

УДК 532.592

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Н. И. Макаренко, В. К. Костиков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: makarenko@hydro.nsc.ru, vasilii_kostikov@mail.ru

Рассматривается задача о генерации нелинейных нестационарных волн на поверхности идеальной жидкости в бесконечно глубоком водоеме при движении погруженного эллиптического цилиндра. Для этого используется метод сведения исходной постановки к интегродифференциальной системе уравнений для функции, задающей форму свободной поверхности, а также для нормальной и тангенциальной составляющих скорости на свободной поверхности. Для случая движения цилиндра с постоянным ускорением из состояния покоя построена начальная по времени асимптотика решения задачи.

Ключевые слова: свободная поверхность, эллиптический цилиндр, нелинейные нестационарные волны, начальная асимптотика движения.

Введение. Нелинейная задача о нестационарном движении тела под свободной поверхностью идеальной жидкости представляет большой интерес с точки зрения приложений в морской гидродинамике. Обзоры результатов численных исследований данной задачи содержатся в работах [1–4]. Работ, посвященных аналитическим исследованиям нелинейного взаимодействия погруженного тела со свободной границей, меньше. Однозначная разрешимость двумерной задачи о движении кругового цилиндра под свободной поверхностью установлена в [5], пространственная задача о движении погруженной сферы исследована в [6, 7]. В работах [5–7] обоснована асимптотика решения по малому параметру, характеризующему размеры тела, а также построена начальная по времени асимптотика волнового движения в случае равноускоренного перемещения тела. Детальному исследованию начальной стадии неустойчившегося движения кругового цилиндра под свободной границей посвящены работы [8–10].

В настоящей работе рассматривается задача о генерации нелинейных волн при неустойчившемся движении эллиптического цилиндра. Для построения асимптотического решения данной задачи используется предложенный Л. В. Овсянниковым метод редукции исходной задачи к системе интегродифференциальных уравнений на свободной границе [11]. При этом определяющее значение имеют построение и анализ граничного интегрального уравнения для нормальной скорости жидкости на свободной поверхности.

Исходные уравнения. Двумерное безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости в бесконечно глубоком водоеме и перемещение тела, полностью погруженного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00671) и в рамках гранта Правительства РФ (№ 11.G34.31.0035), Программы Президиума РАН (код проекта 23.2) и Интеграционного проекта СО РАН № 117.

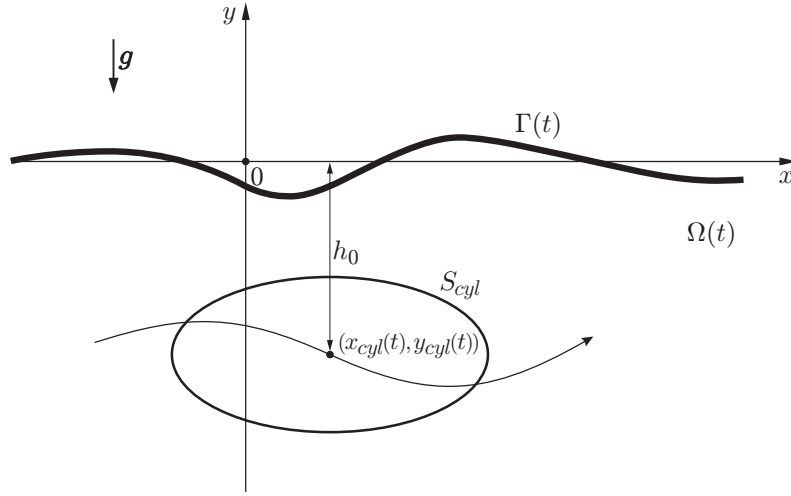


Рис. 1. Схема движения

в жидкость, рассматриваются в неподвижной декартовой системе координат Oxy в плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (рис. 1). Введем безразмерные переменные, выбирая в качестве единицы длины начальное заглубление h_0 оси цилиндра. В качестве единицы скорости примем характерную скорость движения цилиндра u_0 , единицы времени — отношение h_0/u_0 , единицы давления — величину ρu_0^2 (ρ — плотность жидкости). Тогда уравнения для безразмерных компонент вектора скорости жидкости $\mathbf{u} = (U, V)$ и безразмерного давления p принимают вид

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_y + p_x &= 0, \\ V_t + UV_x + VV_y + p_y &= -\lambda, \\ U_x + V_y &= 0, \quad U_y - V_x = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda = gh_0/u_0^2$ — квадрат величины, обратной числу Фруда; \mathbf{g} — ускорение свободного падения. На свободной поверхности $\Gamma(t): y = \eta(x, t)$ граничные условия имеют форму

$$\eta_t + U\eta_x = V, \quad p = 0, \quad (x, y) \in \Gamma(t), \quad (2)$$

а условие непротекания на поверхности цилиндра задается в виде

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{cyl}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x, y) \in S_{cyl}(t), \quad (3)$$

где \mathbf{n} — нормаль к границе цилиндра S_{cyl} . Далее будем рассматривать поступательное перемещение цилиндра, имеющего эллиптическое поперечное сечение с полуосями a и b , при этом область течения представляет собой двусвязную область

$$\Omega(t) = \left\{ (x, y): \frac{(x - x_{cyl}(t))^2}{a^2} + \frac{(y - y_{cyl}(t))^2}{b^2} > 1, \quad y < \eta(x, t) \right\}.$$

Будем полагать, что координаты центра сечения цилиндра $(x_{cyl}(t), y_{cyl}(t))$ известны в каждый момент времени t , причем начальное поле скоростей жидкости $\mathbf{u}_0 = (U_0, V_0)$ и заданный закон движения цилиндра со скоростью $\mathbf{u}_{cyl}(t) = (x'_{cyl}(t), y'_{cyl}(t))$ удовлетворяют условиям согласования

$$\begin{aligned} U_{0x} + V_{0y} &= 0, \quad U_{0y} - V_{0x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega(0), \\ (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{cyl}(0)) \cdot \mathbf{n}_0 &= 0, \quad (x, y) \in S_{cyl}(0). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку компонента $\Gamma(t)$ границы области течения $\Omega(t)$ не известна и подлежит определению, выполним переход от системы уравнений (1) к системе дифференциальных уравнений для функции η и функций

$$u(x, t) = (U + \eta_x V)|_{y=\eta}, \quad v(x, t) = (V - \eta_x U)|_{y=\eta}.$$

Величины u и v задают соответственно касательную и нормальную скорости жидкости на искомой свободной поверхности $y = \eta(x, t)$, уравнения для этих функций имеют вид

$$\eta_t = v, \quad u_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2 - 2\eta_x uv - v^2}{1 + \eta_x^2} + \lambda \eta_x = 0. \quad (5)$$

Первое уравнение (5) представляет собой кинематическое условие (2) на свободной поверхности, записанное в терминах новых искомым функций; второе уравнение (5) является комбинацией первых двух уравнений системы (1). При этом учитываются условие постоянства давления на свободной поверхности, согласно которому $(p_x + \eta_x p_y)|_{y=\eta} = 0$, и соотношений

$$(U, V) = (1 + \eta_x^2)^{-1}(u - \eta_x v, v + \eta_x u), \quad U_t + \eta_x V_t = u_t - v_x V \quad (y = \eta(x, t)).$$

Нелинейная эволюционная система (5) с одной пространственной независимой переменной $-\infty < x < +\infty$ является недоопределенной. Для ее замыкания далее выводится интегральное уравнение, порожаемое уравнениями Коши — Римана для функций U и V (последние два уравнения в системе (1)).

Граничное интегральное уравнение. Исходной формулой служит интегральная формула Коши для комплексной скорости жидкости $F(z, t) = U - iV$, которая является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$ в области $\Omega(t)$:

$$2\pi i F(z, t) = \int_{\Gamma(t)} \frac{F(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{S_{cyl}(t)} \frac{F(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega(t). \quad (6)$$

Формула (6) содержит интеграл по поверхности обтекаемого тела S_{cyl} , что затрудняет построение системы уравнений, в которой неизвестными величинами являются только функции u, v, η . Заменяем данный контурный интеграл на интеграл по кривой Γ с помощью преобразования подынтегральной функции [12]. С этой целью рассмотрим вспомогательные конформные отображения комплексной плоскости ζ , в которой находится эллипс с полуосями a, b и центром в точке $\zeta = z_{cyl}(t) = x_{cyl}(t) + iy_{cyl}(t)$, на параметрическую плоскость вспомогательной комплексной переменной τ . Для этого используем функцию Жуковского

$$\zeta = z_{cyl} + \tau + c^2/(4\tau) \quad (7)$$

с вещественным параметром $c = \sqrt{|a^2 - b^2|} \geq 0$. При $c \neq 0$ преобразование, обратное отображению (7), является неоднозначным. Положим

$$\begin{aligned} \tau(\zeta; t, c) &= (\zeta - z_{cyl}(t) + \sqrt{(\zeta - z_{cyl}(t))^2 - c^2})/2, \\ \tau_1(\zeta; t, c) &= (\zeta - z_{cyl}(t) - \sqrt{(\zeta - z_{cyl}(t))^2 - c^2})/2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sqrt{(\zeta - z_{cyl})^2 - c^2}$ — ветвь корня, положительная при вещественных положительных значениях подкоренного выражения. Отображение $\zeta \rightarrow \tau(\zeta; t, c)$ преобразует область, внешнюю по отношению к эллипсу S_{cyl} в плоскости ζ , в область, внешнюю по отношению к кругу $|\tau| > r$ радиусом $r = (a+b)/2$ с центром в точке $\tau = 0$, а отображение $\zeta \rightarrow \tau_1(\zeta; t, c)$

исходную область преобразует в указанный круг. В соответствии с равенством (7) данные конформные отображения связаны между собой формулами Виета $\tau(\zeta) + \tau_1(\zeta) = \zeta - z_{cyl}$ и $\tau(\zeta)\tau_1(\zeta) = c^2/4$. Эти отображения использовались в работе [13] для построения функции Грина в линейной задаче о стационарных поверхностных волнах, генерируемых погруженным эллиптическим цилиндром. Для функций $\tau(\zeta)$ и $\tau_1(\zeta)$ выполняются следующие свойства. Во-первых, при $\zeta \neq z$ для них справедливо тождество

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\tau'(z)}{\tau(\zeta) - \tau(z)} + \frac{\tau_1'(z)}{\tau(\zeta) - \tau_1(z)}, \quad (9)$$

которое нетрудно проверить, дифференцируя формулы Виета, связывающие рассматриваемые функции. Во-вторых, имеет место аналог преобразования Милн — Томсона: при условии $|\tau(\zeta)| = r$ справедливо тождество

$$\frac{1}{\tau(\zeta) - \tau(z)} = -\frac{1}{\tau(z)} \frac{\overline{\tau(\zeta)}}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)}, \quad (10)$$

где $\tau_*(z) = r^2/\overline{\tau(z)}$ — инверсия точки $\tau(z)$ относительно окружности радиусом r в плоскости τ ; черта означает операцию комплексного сопряжения.

Используя тождество (9) для ядра Коши, интеграл по границе цилиндра в формуле (6) представим в виде суммы

$$\int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta = \tau'(z) \int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau(z)} d\zeta + \tau_1'(z) \int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau_1(z)} d\zeta. \quad (11)$$

Заметим, что с учетом тождества Милн — Томсона (10) и записанного в комплексной форме $\text{Im} \{ (F(\zeta, t) - \overline{z'_{cyl}(t)}) d\zeta \} = 0$, $\zeta \in S_{cyl}$, условия непротекания (3) на границе цилиндра первый из двух интегралов в правой части (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau(z)} d\zeta = & -\frac{1}{\tau(z)} \int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)} d\zeta + \\ & + \overline{z'_{cyl}(t)} \int_{S_{cyl}} \frac{d\zeta}{\tau(\zeta) - \tau(z)} + \frac{z'_{cyl}(t)}{\tau(z)} \int_{S_{cyl}} \frac{\overline{\tau(\zeta)}}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)} d\zeta \quad (12) \end{aligned}$$

($z'_{cyl}(t) = x'_{cyl}(t) + iy'_{cyl}(t)$ — скорость перемещения центра эллипса). Поскольку при $z \in \Omega(t)$ точка $\tau = \tau_*(z)$ находится строго внутри круга $|\tau| < r$, а при $\zeta \in S_{cyl}(t)$ имеем $|\tau(\zeta)| = r$, первый интеграл в правой части формулы (12) можно преобразовать путем деформации контура интегрирования в интеграл по свободной границе:

$$\int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)} d\zeta = \gamma + \tau_*(z) \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)} d\zeta, \quad \gamma = \int_{S_{cyl}} F(\zeta, t) d\zeta,$$

где γ — циркуляция скорости вокруг цилиндра, согласно теореме Томсона не зависящая от времени. Остальные интегралы в правой части выражения (12) вычисляются в явном виде с помощью теоремы о вычетах с учетом того, что точка $\tau = \tau(z)$, в отличие от точки $\tau_*(z)$, находится вне круга $|\tau| > r$. В результате для интеграла из левой части формулы (12) получаем

$$\int_{S_{cyl}} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau(z)} d\zeta = -\frac{1}{\tau(z)} \left(\gamma + \frac{r^2}{\tau(z)} \overline{\int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)} d\zeta} \right) + \frac{2\pi i r^2}{\tau^2(z)} (z'_{cyl}(t) - k \overline{z'_{cyl}(t)}). \quad (13)$$

Вещественный параметр k в правой части соотношения (13) задается формулой

$$k = \frac{c^2}{4r^2} = \frac{|a - b|}{a + b}.$$

Этот геометрический параметр, принимающий значения в интервале $0 \leq k \leq 1$, характеризует степень отличия эллиптического цилиндра от кругового. При $k = 0$ цилиндр является круговым с радиусом $r = a = b$, еще один предельный случай $k = 1$ соответствует вырождению эллипса S_{cyl} в горизонтальную пластину шириной $2a$ (при $b = 0$) или вертикальную пластину высотой $2b$ (при $a = 0$).

Второй контурный интеграл в правой части соотношения (11) аналогичным способом преобразуется к интегралу по кривой Γ (в этом случае следует учесть, что точка $\tau = \tau_1(z)$ находится внутри круга $|\tau| < r$). В результате получаем следующее представление комплексной скорости жидкости F , содержащее интегралы только по свободной границе:

$$2\pi i F(z, t) = \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta + r^2 \left(\int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)} d\zeta - k \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, t)}{\tau(\zeta) - k \tau_*(z)} d\zeta \right) \frac{\tau'(z)}{\tau^2(z)} + f(z, t). \quad (14)$$

Здесь внеинтегральное слагаемое f имеет вид

$$f(z, t) = \gamma \frac{\tau'(z)}{\tau(z)} + 2\pi i r^2 (z'_{cyl}(t) - k \overline{z'_{cyl}(t)}) \frac{\tau'(z)}{\tau^2(z)}.$$

Функция f представляет собой известное выражение для комплексной скорости плоского течения, возникающего при обтекании эллиптического контура безграничным потоком жидкости. В частном случае кругового цилиндра радиусом r согласно формуле (7) конформное отображение $\tau(z)$ сводится к сдвигу $\tau(z) = z - z_{cyl}$, при этом первое слагаемое в выражении для f является комплексной скоростью точечного вихря интенсивности γ , а второе — скоростью диполя с моментом $2\pi r^2 z'_{cyl}(t)$. В формуле (14) интегральные операторы с общим коэффициентом r^2 имеют также множитель $\tau'(z)/\tau^2(z)$, который в случае эллиптического цилиндра является конформным образом диполя в плоскости переменной τ . Интенсивность указанного самоиндуцированного диполя нелокально и нелинейно зависит от формы свободной поверхности в данный момент времени и поля скоростей на ней. Таким образом, представление поля скоростей (14) является основой для построения мультипольных приближений путем разложения по степеням нелинейности или степеням присутствующих безразмерных параметров.

Выполнив в соотношении (14) предельный переход и устремив точку z , лежащую внутри области $\Omega(t)$, к точке $z_{\Gamma}(x, t) = x + i\eta(x, t)$ на свободной поверхности $\Gamma(t)$, получаем интегральное уравнение в действительной форме. При этом необходимо учитывать скачок интеграла Коши в правой части, равный величине $i\pi F(z_{\Gamma}, t)$, и соотношение $u - iv = (1 + i\eta_x)F(z_{\Gamma}, t)$. В результате получаем сингулярное интегральное уравнение

Фредгольма второго рода, связывающее компоненты u и v скорости жидкости на свободной поверхности:

$$\pi v(x) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, s)v(s) ds = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, s)u(s) ds + v_{curl}(x) + v_{dip}(x) \quad (15)$$

(v.p. — главные значения). В уравнении (15) ядра A и B , нелинейно зависящие от функции η , имеют вид

$$A = A_f + r^2 A_r, \quad B = B_f + r^2 B_r,$$

где ядра A_f и B_f с особенностью в точке $s = x$, определяемые формулой

$$A_f(x, s) + iB_f(x, s) = \frac{i[1 + i\eta_x(x)]}{x - s + i[\eta(x) - \eta(s)]}, \quad (16)$$

соответствуют задаче о волнах на свободной поверхности $y = \eta(x, t)$ в отсутствие цилиндра, а регулярные ядра A_r и B_r , описывающие взаимодействие цилиндра со свободной границей, задаются соотношением

$$A_r(x, s) + iB_r(x, s) = \left(\frac{1}{\tau(s + i\eta(s)) - \tau_*(x + i\eta(x))} + \frac{k}{\tau(s + i\eta(s)) - k\tau_*(x + i\eta(x))} \right) \left(\frac{i}{\tau(x + i\eta(x))} \right)_x. \quad (17)$$

Внеинтегральные члены в правой части (15) имеют вид

$$v_{curl}(x) = \gamma \operatorname{Re} [\ln \tau(x + i\eta(x))]_x, \quad v_{dip}(x) = r^2 \operatorname{Re} \left(\frac{2\pi i \{k z'_{cyl}(t) - z'_{cyl}(t)\}}{\tau(x + i\eta(x))} \right)_x. \quad (18)$$

Функции v_{curl} , v_{dip} определяют нормальные скорости жидкости, индуцируемые на свободной границе $\Gamma(t)$ конформными образами точечного вихря и диполя. Интегральное уравнение (15), замыкающее систему дифференциальных уравнений (5), содержит всю информацию о взаимодействии цилиндра со свободной поверхностью. Время t , ранее для краткости частично опущенное, в уравнении (15) содержится лишь как параметр, причем явным образом — только в законе движения цилиндра $z = z_{cyl}(t)$. Заметим, что при $k \rightarrow 0$ ядра A_r , B_r и функции v_{curl} , v_{dip} совпадают с ядрами интегральных операторов и внеинтегральными членами, полученными для случая кругового цилиндра [5].

Движение цилиндра с постоянным ускорением. Рассмотрим начальную стадию волнового процесса, возникающего из состояния покоя, когда в момент времени $t = 0$ погруженное тело находится в неподвижной жидкости под невозмущенной свободной границей $y = 0$. Будем полагать, что при $t > 0$ цилиндр движется с ускорением $\mathbf{w} = w(\cos \alpha, \sin \alpha)$, где абсолютная величина ускорения $w = |\mathbf{w}|$ и угол α направления движения к горизонту постоянны. Тогда в качестве масштаба скорости можно выбрать величину $u_0 = \sqrt{wh_0/2}$. В безразмерных переменных равноускоренное движение центра сечения цилиндра в комплексной плоскости $z = x + iy$ задается траекторией

$$z_{cyl}(t) = t^2 \cos \alpha + i(-1 + t^2 \sin \alpha).$$

Движению из состояния покоя соответствует задача с начальными данными $\eta(x, 0) = u(x, 0) = 0$ для эволюционной системы уравнений (5). Заметим, что комплексная скорость $f(z, t)$ в соотношении (14) имеет особенность типа вихря лишь при наличии начальной циркуляции жидкости вокруг обтекаемого тела. Следовательно, в рассматриваемом случае $\gamma = 0$, т. е. при всех $t \geq 0$ в интегральном уравнении (15) отсутствует слагаемое v_{curl} . Поскольку $z'_{cyl}(0) = 0$, в уравнении (15) в момент времени $t = 0$ отсутствует и

дипольное слагаемое v_{dip} . Поэтому данное уравнение, однородное при $t = 0$ относительно функции v , имеет решение $v(x, 0) = 0$. Указанное свойство означает, что условия согласования (4) выполняются в случае плавного старта цилиндра в покоящейся жидкости. С учетом сказанного выше решение системы (5), (15) можно искать в виде степенных по t рядов

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= t\eta_1(x) + t^2\eta_2(x) + t^3\eta_3(x) + \dots, \\ u(x, t) &= tu_1(x) + t^2u_2(x) + t^3u_3(x) + \dots, \\ v(x, t) &= tv_1(x) + t^2v_2(x) + t^3v_3(x) + \dots.\end{aligned}\tag{19}$$

Из дифференциальных уравнений (5) в силу однородности начальных условий следует, что часть коэффициентов в (19) равна нулю: $\eta_1 = u_1 = u_2 = 0$. Сравнение коэффициентов рядов при степенях t в этих уравнениях позволяет получить рекуррентные соотношения, с помощью которых функции η_n при $n \geq 2$ и функции u_n при $n \geq 3$ выражаются через коэффициенты v_1, \dots, v_{n-1} :

$$\begin{aligned}\eta_n &= \frac{1}{n} v_{n-1}, & u_3 &= \frac{1}{6} (v_1^2 - \lambda v_1)_x, \\ u_4 &= \frac{1}{4} (v_1 v_2)_x - \frac{1}{12} \lambda v_{2x}, & u_5 &= \frac{1}{10} (2v_1 v_3 + v_2^2)_x - \frac{1}{20} \lambda v_{3x}, & \dots\end{aligned}\tag{20}$$

Для коэффициентов v_n ($n = 1, 2, \dots$), остающихся неизвестными, из интегрального уравнения (15) получаем рекуррентные интегральные соотношения. Для компактной формулировки этих соотношений введем несколько обозначений. Поскольку разложение функции η начинается со степени t^2 , ядра интегральных операторов в уравнении (15) можно разложить в ряды следующим образом:

$$\begin{aligned}A_f &= t^2 A_f^{(2)} + t^3 A_f^{(3)} + \dots, & B_f &= B_f^{(0)} + t B_f^{(1)} + \dots, \\ A_r &= A_r^{(0)} + t A_r^{(1)} + \dots, & B_r &= B_r^{(0)} + t B_r^{(1)} + \dots.\end{aligned}\tag{21}$$

Из разложений (21) следует, что основную роль при построении асимптотического решения играют ядра низшего порядка $B_f^{(0)}$ и $A_r^{(0)}$ (в меньшей мере — ядро B_r). Согласно формуле (16) ядро $B_f^{(0)}$ является ядром сингулярного интегрального преобразования Гильберта H

$$Hu(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{x-s} ds.$$

Для определения вида регулярного ядра $A_r^{(0)}$ в формуле (17) с учетом разложения функции $\eta(x, t)$ необходимо для функции $1/\tau$ использовать следующее асимптотическое представление при малых временах t :

$$\frac{1}{\tau(x + i\eta(x, t); t, c)} = Q(x; c) - iP(x; c) + t^2(i\eta_2(x) - e^{i\alpha})(Q_x(x; c) - iP_x(x; c)) + O(t^4),\tag{22}$$

где

$$P(x; c) = -\text{Im} \left[\frac{1}{\tau(x; 0, c)} \right], \quad Q(x; c) = \text{Re} \left[\frac{1}{\tau(x; 0, c)} \right].$$

Заметим, что в силу свойства симметрии конформного отображения $z \rightarrow \tau(z; 0, c)$, определенной формулой (8), функция $P(x; c)$ четна по x , а $Q(x; c)$ нечетна и при $x \geq 0$ они имеют вид

$$P(x; c) = -\frac{2}{c^2} + \frac{\sqrt{2}}{c^2} \sqrt{\sqrt{(x^2 - c^2 - 1)^2 + 4x^2} - x^2 + c^2 + 1},$$

$$Q(x; c) = \frac{2x}{c^2} - \frac{\sqrt{2}}{c^2} \sqrt{\sqrt{(x^2 - c^2 - 1)^2 + 4x^2} + x^2 - c^2 - 1}.$$

Тогда для ядра $A_r^{(0)}$ справедливо выражение

$$A_r^{(0)}(x, s) = \frac{(\tilde{Q}(s) - r^2 Q(x))P_x(x) - (\tilde{P}(s) + r^2 P(x))Q_x(x)}{(\tilde{Q}(s) - r^2 Q(x))^2 + (\tilde{P}(s) + r^2 P(x))^2} +$$

$$+ k \frac{(\tilde{Q}(s) - kr^2 Q(x))P_x(x) + (\tilde{P}(s) - kr^2 P(x))Q_x(x)}{(\tilde{Q}(s) - kr^2 Q(x))^2 + (\tilde{P}(s) - kr^2 P(x))^2},$$

где

$$\tilde{P}(s) = \frac{P(s)}{P^2(s) + Q^2(s)}, \quad \tilde{Q}(s) = \frac{Q(s)}{P^2(s) + Q^2(s)}.$$

С учетом введенных выше обозначений интегральные уравнения для коэффициентов v_n можно записать в виде

$$\pi v_n(x) + r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} A_r^{(0)}(x, s) v_n(s) ds = \varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Здесь правые части φ_n не зависят от v_m с номерами $m \geq n$. В частности, имеем

$$\varphi_1 = v_{dip}^{(1)}, \quad \varphi_2 = -r^2 A_r^{(1)} v_1, \quad \varphi_3 = v_{dip}^{(3)} + H u_3 + r^2 (B_r^{(0)} u_3 - A_r^{(1)} v_2 - A_r^{(2)} v_1) - A_f^{(2)} v_1,$$

где $v_{dip}^{(n)}$ — коэффициенты разложения нормальной скорости v_{dip} по степеням t (в силу асимптотики (22) $v_{dip}^{(2)} = 0$); $A_r^{(n)}$, $A_f^{(n)}$, $B_r^{(n)}$ — интегральные операторы с ядрами из разложения (21), для которых используются те же обозначения. Заметим, что структура функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ наследует структуру операторов граничного интегрального уравнения (15), имеющих, как сказано выше, ясный физический смысл. Это позволяет учитывать вклад различных по своей гидродинамической природе членов в процесс волнообразования на разных временных порядках.

Следует также отметить, что уравнения (20), (23) являются точными соотношениями для коэффициентов рядов (19), полученными без каких-либо приближений. Вопрос о сходимости этих рядов не решен даже для случая кругового цилиндра, для которого в работе [5] установлена локальная по времени разрешимость исходной задачи без предположений об аналитическом виде закона движения тела. Аналитичность решения по времени t строго доказана в родственной задаче о всплытии пузыря в тяжелой жидкости [14], качественные характеристики соответствующих рядов исследованы в [15]. В случае погруженного цилиндра ситуация осложняется тем, что при очень большом ускорении за телом может возникать область низкого давления с образованием растущей каверны. Такая постановка задачи рассмотрена в работе [10], где построена и численно исследована локальная асимптотика решения вблизи обтекаемого кругового цилиндра, согласованная с внешним

разложением вида (19). В настоящей работе, целью которой является получение аналитических формул для решения в случае цилиндра некруговой формы, рассматриваются только безотрывные режимы движения тела.

Приближенное решение. Из сказанного выше следует, что рекуррентное уравнение (23) играет главную роль при нахождении начальной асимптотики волнового движения. Это линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции v_n однозначно разрешимо при малых значениях параметра r , т. е. в случае достаточно большого начального заглубления цилиндра. Его решение $v_n = (\pi I + r^2 A_r^{(0)})^{-1} \varphi_n$ можно представить с помощью ряда Неймана для интегрального оператора $A_r^{(0)}$. Однако следует учитывать, что при $n \geq 2$ правые части φ_n зависят от функций v_1, v_2, \dots, v_{n-1} нелинейно и нелокально.

Выделяя в искомом решении главные члены асимптотики по малому параметру r , можно получить явные приближенные формулы. Непосредственно из (18) и рекуррентных соотношений (20) следует, что эти главные члены имеют порядок $O(r^2)$. Основным препятствием к их получению является наличие интегрального слагаемого Hu_3 в выражении для φ_3 . Эта трудность преодолевается путем использования свойств аналитического продолжения функции $1/\tau(z; 0, c)$, имеющей две точки ветвления $z = C_{\pm} = \pm c/2 - i$ в комплексной плоскости $z = x + iy$. Риманова поверхность двузначной функции, обратной отображению Жуковского (7), состоит из двух листов, склеенных по отрезку $[C_-, C_+]$ таким образом, что верхний берег указанного разреза на первом листе соединяется с нижним берегом аналогичного разреза на втором листе, а верхний берег разреза $[C_-, C_+]$ на втором листе — с нижним берегом разреза на первом листе. Отсюда получаем, что ветвь $1/\tau(z; 0, c)$ однозначна и аналитична всюду вне отрезка $[C_-, C_+]$, причем на бесконечности она убывает по закону z^{-1} . Следовательно, вещественная и мнимая части функции $1/\tau(x; 0, c) = Q(x; c) - iP(x; c)$, при $y = 0$ являющиеся граничными значениями для сопряженных гармонических функций по x, y в верхней полуплоскости $y > 0$, связаны между собой преобразованием Гильберта посредством соотношений $HQ = -P$ и $HP = Q$. С помощью указанного свойства функций P и Q для коэффициентов асимптотического разложения формы свободной поверхности с точностью до членов порядка $O(r^4)$ получаем

$$\begin{aligned} \eta_2 &= 2r^2((1+k)Q_x \sin \alpha - (1-k)P_x \cos \alpha), & \eta_3 &= 0, \\ \eta_4 &= r^2(-Q_{xx} \sin 2\alpha + (\cos 2\alpha - k)P_{xx}) + (\lambda r^2/6)((1-k)Q_{xx} \cos \alpha + (1+k)P_{xx} \sin \alpha). \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (24) с помощью формул (20) нетрудно найти явный вид главных членов асимптотики по r для коэффициентов v_1, v_2, v_3 разложения нормальной скорости и коэффициентов u_3, u_4, u_5 для касательной скорости на свободной границе.

Приближенное решение (24) справедливо и для случая кругового цилиндра радиусом r , который получается в пределе при $k \rightarrow 0$. В этом случае при фиксированном значении параметра r имеет место предел $c^2 = 4kr^2 \rightarrow 0$ и соответственно

$$\lim_{c \rightarrow 0} P(x; c) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \lim_{c \rightarrow 0} Q(x; c) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Трансформация алгебраических функций P и Q в указанные выше рациональные ядра Пуассона при $c \rightarrow 0$ сопровождается стягиванием особого для функции $1/\tau(z; 0, c)$ отрезка $[C_-, C_+]$ в одну особую точку $z = -i$, которая является полюсом ядра Коши $1/(z+i)$. В силу этого, например, в случае вертикального подъема цилиндра ($\alpha = \pi/2$) форма свободной поверхности как функция x и t определяется рациональным выражением

$$\eta(x, t) = 2r^2 t^2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + r^2 t^4 \left(2 - \frac{1}{3}\lambda\right) \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} + O(r^4 + t^5),$$

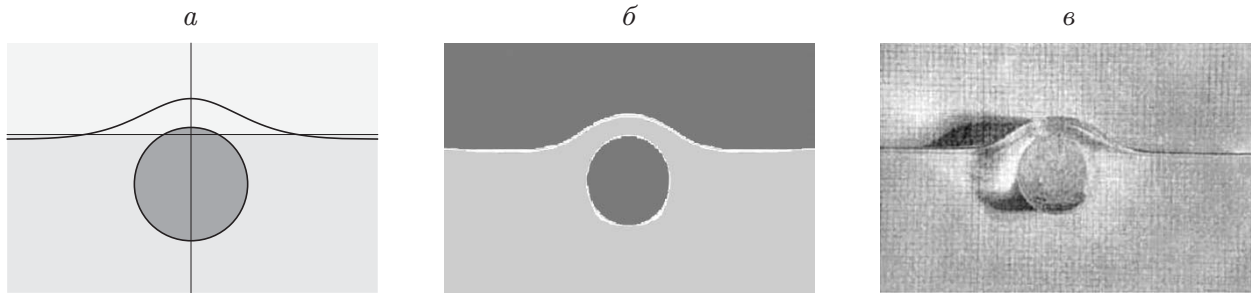


Рис. 2. Всплытие кругового цилиндра:
 a — асимптотическое решение ($r = 0,5$, $\lambda = 4,65$, $t = 0,75$); $б$ — численное решение уравнений Эйлера [4]; $в$ — данные эксперимента [16]

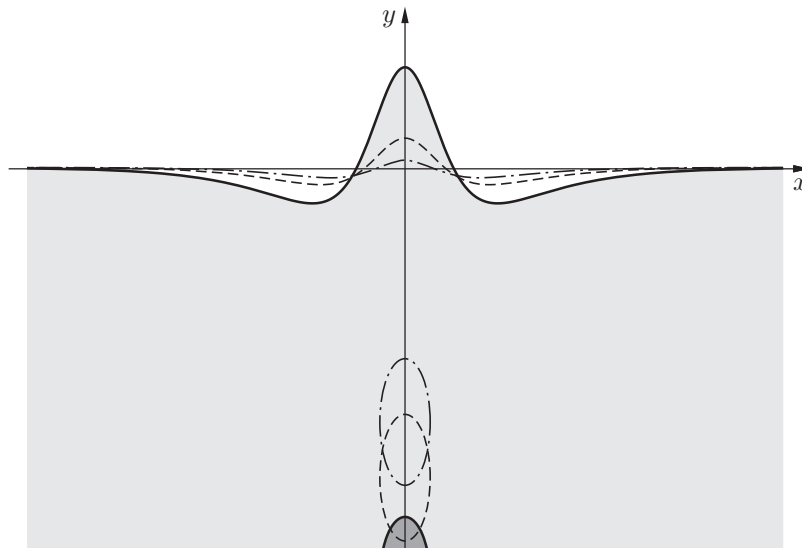


Рис. 3. Вертикальное погружение цилиндра, имеющего полуоси $a = 0,2$, $b = 0,5$, в моменты времени $t = 1$ (штрихпунктирные линии), $t = 1,2$ (штриховые линии), $t = 1,5$ (сплошные линии) при $\lambda = 1$

которое совпадает с известной начальной по времени асимптотикой решения для кругового цилиндра радиусом r [5, 9]. На рис. 2 видно хорошее согласование этого асимптотического решения с результатами численных расчетов [4] и экспериментов [16], в которых при достаточно быстром всплытии кругового цилиндра наблюдался вынос инерционного слоя жидкости.

На рис. 3–5 представлены характерные нестационарные формы свободной границы, описываемые решением (24) в случае движения эллиптического цилиндра. На рис. 3 показан процесс формирования одиночной струи всплеска над вертикально погружаемым цилиндром с отношением полуосей $a/b = 2/5$. На рис. 4 показано раздвоение аналогичной струи, происходящее на стадии ее формирования при менее быстром погружении цилиндра с отношением полуосей $a/b = 6/1$. На рис. 5 представлена начальная стадия распада выталкиваемого инерционного слоя в результате генерации поверхностных волн, распространяющихся в противоположных направлениях при медленном всплытии цилиндра.

Заключение. Рассмотрена нелинейная задача о неустановившихся волнах на поверхности жидкости в бесконечно глубоком водоеме, генерируемых движением погруженного эллиптического цилиндра. Получена эквивалентная система интегродифференциальных

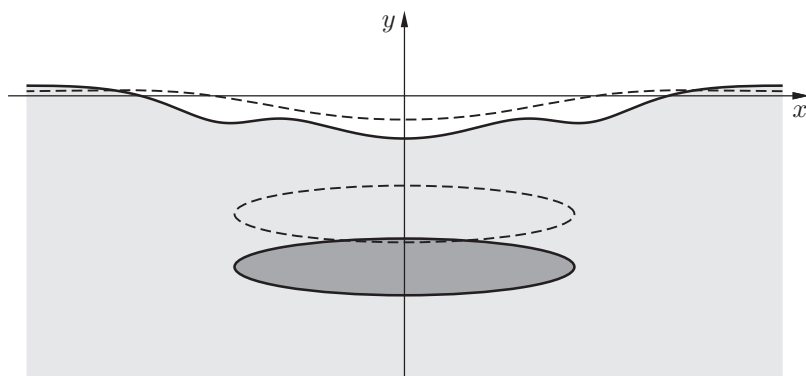


Рис. 4. Вертикальное погружение цилиндра, имеющего полуоси $a = 1,8$, $b = 0,3$, в моменты времени $t = 0,5$ (штриховые линии) и $t = 0,9$ (сплошные линии) при $\lambda = 5$

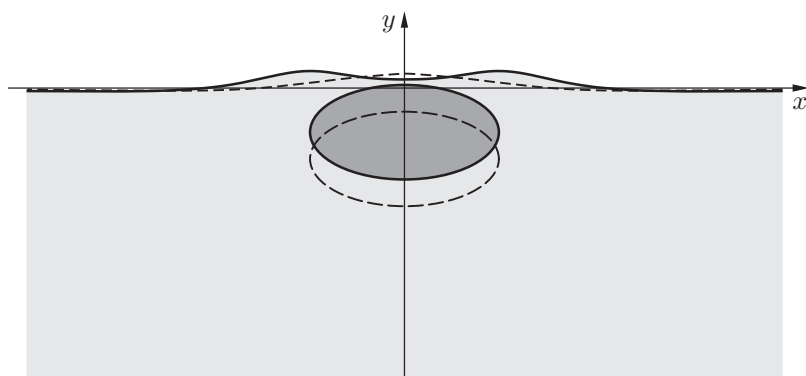


Рис. 5. Вертикальное всплытие цилиндра, имеющего полуоси $a = 1,0$, $b = 0,5$, в моменты времени $t = 0,5$ (штриховые линии) и $t = 0,73$ (сплошные линии) при $\lambda = 20$

уравнений на свободной поверхности, для решения которой построена начальная по времени асимптотика. С помощью разложения по малому параметру заглубления для главных членов асимптотики получены явные формулы, описывающие различные режимы взаимодействия цилиндра со свободной поверхностью. Полученные приближения решения можно использовать для определения гидродинамических реакций на погруженное тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стурова И. В.** Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн. Красноярск, 1990. (Препр. / СО АН СССР. Вычисл. центр; № 5).
2. **Горлов С. И.** Численные методы решения нелинейных нестационарных задач о генерации волн погруженным в жидкость телом // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 6. С. 9–20.
3. **Wu G. X., Eatock Taylor R.** The coupled finite element and boundary element analysis of nonlinear interactions between waves and bodies // Ocean Engng. 2003. V. 30. P. 387–400.
4. **Zhu X., Faltinsen O. M., Hu C.** Water entry and exit of a horizontal circular cylinder // Trans. ASME. J. Offshore Mech. Arctic Engng. 2007. V. 129, N 4. P. 253–264.
5. **Makarenko N. I.** Nonlinear interaction of submerged cylinder with free surface // Trans. ASME. J. Offshore Mech. Arctic Engng. 2003. V. 125, N 1. P. 72–75.
6. **Пяткина Е. В.** Начальная асимптотика волнового движения, генерируемого погруженной сферой // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 39–52.

7. **Пяткина Е. В.** Обоснование дипольного приближения в задаче о генерации нелинейных волн погруженной сферой // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 907–927.
8. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow due to impulsive motion of a small submerged circular cylinder // J. Fluid Mech. 1995. V. 286. P. 67–101.
9. **Tyvand P. A., Miloh T.** Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from the rest // J. Fluid Mech. 1995. V. 286. P. 103–116.
10. **Норкин М. В.** Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.
11. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов, В. Ю. Ляпидевский, П. И. Плотников, И. В. Стурова, В. И. Букреев, В. А. Владимиров. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
12. **Makarenko N. I.** Nonlinear water waves in the presence of submerged elliptic cylinder // Proc. of the 23rd Intern. conf. on offshore mech. and arctic engineering OMAE'04, Vancouver (Canada), 20–25 June 2004. [Electron. resource]. N. Y.: ASME, 2004. Paper 51413.
13. **Черепенин Н. Д.** О движении цилиндра, расположенного под свободной поверхностью // Изв. вузов. Сер. Математика. 1976. № 66. С. 81–90.
14. **Овсянников Л. В.** О всплывании пузыря // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1970.
15. **Karabut E. A.** Semi-analytical investigation of unsteady free-boundary flows // Intern. Ser. Numer. Math. 1991. V. 99. P. 215–224.
16. **Greenhow M., Moyo S.** Water entry and exit of horizontal circular cylinder // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1997. V. 355. P. 551–563.

*Поступила в редакцию 23/X 2012 г.,
в окончательном варианте — 20/XI 2012 г.*
