УДК 539.3:534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СРЕДЕ С НАКОПЛЕННЫМИ НЕОБРАТИМЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

А. А. Буренин, О. В. Дудко, А. А. Манцыбора

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток

Изучено влияние предварительно накопленных пластических деформаций на условия существования и распространение поверхностей разрывов упругих деформаций, возникающих при последующем ударном нагружении. Показано, что анизотропия свойств среды, определяемая наличием предварительных необратимых деформаций, влияет на процесс распространения повторных граничных возмущений по упругопластической среде. Подробно рассмотрены плоские ударные волны, распространяющиеся по одномерно и однородно деформированной среде. Приведены решения задач о мгновенной нагрузке и разгрузке упругопластического полупространства с необратимыми деформациями.

Введение. При моделировании деформирования материалов одной из основных является гипотеза существования свободного состояния. При этом деформации отсчитываются от некоторого состояния, в котором они полагаются равными нулю. Также нулевыми в свободном состоянии считаются напряжения. Из-за различных неоднородностей, присущих реальным материалам, свободное состояние в них практически не реализуется. В процессах предварительной обработки и изготовления изделий (прокатка, штамповка) материалы могут приобретать значительные необратимые деформации. Такие деформации могут явиться причиной остаточных напряжений, которые при отжиге и закаливании полностью не снимаются. Следовательно, накопленные необратимые деформации могут влиять на процессы последующего деформирования, в частности на характер распространения граничных возмущений по деформированным таким способом материалам. В настоящей работе изучаются такие эффекты при ударных воздействиях на тело с накопленными пластическими деформациями.

Поверхности сильных разрывов в упругопластических телах изучались в [1–3]. Однако в этих работах деформации считались малыми и изучались поверхности разрывов необратимых деформаций. В настоящей работе исследуется влияние предварительных необратимых деформаций на условия существования и распространение поверхностей разрывов обратимых деформаций. Очевидно, что такая постановка задачи бессмысленна в рамках малых деформаций, поэтому в данной работе используется модель упругопластической среды с конечными деформациями, как необратимыми, так и обратимыми.

1. Исходные модельные зависимости. В основе построения теории конечных деформаций лежит способ разделения наблюдаемых в экспериментах полных деформаций на экспериментально не измеряемые обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие. Существующие модели больших упругопластических деформаций [4–9] различаются, главным образом, способом такого разделения. Чаще всего в этих моделях используется гипотеза о соответствии любому актуальному состоянию деформируемого тела другого единственного состояния, называемого состоянием разгрузки [4, 6, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01128).

В связи с этим возникает задача выбора [6] объективной производной, связывающей тензор пластических деформаций с тензором скоростей необратимых деформаций. В [7, 8] тензоры упругих и пластических деформаций определяются дифференциальными зависимостями (уравнениями переноса). Не останавливаясь на подробностях, изложенных в [7, 8, 10], укажем зависимости, необходимые в дальнейшем. При разделении полных деформаций на обратимую и необратимую части будем считать, что в процессе разгрузки пластические деформации не изменяются, следовательно, компоненты этого тензора изменяются так же, как при жестком вращении тела, т. е. $p_{ij} = z_{ki}p^0_{km}z_{mj}$. Здесь z_{ij} — компоненты ортогонального тензора, которые, вообще говоря, в каждой точке среды могут быть различными и определяются изменяющимися упругими деформациями e_{ij} и скоростью деформирования ε_{ij}. В качестве p^0_{km} можно принять значения компонент p_{km} в момент начала разгрузки, что эквивалентно следующей дифференциальной зависимости:

$$\begin{gathered}\frac{dp_{ij}}{dt} = r_{ik}p_{kj} - p_{ik}r_{kj}, \qquad r_{ij} = -r_{ij} = \frac{v_{i,j} - v_{j,i}}{2} + M_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}),\\ v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2},\end{gathered} \tag{1.1}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений точек среды; кососимметричный тензор M_{ij} определяет нелинейное влияние упругого деформирования в процессе разгрузки на изменение компонент тензора пластических деформаций (в [7] приведено явное выражение для него); латинским индексом после запятой обозначена частная производная по соответствующей пространственной координате ($v_{i,j} = \partial v_i/\partial x_j$); по повторяющимся индексам проводится суммирование. В областях активного нагружения в соответствии с законами термодинамики вместе с (1.1) необходимо записать следующие уравнения изменения (переноса [8]) тензоров упругих e_{ij} и пластических p_{ij} деформаций:

$$\begin{gathered}\frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij} - \frac{1}{2}(e_{ik}v_{k,j} + v_{k,i}e_{kj} - r_{ik}e_{kj} + e_{ik}r_{kj} - \varepsilon^p_{ik}e_{kj} + e_{ik}\varepsilon^p_{kj}),\\ \frac{dp_{ij}}{dt} = \varepsilon^p_{ij} - \varepsilon^p_{ik}p_{kj} - p_{ik}\varepsilon^p_{kj} + r_{ik}p_{kj} - p_{ik}r_{kj}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Отсюда для компонент метрического тензора $g_{ij} = a_{k,i}a_{k,j}$ (a_k — материальные координаты точек среды) и для тензора деформаций Альманси $d_{ij} = 0{,}5(\delta_{ij} - g_{ij})$ следуют алгебраические представления

$$\begin{gathered}g_{ij} = (\delta_{ik} - e_{ik})(\delta_{km} - 2p_{km})(\delta_{mj} - e_{mj}),\\ d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2 - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

При разгрузке ($\varepsilon^p_{ij} = 0$) из второго равенства в (1.2) непосредственно следует (1.1), т. е. неизменность тензора необратимых деформаций p_{ij}. Таким образом, дифференциальные зависимости (1.2) вместе с (1.3) можно рассматривать в качестве определения тензоров e_{ij}, p_{ij}, ε^p_{ij}. В этом случае второе равенство в (1.2) представляет собой объективную производную, связывающую тензор пластических деформаций p_{ij} с тензором скоростей пластических деформаций ε^p_{ij}.

Следствием законов термодинамики наряду с (1.2) является аналог известной в нелинейной теории упругости формулы Мурнагана

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}). \tag{1.4}$$

Здесь ρ, ρ_0 — плотности среды в текущем и недеформированном состояниях; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши. При получении (1.4) в [7] предполагалось, что плотность свободной энергии $\psi = \rho_0^{-1} W$ является функцией только обратимых деформаций e_{ij} и не зависит от необратимых p_{ij}. Последние определяют диссипативный механизм упругопластической среды. Упругие свойства изотропной среды можно задать стандартным способом, принимая разложение упругого потенциала $W = W(I_1, I_2, I_3)$ в степенной ряд относительно состояния с нулевыми упругими деформациями:

$$W = \lambda I_1^2/2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \ldots,$$
$$I_1 = e_{jj} - e_{jk}e_{kj}/2, \quad I_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \quad I_3 = e_{ik}e_{ks}e_{si}. \tag{1.5}$$

Инварианты тензора обратимых деформаций в (1.5) выбраны таким образом, что зависимость (1.5) при стремлении пластических деформаций к нулю переходит в известные в нелинейной теории упругости представления

$$W = \lambda J_1^2/2 + \mu J_2 + l J_1 J_2 + m J_1^3 + n J_3 + \ldots, \quad J_1 = d_{kk},\ J_2 = d_{ij}d_{ji},\ J_3 = d_{ij}d_{jk}d_{ki},$$
$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}). \tag{1.6}$$

Пластическое течение в дальнейшем будем считать идеальным, поэтому постулируем наличие неподвижной поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}, p_{ij}) = k$ и принимаем условия принципа максимума Мизеса, следствием которых при активном нагружении является ассоциированный закон пластического течения.

2. Соотношения на поверхности разрывов. Пусть в упругопластической среде распространяется поверхность $\Sigma(t)$ разрывов обратимых деформаций. Положение поверхности в любой момент времени укажем с помощью зависимостей

$$x_i = x_i(y^1, y^2, t). \tag{2.1}$$

Поверхностные координаты y^β ($\beta = 1, 2$) в (2.1) будем полагать ортогональными. В каждой точке поверхности $\Sigma(t)$, где определена единственная нормаль с компонентами ν_i ($\nu_i\nu_i = 1$), имеем [11] $\nu_i x_{i,\beta} = 0$. Разрывы компонент тензора градиента перемещений представимы в виде

$$[u_{i,j}] = \tau\nu_i\nu_j + g^{\alpha\beta}\tau_\alpha x_{i,\beta}\nu_j = \tau\nu_i\nu_j + \tau^\beta x_{i,\beta}\nu_j = (\tau\nu_i + \gamma\mu_i)\nu_j,$$
$$\tau = [u_{k,k}], \quad \gamma^2 = \tau^\beta\tau_\beta, \quad \mu_i = \tau^\beta\gamma^{-1}x_{i,\beta}, \quad \mu_i\mu_i = 1, \quad \mu_i\nu_i = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $g^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрического тензора поверхности, такие что $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$, $g_{\beta\gamma} = x_{i,\beta}x_{i,\gamma}$. Единичные векторы с компонентами ν_i и μ_i определяют плоскость поляризации ударной волны $\Sigma(t)$ в рассматриваемый момент времени. Величины τ, γ следует называть продольной и поперечной интенсивностями разрыва на $\Sigma(t)$. Разрыв величины в (2.2) обозначен квадратными скобками. Для определенности полагаем, что $[a] = a^+ - a^-$ (a^+, a^- — значения разрывной на $\Sigma(t)$ величины, вычисленные перед и непосредственно за поверхностью $\Sigma(t)$). Представление (2.2) позволяет записать следующие зависимости для разрывов полных деформаций d_{ij} и скоростей движения частиц среды v_i:

$$[d_{ij}] = a_{ij}\tau + b_{ij}\gamma + c_{ij}\gamma^2,$$
$$[v_i] = -G\tau(1 - G^{-1}v_j\nu_j - \tau)\nu_i - G(1-\tau)\gamma\mu_i - G(\tau\nu_k + \gamma\mu_k)u_{i,k},$$
$$a_{ij} = (1 + \tau/2)\nu_i\nu_j - (u_{k,i}\nu_j + u_{k,j}\nu_i)\nu_k/2,$$
$$2b_{ij} = \mu_i\nu_j + \mu_j\nu_i - (u_{k,i}\nu_j + u_{k,j}\nu_i)\mu_k, \quad 2c_{ij} = \nu_i\nu_j. \tag{2.3}$$

В (2.3) знак "+" у величин, вычисляемых перед $\Sigma(t)$, опущен, поскольку в дальнейшем встречаются только такие величины и интенсивности разрывов; G — скорость движения поверхности разрывов.

Дальнейшие выкладки становятся наиболее простыми, если, следуя (1.3), предположить, что упругие деформации e_{ij} малы, несмотря на то что компоненты тензора градиента перемещений $u_{i,j}$ малыми не являются. Тогда из (1.3)–(1.5) следует

$$e_{ij} = N_{ijkl}(d_{kl} - p_{kl}), \qquad \sigma_{ij} = R(\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}),$$
$$R = \sqrt{1 - 2p_{kk} - 2(p_{kk})^2 - 2p_{km}p_{mk} - 4(p_{kk})^3/3 + 4p_{kk}p_{st}p_{ts} - 8p_{lk}p_{km}p_{ml}/3}, \tag{2.4}$$
$$N_{ijkl}K_{lkst} = \delta_{is}\delta_{jt}, \quad K_{lkst} = \delta_{lk}\delta_{st} - \delta_{lk}p_{st} - p_{lk}\delta_{st}.$$

Динамические условия совместности разрывов, следующие из закона сохранения импульса, запишем в виде

$$[\sigma_{ij}]\nu_i\nu_j = \rho(v_k\nu_k - G)[v_i]\nu_j, \qquad [\sigma_{ij}]x_{i,\beta}\nu_j = \rho(v_k\nu_k - G)[v_i]x_{i,\beta}. \tag{2.5}$$

Перепишем (2.5) в форме, не зависящей от введенных поверхностных координат. Подставляя (2.2)–(2.4) в (2.5), получим соотношения

$$(A - \rho G^2)\tau + B\gamma + D\gamma^2 = 0, \quad [(C - \rho G^2)\gamma\mu_i + (q_{ij}\tau + n_{ij}\gamma + m_{ij}\gamma^2)\nu_j + h_{ij}\gamma\mu_j]x_{i,\beta} = 0, \tag{2.6}$$

где $A = f_{ij}a_{ji} + \rho(v_k\nu_k - G)(G\tau + v_s\nu_s - Gu_{i,j}\nu_i\nu_j)$; $B = f_{ij}b_{ji} + \rho G(v_k\nu_k - G)u_{i,j}\mu_j\nu_i$; $C = \rho(2G - v_k\nu_k)v_s\nu_s - \rho G\tau(v_k\nu_k - G)$; $D = f_{ij}c_{ji}$; $q_{ij} = 2\mu RN_{ijkl}a_{lk} - \rho Gu_{i,j}(v_k\nu_k - G)$; $n_{ij} = 2\mu RN_{ijkl}b_{lk}$; $m_{ij} = 2\mu RN_{ijkl}c_{lk}$; $h_{ij} = \rho Gu_{i,j}(v_k\nu_k - G)$; $f_{ij} = RN_{klij}(\lambda\delta_{kl} + 2\mu\nu_k\nu_l)$.

Для того чтобы переписать три уравнения (2.6) ($\beta = 1, 2$) в форме, исключающей произвол в выборе поверхностных координат, последние два равенства в (2.6) умножим на компоненты вектора μ_i и ортогонального к нему вектора. Окончательно получим

$$(A - \rho G^2)\tau + B\gamma + D\gamma^2 = 0,$$
$$(C - \rho G^2)\gamma + (q_{ij}\tau + n_{ij}\gamma + m_{ij}\gamma^2)\mu_i\nu_j + h_{ij}\gamma\mu_j\mu_i = 0, \tag{2.7}$$
$$[(q_{ij}\tau + n_{ij}\gamma + m_{ij}\gamma^2)\nu_j + h_{ij}\gamma\mu_j]\varepsilon_{ist}\nu_s\mu_t = 0, \qquad \mu_i\mu_i = 1, \qquad \mu_i\nu_i = 0,$$

где ε_{ist} — единичный кососимметричный тензор. Следует отметить, что соотношения (2.7) справедливы и в том случае, когда упругие деформации не предполагаются малыми. При этом коэффициенты A, B, C, D, зависящие от предварительных деформаций в среде и интенсивностей τ и γ разрывов на поверхности, включают слагаемые более высокого порядка, чем первый, по компонентам тензора $u_{i,j}$. То же относится и к тензорам f_{ij}, h_{ij}, q_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, которые полностью определяются только деформациями перед поверхностью разрывов. Данные соотношения здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Таким образом, при наличии в среде предварительных необратимых деформаций даже в предположении малости последующих обратимых деформаций задача сводится к нелинейной задаче распространения граничных возмущений по упругопластической среде. Это связано как с нелинейностью представления (1.3) полных деформаций d_{ij} через упругую и пластическую составляющие, так и с принципиальным отличием формулы Мурнагана (1.4) при наличии необратимых деформаций от формулы (1.6) в случае их отсутствия.

Если считать известными предварительные деформации, движение перед $\Sigma(t)$ и геометрию поверхности разрывов (т. е. если задать ν_j), то уравнения (2.7) будут представлять собой систему пяти скалярных уравнений относительно шести неизвестных G, τ, γ, μ_i. Следовательно, данные параметры краевой задачи вычисляются только в процессе ее решения. Однако, если один из них считать заданным, то из условия разрешимости системы (2.7) можно получить важную информацию об условиях существования ударных волн различного типа.

3. Одномерные плоские упругие ударные волны. Основные закономерности распространения поверхностей сильных разрывов имеют наиболее ясный механический смысл в случае одномерных плоских волн [12, 13]. Поэтому ограничимся анализом возможных решений (2.7) в этом простейшем случае. Будем считать, что в упругопластическом полупространстве $x_1 \geqslant 0$ до момента времени $t = 0$ имелись необратимые деформации и при $t = 0$ оно было разгружено. Накопленные пластические деформации p_{11}, p_{12} и p_{13} полагаем известными, другие компоненты тензора пластических деформаций считаем нулевыми. Наличие отличных от нуля необратимых деформаций после разгрузки приведет к появлению остаточных напряжений и, следовательно, ненулевых упругих деформаций. Последние в общем случае могут определяться также характером процесса разгрузки, поэтому считаем их неизвестными.

Пусть с момента времени $t = 0$ упругопластическое полупространство ударно нагружается так, что компоненты вектора перемещений зависят только от одной пространственной координаты x_1 ($u_i = u_i(x_1, t)$). Будем считать, что данное ударное нагружение не приводит к новому пластическому течению, и исследуем способ распространения по среде такого граничного возмущения. Поскольку в среде возможно распространение плоскостей сильных разрывов, рассмотрим их особенности. В данном случае система уравнений (2.7) упрощается и может быть записана в форме

$$F\tau - V[\varphi] = 0, \quad L\eta\tau + S[\varphi] = 0, \quad T\gamma(\mu_2 p_{13} - \mu_3 p_{12}) = 0, \tag{3.1}$$

где

$$\varphi = u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2, \quad [\varphi] = 2(u_{2,1}\mu_2 + u_{3,1}\mu_3)\gamma - \gamma^2, \quad \eta = p_{12}^2 + p_{13}^2,$$

$$F = \frac{\rho_0 G^2}{1 - p_{11}} - \frac{(\lambda + 2\mu)(1 - p_{11}) - 4\mu\eta}{1 - 2p_{11} - 4\eta}, \quad V = \frac{\lambda - (\lambda - 2\mu)p_{11} + 4\mu\eta}{4(1 - p_{11})(1 - 2p_{11} - 4\eta)},$$

$$L = 2\Big(\frac{\rho_0 G^2}{1 - p_{11}} - \frac{\mu}{1 - 2p_{11} - 4\eta}\Big), \qquad T = \rho_0 G^2 - \frac{\mu}{1 - p_{11} - \eta},$$

$$S = \frac{\rho_0 G^2}{4} - \frac{\mu(1 - 2p_{11} - 2\eta)}{4(1 - p_{11})(1 - 2p_{11} - 4\eta)}.$$

Первые два уравнения в (3.1) являются однородной системой линейных уравнений относительно τ и $[\varphi]$. Если τ и $[\varphi]$ одновременно обращаются в нуль, то при $\gamma \neq 0$ из последнего уравнения в (3.1) следует, что $T = 0$ или $G = \sqrt{\mu/[\rho_0(1 - p_{11} - \eta)]}$. На такой поверхности разрывов $(u_{2,1}^+)^2 + (u_{3,1}^+)^2 = (u_{2,1}^-)^2 + (u_{3,1}^-)^2$, т. е. на ней не может измениться интенсивность предварительного сдвига, но может измениться его направленность. При этом μ_2 и μ_3 остаются неопределенными и могут быть вычислены только с учетом воздействия на границе. Такую плоскость разрывов в дальнейшем будем называть поперечной ударной волной ($\tau = 0$) или волной круговой поляризации [14]. Следует отметить, что последнему равенству в (3.1) нельзя удовлетворить, полагая $\gamma = 0$, так как при $\eta \neq 0$ это приводит к тому, что и $\tau = 0$.

Пусть последнее уравнение в (3.1) выполнено в силу условия

$$\mu_2/\mu_3 = p_{12}/p_{13}. \tag{3.2}$$

Это означает, что возможные ударные волны плоскополяризованные и плоскость их поляризации однозначно задается предварительными необратимыми деформациями. Скорости распространения таких плоскостей разрывов вычисляются путем приравнивания к нулю определителя однородной системы двух первых уравнений: $FS + LV\eta = 0$. Отсюда для G^2 получаем два значения:

$$G^2 = P \pm \sqrt{Q}, \tag{3.3}$$

где

$$P = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \frac{1 - 2p_{11} + p_{11}^2 - 2\eta}{2(1 - 2p_{11} - 4\eta)} + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1 - 2p_{11} - 2\eta(1 + 2p_{11}^2 + 4\eta)}{2(1 - p_{11})(1 - 2p_{11}^2 - 4\eta)},$$

$$Q = P^2 - \frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{\rho_0^2} \frac{1 - p_{11}}{(1 - 2p_{11} - 4\eta)^2}.$$

Значение $G^2 = P + \sqrt{Q}$ соответствует квазипродольной ударной волне. При стремлении пластических деформаций к нулю данная величина стремится к значению $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho_0^{-1}$, равному квадрату скорости безвихревых упругих волн. Однако наличие остаточных деформаций и напряжений не только изменяет значение скорости данной поверхности разрывов, но и приводит к разрыву на ней сдвиговых деформаций ($\gamma \neq 0$). Данный разрыв тем больше, чем значительнее уровень накопленных необратимых деформаций. Если перед такой плоскостью разрывов $\eta = 0$, то ударная волна становится продольной ($\gamma = 0$). В любом случае интенсивности разрывов τ и γ связаны друг с другом, и если, например, τ известно, то γ вычисляется из соотношений (3.1). По аналогии с нелинейной теорией упругости [14, 15] такую поверхность разрывов будем называть квазипродольной ударной волной. Отметим, что данная ударная волна оказывается плоскополяризованной при наличии предварительных необратимых деформаций. Плоскость ее поляризации задается соотношением (3.2) и не зависит от характера производимого ударного воздействия на среду.

Другой плоскополяризованный разрыв связан со скоростью его распространения $G^2 = P - \sqrt{Q}$. Плоскость поляризации такой ударной волны также жестко определяется согласно (3.2) предварительными необратимыми деформациями. На ней одновременно τ и γ отличны от нуля, причем в отличие от квазипродольной ударной волны невозможен случай обращения одной из интенсивностей разрыва в нуль. Только в случае, когда пластические деформации перед данной плоскостью разрывов стремятся к нулю, величина τ также будет стремиться к нулю. Эту плоскость разрывов будем называть квазипоперечной упругой ударной волной [15]. При уменьшении предварительных пластических деформаций ее скорость стремится к значению $c_2 = (\mu\rho_0^{-1})^{1/2}$, равному скорости распространения эквиволюминальных волн в линейной теории упругости.

В общем случае неплоских поверхностей разрывов ориентация плоскости поляризации квазипоперечной ударной волны зависит не только от предварительных пластических деформаций, но и от характера производимого ударного воздействия. Ударная волна круговой поляризации не является поперечной ($\tau \neq 0$), а компоненты μ_i введенного единичного вектора зависят от предварительных деформаций. Скорость распространения такой поверхности разрывов, в отличие от рассмотренного случая, зависит не только от предварительных деформаций, но и от интенсивностей разрыва γ или τ.

4. Примеры простейших модельных задач. Рассмотрим автомодельную задачу об ударном нагружении упругопластического полупространства, в котором накопились необратимые деформации. Распределение предварительных пластических деформаций полагаем однородным и считаем, что $p_{11} = \eta_1 - \mathrm{const}$, $p_{12} = \eta_2 - \mathrm{const}$, а остальные компоненты тензора пластических деформаций равны нулю. Заметим, что это справедливо в общем случае постоянных одномерных деформаций. Равенство нулю p_{13} достигается соответствующим выбором системы координат. Напряжения на границе полупространства $x_1 = 0$ считаем равными нулю (полная разгрузка) вплоть до момента времени $t = 0$. При $x_1 > 0$ присутствуют остаточные напряжения. Пусть с момента $t = 0$ на границе $x_1 = 0$ прилагается постоянная нагрузка, так что

$$\sigma_{11}(0,t) = \sigma_{11}^{(0)}, \quad \sigma_{21}(0,t) = \sigma_{21}^{(0)}, \quad \sigma_{31}(0,t) = \sigma_{31}^{(0)}.$$

Известно, что такая задача является автомодельной по переменной $\chi = x_1(c_1t)^{-1}$ и изменение параметров напряженно-деформированного состояния может происходить только в виде разрывов на ударных волнах или внутри распространяющихся простых волн. Положим $\sigma_{11}^{(0)} \leqslant 0$, $\sigma_{21}^{(0)} > 0$. При положительном η_2 это приводит к тому, что по среде будут распространяться только ударные волны. Передним фронтом возмущений, распространяющихся в упругопластическое полупространство, является квазипродольная ударная волна со скоростью распространения

$$G_1 = \sqrt{P + \sqrt{Q}}$$

(при вычислении P и Q согласно (3.3) следует принять $\eta = \eta_2^2$). После прохождения по среде данной ударной волны напряженно-деформированное состояние изменяется, так что

$$[\varphi] = -L\eta_2^2\tau_1/S, \qquad [u_{3,1}] = 0,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^* + \frac{(\lambda+2\mu)R\tau_1[(1+L\eta_2^2/(2S))(1-\eta_1-2\eta_2^2) - L\eta_2^2/(4S)]}{(1-\eta_1)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}, \tag{4.1}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^* + 2\mu R\eta_2\tau_1\,\frac{1+L\eta_2^2/(2S) - L(1-2\eta_1)/(8S)}{(1-\eta_1)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}, \qquad \sigma_{31} = \sigma_{31}^*.$$

Здесь σ_{11}^*, σ_{21}^*, σ_{31}^* — компоненты тензора остаточных напряжений, которые считаем известными; при вычислении L и S согласно (3.3) следует считать $\eta = \eta_2^2$. Величина продольного разрыва τ_1 остается неизвестной и будет определена в дальнейшем из граничных условий на нагружаемой граничной плоскости.

Расчеты показали, что за квазипродольной ударной волной в любом случае распространяется квазипоперечная:

$$G_2 = \sqrt{P - \sqrt{Q}} \geqslant \sqrt{\mu/[\rho_0(1-\eta_1-\eta_2^2)]} = G_3. \tag{4.2}$$

Неравенство (4.2) имеет принципиальное значение при постановке краевых задач. После прохождения квазипоперечной ударной волны напряженное состояние изменяется:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^* + \frac{(\lambda+2\mu)R[U(1-\eta_1-2\eta_2^2) - L\eta_2^2\tau_1/(4S) + \eta_2\gamma_2]}{(1-\eta_1)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)},$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^* + \frac{2\mu R[U\eta_2 + (\gamma_2 - L\eta_2\tau_1/(4S))(1-2\eta_1)/2]}{(1-\eta_1)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{31}^*, \tag{4.3}$$

$$U = (1 + L\eta_2^2/(2S))\tau_1 + (4V/F - 2)\gamma_2\eta_2.$$

В (4.3) следует учитывать, что величины L и S согласно (3.1) вычисляются при $G = G_1$, а F и V — при $G = G_2$. Как следует из (4.3), напряжения за квазипоперечной плоскостью разрывов зависят от двух независимых параметров τ_1 и γ_2.

Наконец, за квазипоперечной ударной волной следует ударная волна круговой поляризации, распространяющаяся со скоростью $G = G_3$. Поскольку на этой плоскости разрывов $[\varphi] = 0$, отсюда следует, что величина μ_2 мала по сравнению с μ_3. Следовательно, изменение σ_{11}, σ_{21} на данной волне мало по сравнению с величиной разрыва напряжения σ_{31}. Поэтому в области за волной круговой поляризации напряжения можно вычислять по соотношениям (4.3) и зависимости

$$\sigma_{31} = \mu\gamma_3\,\frac{(1-2\eta_1)(1-\eta_1-2\eta_2^2) - 2\eta_2^2}{(1-\eta_1)(1-\eta_1-2\eta_2^2)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}. \tag{4.4}$$

Параметры τ_1, γ_2, γ_3 находим из условия на границе полупространства:

$$
\begin{gathered}
\tau_1 = \frac{(1-\eta_1)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}{R}\Big\{\frac{\sigma_{11}^{(0)}-\sigma_{11}^*}{\lambda+2\mu}\Big[\Big(\frac{4V}{F}-2\Big)\eta_2^2+\frac{1-2\eta_1}{2}\Big]- \\
-\frac{\sigma_{21}^{(0)}-\sigma_{21}^*}{2\mu}\Big[\Big(\frac{4V}{F}-2\Big)(1-\eta_1-2\eta_2^2)+1\Big]\eta_2\Big\}, \\
\gamma_2 = \frac{(1-\eta_1)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}{R}\Big\{-\frac{\sigma_{11}^{(0)}-\sigma_{11}^*}{\lambda+2\mu}\Big(1+\frac{L\eta_2^2}{2S}-\frac{L}{8S}(1-2\eta_1)\Big)\eta_2+ \\
+\frac{\sigma_{21}^{(0)}-\sigma_{21}^*}{2\mu}\Big[\Big(1+\frac{L\eta_2^2}{2S}\Big)(1-\eta_1-2\eta_2^2)-\frac{L\eta_2^2}{4S}\Big]\Big\}, \\
\gamma_3 = \frac{\sigma_{31}^{(0)}}{\mu}\,\frac{(1-\eta_1)(1-\eta_1-\eta_2^2)(1-2\eta_1-4\eta_2^2)}{(1-2\eta_1)(1-\eta_1-2\eta_2^2)-2\eta_2^2}.
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

Таким образом, соотношения (4.1), (4.3), (4.4) с τ_1, γ_2, γ_3, вычисленными согласно (4.5), являются решением задачи об определении напряжений при нестационарном деформировании ударно нагружаемого полупространства. При этом следует только задать распределение остаточных напряжений в нем, т. е. σ_{11}^*, σ_{21}^* должны быть известны. Еще раз отметим, что величины L и S вычисляются в (4.5) по соотношениям (3.1) при $G = G_1$, а F и V — по тем же соотношениям при $G = G_2$. Итак, присутствие в среде накопленных необратимых деформаций приводит к изменению характера распространения последующих упругих деформаций по среде.

Рассмотрим другую нестационарную задачу о мгновенной разгрузке упругопластического плоского слоя $0 \leqslant x_1 \leqslant H$. Полагаем, что предварительное напряженное состояние в слое соответствует развитому пластическому течению [11]:

$$
(\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*)^2 - 4\sigma_{12}^* = 4k^2. \tag{4.6}
$$

Окончательное деформированное состояние в слое существенно зависит от истории процесса активного необратимого деформирования. Для целей настоящей работы оно необходимо в качестве начального условия задачи. Примем, что среди компонент тензора градиента перемещений только $u_{2,1}$ не равна нулю, более того, будем считать $u_{2,1} = h -\mathrm{const}$. Иначе говоря, для деформированного состояния принимается условие чистого сдвига. В нелинейных средах это возможно только при $\sigma_{11}^*(0) \neq 0$. Из (1.3) следует, что среди компонент тензора пластических деформаций отличной от нуля будет только $p_{12} = \eta_2 - \mathrm{const}$. Для компонент тензора упругих деформаций в таком деформированном состоянии имеем

$$
e_{11} = \frac{-h^2(1-2\eta_2^2)+2\eta_2(h-2\eta_2)}{2(1-4\eta_2^2)}, \quad e_{12} = \frac{-h^2\eta_2+h-2\eta_2}{2(1-4\eta_2^2)}.
$$

Здесь постоянная h определяется равенством (4.6), а η_2 должна быть задана.

Пусть в момент $t = 0$ постоянная нагрузка на плоскости $x_1 = 0$ мгновенно снимается. В силу выбранных начальных условий задача вновь оказывается автомодельной. Введем новую зависимую переменную $w(\xi)$ преобразованием $u_2 = c_2 t w(\xi)$, $\xi = x_1(c_2 t)^{-1}$, $c_2^2 = \mu\rho_0^{-1}$.

Из уравнения движения следует

$$
[(1-2w'\eta_2)/(1-4\eta_2^2)-\xi^2]w'' = 0. \tag{4.7}
$$

Итак, $w' = \mathrm{const}$ всюду, где выражение, стоящее в скобках в (4.7), не равно нулю. Однако в отличие от ранее рассмотренного случая, когда данное выражение обращалось в нуль только при некоторых значениях ξ, здесь возможно его обращение в нуль на интервале $[\xi^-, \xi^+]$ (простая волна). Значение ξ^+ находим, используя начальные условия, согласно которым $u^+_{2,1} = w' = h$, а ξ^- — из условия отсутствия упругих деформаций $w' = 2\eta_2$:

$$\xi^+ = \sqrt{(1 - 2\eta_2 h)/(1 - 4\eta_2^2)}, \qquad \xi^- = 1.$$

Таким образом, при разгрузке ударная волна не возникает. Нестационарное изменение напряженно-деформированного состояния происходит вследствие распространения простой волны Римана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Быковцев Г. И., Кретова Л. Д.** О распространении ударных волн в упругопластических средах // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
2. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Рычков В. А.** Поверхность разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошной среды (к 60-летию акад. В. П. Мясникова). Владивосток: Ин-т автоматики и процессов управления ДВО РАН, 1996. С. 106–127.
3. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Ин-т машиноведения АН СССР, 1997.
4. **Lee E. N.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
5. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
6. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
7. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 247, № 2. С. 199–201.
8. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–14.
9. **Чернышов А. Д.** Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
10. **Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.** Задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, изготовленной из несжимаемого упругопластического материала // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций (к 60-летию проф. Г. И. Быковцева). Владивосток: Ин-т автоматики и процессов управления ДВО РАН, 1998. С. 77–96.
11. **Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.** Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
12. **Ленский Э. В.** Аналитические методы динамической теории нелинейной упругости (комбинированные нелинейно-упругие волны). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
13. **Буренин А. А., Дудко О. В.** О распространении ударных возмущений в предварительно деформированной разномодульной упругой среде // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела. Комсомольск-на-Амуре: Ин-т машиноведения и металлургии ДВО РАН, 1997. С. 20–24.
14. **Бленд Д.** Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
15. **Буренин А. А., Чернышов А. Д.** Ударные волны в изотропном упругом пространстве // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711–717.

Поступила в редакцию 16/IV 2001 г.,
в окончательном варианте — 10/I 2002 г.