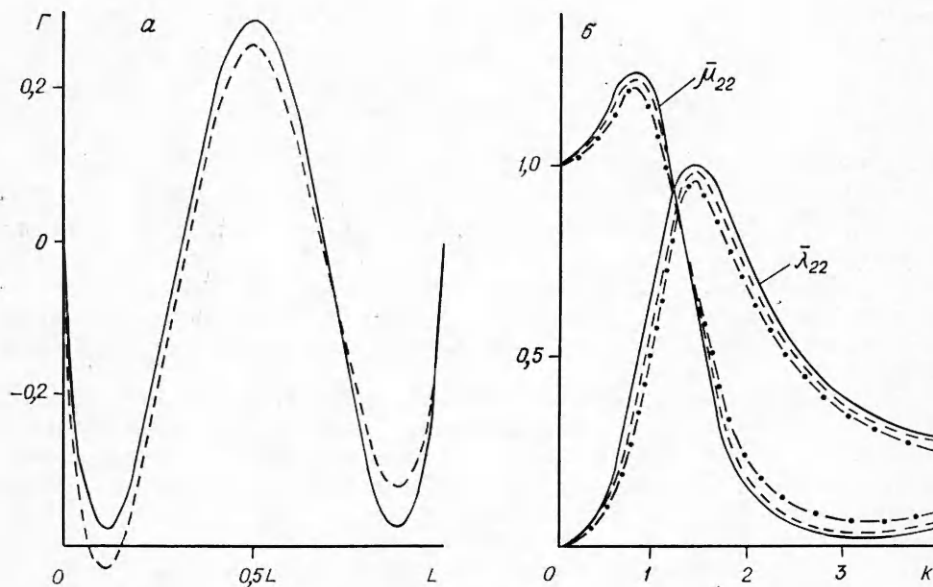
При решении методом дискретных особенностей тестовой задачи для расчета присоединенных масс тонкой пластины длины  $2a$ , совершающей поступательные колебания, было получено несимметричное распределение скачка амплитуды потенциала  $\Gamma(s)$  вдоль пластины (рис. 2, а, штриховая линия, пластина разбивалась на 20 элементарных участков,  $k = 4,0$ ). Установлено, что при фиксированном числе дискретных особенностей на пластине с возрастанием  $k$  несимметричность численного решения увеличивается, слабо влияя на значения суммарных характеристик. Для коэффициентов присоединенных масс  $\bar{\mu}_{22} = \mu_{22}/\rho_0 \pi a_\infty^2$  и аэродинамического демпфирования  $\bar{\lambda}_{22} = \lambda_{22}/\omega \rho_0 \pi a_\infty^2$  (рис. 2, б, штрихпунктирные линии) имеет место хорошее совпадение с результатами, полученными с помощью метода Хаскинда [7] (сплошные линии). Выявленная несимметричность распределенных вдоль пластины характеристик — следствие несимметричности матрицы системы алгебраических уравнений при такой дискретизации уравнения (2.5) из-за наличия в его ядре слагаемого с логарифмической особенностью. Отметим, что при увеличении числа дискретных особенностей несимметричность матрицы и решения уменьшается.

Чтобы избежать этой погрешности в вычислениях, рассмотрим некоторую модификацию метода дискретных особенностей. С этой целью разобьем равномерно профиль  $L_0$  на  $2M$  непересекающихся элементарных участков  $l_m$  так, чтобы  $L_0 = \bigcup_{m=1}^{2M} l_m$ . Обозначим через  $x_m$  точки, лежащие между интервалами  $l_{2m}$  и  $l_{2m+1}$  ( $m = 0, \dots, M$ ,  $l_0$  и  $l_{2M+1} = \emptyset$ ), а через  $y_m$  — точки между  $l_{2m-1}$  и  $l_{2m}$  ( $m = 1, \dots, M$ ). На  $L_0$  введем системы характеристических функций

$$\Psi_m(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in l_{2m-1} \cup l_{2m}, \\ 0, & \text{если } s \notin l_{2m-1} \cup l_{2m}, \end{cases} \quad \Phi_m(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in l_{2m} \cup l_{2m+1}, \\ 0, & \text{если } s \notin l_{2m} \cup l_{2m+1}, \end{cases}$$

с помощью которых приближенные решения  $\bar{\gamma}(s)$  и  $\bar{\Gamma}(s)$  уравнений (2.4), (2.5) запишем в виде линейных комбинаций

$$(4.1) \quad \bar{\gamma}(s) = \sum_{m=1}^M \bar{\gamma}_m \Psi_m(s) \quad \text{и} \quad \bar{\Gamma}(s) = \sum_{m=0}^M \bar{\Gamma}_m \Phi_m(s)$$



Р и с. 2

( $\tilde{\gamma}_m$  и  $\bar{\Gamma}_m$  — приближенные значения искомых функций в точках интерполяции  $y_m$  и  $x_m$  соответственно). Введем интенсивности скачков касательной составляющей вектора скорости на интервалах профиля  $\tilde{\gamma}_m = \int_{l_{2m} \cup l_{2m-1}} \gamma(s) ds \approx \bar{\gamma}_m \Delta_m$  ( $\Delta_m$  определяет длину участка  $l_{2m} \cup l_{2m-1}$ ). Тогда из (4.1) и (2.4) следует справедливость соотношений

$$(4.2) \quad \bar{\Gamma}_n = \sum_{m=1}^n \tilde{\gamma}_m, \quad \bar{\Gamma}_0 = \bar{\Gamma}_M = 0, \quad n = 1, \dots, M-1.$$

Для получения дискретного аналога уравнения (2.5) интегральный оператор  $I_0$ , в ядро которого входит полюс, аппроксимируем по аналогии с методом дискретных особенностей. С этой целью в точках  $y_m$  расположим точечные особенности функции  $K_0$  с интенсивностями  $\tilde{\gamma}_m$ , т. е.  $I_0(x) = \sum_{m=1}^M \tilde{\gamma}_m K_0(y_m, x)$ . Аппроксимацию второго интегрального оператора  $I_1$  с ядром, имеющим логарифмическую особенность, проведем в соответствии с общей схемой метода саморегуляризации [8]. Подставляя приближение (4.1) для решения  $\Gamma(s)$  в интегральный оператор  $I_1$ , получим

$$I_1(x) = \sum_{m=1}^M \bar{\Gamma}_m \int_{l_{2m} \cup l_{2m+1}} K_1(y, x) dS_y.$$

Выбирая теперь в качестве точек коллокации точки  $x_n$ , приходим к системе линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующей уравнение (2.5),

$$(4.3) \quad \sum_{m=1}^M \left( \tilde{\gamma}_m K_0(y_m, x_n) + \bar{\Gamma}_m \int_{l_{2m} \cup l_{2m+1}} K_1(y, x_n) dS_y \right) = f(x_n),$$

неизвестные коэффициенты которой  $\tilde{\gamma}_m$  и  $\bar{\Gamma}_m$  связаны между собой дополнительными соотношениями (4.2),  $n = 1, \dots, M-1$ . При таком выборе точек коллокации матрица  $\|A_{mn}\|$  с элементами  $A_{mn} = \int_{l_{2m} \cup l_{2m+1}} K_1(y, x_n) dS_y$  получается с преобладающей главной диагональю, а для тонкой пластины при ее равномерном разбиении она симметрична. Это дости-

гаются за счет совпадения точек коллокации с узлами интерполяции при аппроксимации интегрального оператора  $\bar{I}_1$  уравнения (2.5), ядро которого содержит логарифмическую особенность.

Алгоритм вычисления матричных элементов  $A_{mn}$  не связан непосредственно с аппроксимацией искомого решения. Для их вычисления могут быть использованы любые стандартные алгоритмы численного интегрирования. Однако, учитывая степень точности аппроксимации первого интегрального оператора, чтобы не усложнять алгоритм решения уравнения (2.5), ограничимся приближением

$$(4.4) \quad A_{mn} = K_1(x_m, x_n) \Delta_m \text{ при } m \neq n$$

( $\Delta_m$  — длина участка  $l_{2m} \cup l_{2m+1}$ ). В диагональных матричных элементах  $A_{nn}$  имеется логарифмическая особенность, которая при их определении выделялась в виде слагаемого

$$A_{nn} = \int_{l_{2n} \cup l_{2n+1}} K_1(y, x_n) dS_y = - \int_{l_{2n} \cup l_{2n+1}} \ln |y - x_n| dS_y + \\ + \int_{l_{2n} \cup l_{2n+1}} \tilde{K}_1(y, x_n) dS_y,$$

где первый интеграл вычислялся в явном виде, а для второго применялось приближение (4.4). В целях дальнейшего упрощения расчетной схемы систему (4.3) на основании (4.2) запишем относительно неизвестных  $\bar{\Gamma}_m$ :

$$(4.5) \quad \sum_{m=1}^{M-1} \bar{\Gamma}_m (K_0(y_m, x_n) - K_0(y_{m+1}, x_n) + A_{mn}) = f(x_n).$$

Систему (4.5) можно рассматривать как дискретный аналог уравнений (2.4), (2.5). Отметим, что алгоритм вычисления матричных элементов по предложенной схеме в отличие от метода дискретных особенностей усложнился лишь при нахождении диагональных элементов  $A_{nn}$ . Однако в случае применения этой дискретизации устраняется несимметричность при вычислении распределенных вдоль пластины характеристик (рис. 2, а, сплошная линия), причем имеет место более точное совпадение с методом Хаскинда и для интегральных характеристик (рис. 2, б, штриховая линия).

Были проведены численные исследования скорости сходимости предложенной расчетной схемы. Результаты сравнения даны в таблице, анализ их указывает на то, что модифицированная схема более эффективна.

5. При определении нестационарных аэродинамических сил, действующих на вибрирующие лопасти круговой решетки в сжимаемой жидкости, особый интерес представляет изучение вопроса о поведении сил на околорезонансных режимах. С этой целью проделаны расчеты присоединенных масс и коэффициентов демпфирования для круговой решетки из 20 радиальных пластин с  $R_1 = 1,0$ ,  $R_2 = 1,5$  при значениях  $k$ , близких к значениям вещественной части  $k_1^*$  и  $k_2^*$ , которые являются первыми собственными частотами колебаний газа около решетки при сдвигах фазы между колебаниями соседних пластин в решетке  $\mu_1 = \pi$  и  $\mu_2 = 0$  соответственно [6]. На основании расчетов установлено, что при колебаниях профилей на частоте, близкой к частоте собственных колебаний, возникают резонансные явления двух типов. В первом случае, когда собственные колебания газа локализируются в области межло-

M	Re $G_{22}$	Im $G_{22}$	M	Re $G_{22}$	Im $G_{22}$
10	1,0860	0,55409	40	1,1584	0,65705
20	1,1348	0,62124	50	1,1629	0,66439
30	1,1506	0,64494			

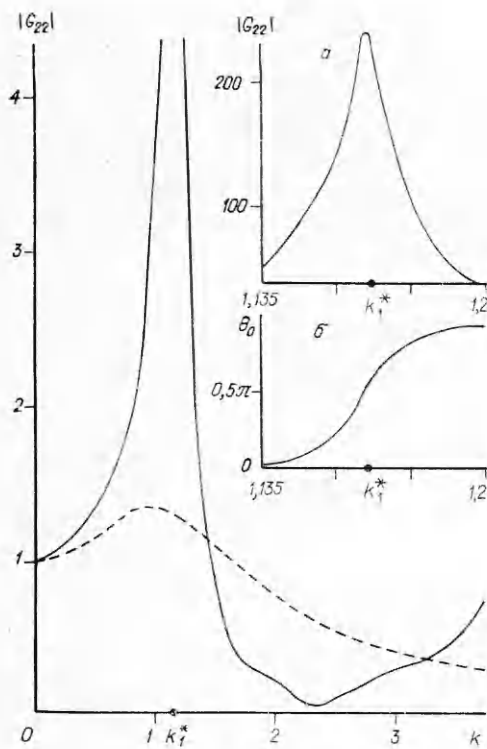


Рис. 3

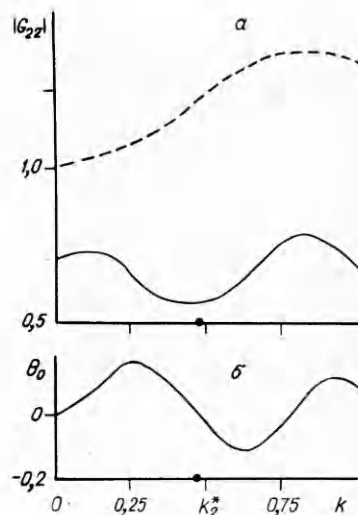


Рис. 4

паточных каналов ( $\mu_1 = \pi$ ), наблюдается явление резонанса с резким возрастанием амплитуды коэффициентов  $G_{22}$  аэродинамических сил (рис. 3, а). Для сравнения на рис. 3 и 4, а штриховой линией указаны значения амплитуды коэффициентов  $G_{22}$  для одиночной пластины. Отметим, что

при переходе через значение резонансной частоты фаза  $\theta_0$  между колебаниями пластины и действующей на нее силой меняется от 0 до  $\pi$  (рис. 3, б). Эти результаты отвечают представлениям, полученным при изучении поведения коэффициентов аэродинамических сил на околорезонансных режимах при обтекании прямых решеток тонких пластин [9].

Для сдвига фазы  $\mu_2 = 0$  собственные колебания локализируются во внутренней к решетке области ( $\rho < R_1$ ). В данном случае наблюдается резонанс поглощения, при котором амплитуда коэффициентов  $G_{22}$  уменьшается (рис. 4, а), а фаза  $\theta_0$  меняет знак (рис. 4, б). Ранее в теории решеток вопрос о существовании резонансов поглощения не рассматривался. Однако в одномерной теории резонаторов, присоединенных к линиям передач, встречаются резонансные явления обоих видов [10], анализ которых позволяет установить связь между ними. Действительно, при  $\mu_1 = \pi$  межлопаточные каналы можно интерпретировать как проходные резонаторы, связывающие пространство перед и за решеткой. В линиях волновых передач наличие проходных резонаторов приводит к резкому возрастанию амплитуды колебаний на резонансной частоте. Для круговых решеток при  $\mu_2 = 0$  межлопаточные каналы можно интерпретировать как волноводы, к которым присоединен резонатор, определяемый внутренней к решетке областью. А когда волновод заканчивается резонатором, как известно [10], в линии передачи наблюдается резонанс поглощения, который характеризуется теми же свойствами, что резонанс поглощения в круговой решетке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н. Присоединенные массы решетки пластин в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЭГ.— 1973.— № 2.
2. Ткачева Л. А. Расчет присоединенных масс пространственной кольцевой решетки лопастей // ПМТФ.— 1983.— № 5.



3. Рябченко В. П. Квазидвумерное приближение в задаче стационарного обтекания пространственной решетки // ПМТФ.— 1983.— № 2.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.— Киев: Наук. думка, 1984.
6. Окулов В. Л. Собственные колебания газа, обтекающего круговую решетку тонких профилей // Аэроупругость турбомашин.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1966.
8. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн.— М.: Радио и связь, 1982.
9. Курзин В. Б. Об акустическом резонансе при колебаниях решетки пластин в дозвуковом потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 5.
10. Пиппард А. Физика колебаний.— М.: Высш. шк., 1985.

Поступила 13/X 1987 г.,  
в окончательном варианте — 14/XII 1987 г.

УДК 532.59

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Франк

(Красноярск)

Теоретическое изучение уединенных поверхностных волн обычно проводится в рамках тех или иных моделей мелкой воды. Имеются также работы, в которых такие волны исследуются на основе численного решения уравнений Навье—Стокса [1], а также задачи Коши—Пуассона [2].

В настоящей работе численное моделирование уединенных волн проводится на основе дискретной модели несжимаемой жидкости. Суть подхода в целом состоит в том, что несжимаемый континуум моделируется с помощью конечной системы материальных точек с голономными связями [3]. При этом даже при грубой пространственной дискретизации такие модели состоятельны в смысле основных механических законов сохранения. Рассматриваемая здесь дискретная модель построена с использованием регулярной четырехугольной сетки и поэтому имеет определенное сходство с лагранжем методом LINC [4]. Близкая дискретная модель применялась также в [5, 6]. Приведены результаты расчетов уединенных волн различной амплитуды, кинематических и динамических характеристик их наката на вертикальную и наклонную стенки, а также сравнение с имеющимися теоретическими и экспериментальными результатами.

**1. Описание модели.** Рассмотрим слой несжимаемой жидкости конечной глубины со свободной границей. Разобьем область, занятую жидкостью  $\Omega$ , на четырехугольники (рис. 1). Будем считать, что в узлах полученной сетки находятся материальные частицы с массой, являющейся суммой четвертых частей масс, прилежащих к данному узлу четырехугольников. Например, для внутренних узлов  $m_{i,j} = (\rho/4)(V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i-1,j-1} + V_{i,j-1})$  ( $\rho$  — плотность жидкости). Таким образом, исходную непрерывную среду аппроксимировали конечной системой материальных частиц. Известно, что в континуальной модели несжимаемой жидкости нет потенциальных взаимодействий между частицами (нет внутренней энергии). Более того, природа сил взаимодействия вообще не рассматривается. Вместо этого вводится кинематическое условие несжимаемости, т. е. ограничение на возможные движения среды. В нашей дискретной модели также необходимо ввести какое-то дискретное условие несжимаемости, обеспечивающее постоянство объема жидкости. Им может быть, например, условие постоянства в процессе движения среды всех площадей четырехугольников  $V_{i,j} = \text{const}$ . Площадь каждого четырехугольника — функция координат его вершин  $V_{i,j} = V(\mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{r}_{i,j+1}, \mathbf{r}_{i+1,j+1}, \mathbf{r}_{i+1,j})$ , поэтому соотношения  $V_{i,j} = \text{const}$  представляют собой голономные связи, наложенные на возможные движе-

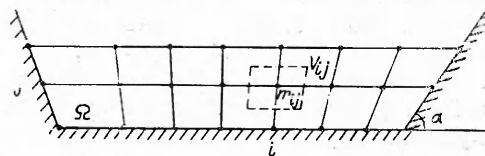


Рис. 1