УДК 533.6.011.5

МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ БЕРСТИНГА ПРИ ОБТЕКАНИИ УЗКОЙ ПЛАСТИНЫ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

И. И. Липатов, Р. Я. Тугазаков

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, 140180 Жуковский, Россия E-mails: Igor_lipatov@mail.ru, renatsan@yandex.ru

С использованием методов прямого численного моделирования уравнений Навье — Стокса верифицированы теоретические результаты, полученные в рамках слабонелинейной модели развитого пограничного слоя при обтекании узкой пластины. В рамках модели полного нелинейного взаимодействия исследован механизм выброса газа (берстинг) с поверхности теплоизолированной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа с числом Маха M = 2. Показано, что в случае внешних возмущений слабой интенсивности переход от ламинарного обтекания пластины к турбулентному происходит вследствие резонансного трехволнового взаимодействия волн. Подтверждены теоретические результаты, связывающие перераспределение энергии между пульсациями и процесс образования пространственной структуры.

Ключевые слова: сверхзвуковой поток, ламинарное и турбулентное течения, турбулентные пятна, берстинг, резонансное усиление волн.

DOI: 10.15372/PMTF20220204

поздней нелинейной стадии перехода ламинарного течения в турбулентное посвящено большое количество работ, описывающих как теоретические результаты, так и данные экспериментального и численного моделирования. В теоретических работах исследования проводятся в рамках концепции гидродинамической неустойчивости, когда слой смешения рассматривается как суперпозиция взаимодействующих неустойчивых волн различной частоты. Как следствие данные, полученные в пространстве частот, связываются с эволюцией упорядоченных структур. Аналитические методы позволяют получить информацию о линейных и слабонелинейных волновых взаимодействиях. Изучению обтекания тел дозвуковым и сверхзвуковым потоками газа с использованием этого подхода посвящено большое количество работ (см., например, [1–11]). Основной вывод, полученный в теоретических работах, заключается в том, что в рамках слабонелинейного подхода наиболее существенное влияние на развитие неустойчивых возмущений в сдвиговых течениях должно оказывать резонансное трехволновое взаимодействие [10], т. е. на нелинейной стадии развития возмущение увеличивается, как правило, взрывным образом. Данные, полученные теоретически, подтверждены результатами многих экспериментальных работ. Сравнение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00184).

[©] Липатов И. И., Тугазаков Р. Я., 2022

теоретических результатов и данных экспериментального исследования обтекания пластины для дозвукового течения приведены в работе [12]. Результаты экспериментальных исследований относительной восприимчивости трехмерного сверхзвукового пограничного слоя к контролируемым возмущениям представлены в [13].

Развитие современных алгоритмов расчета и увеличение мощности ЭВМ в последнее время позволило описать процесс перехода течения в турбулентное состояние при обтекании тел простой формы с помощью прямого численного моделирования уравнений Навье — Стокса [14–19]. Разнообразные постановки задач, использование различных численных методов, несмотря на то что в большинстве работ указываются методы прямого численного моделирования, затрудняют анализ и сравнение результатов. В работах [15, 16], в которых проводится прямое численное моделирование линейных и нелинейных стадий развития неустойчивых возмущений различных мод и начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на плоской пластине при числах Маха набегающего потока M = 2; 6, отмечается существенное влияние трехмерных неустойчивых возмущений на инициирование ламинарно-турбулентного перехода, когда в поток вводятся возмущения в трансверсальном направлении. Таким образом, в [15, 16] трехволновой резонанс достигается путем введения поперечных возмущений выбранными способами.

В работе [17] описаны механизмы образования пульсаций и поперечных структур в задаче о падении сильной ударной волны на пластину конечной ширины, обтекаемую сверхзвуковым потоком вязкого газа. Показано, что взаимодействие поперечных вихрей со слабыми продольными вихрями, вызванными боковыми вихрями на кромках пластины, приводит к возникновению поперечных структур, подобных Λ -структурам в дозвуковых течениях газа [11]. Развитие нелинейной неустойчивости в области перехода от ламинарного к турбулентному течению газа при сверхзвуковом пространственном обтекании пластины, когда интенсивность внешних возмущений в виде плоской гармонической волны составляет порядка 1 % давления P_{∞} , описано в работе [18]. В этом случае за счет ввода энергии в поток при малых числах Рейнольдса Re в пограничном слое образуются интенсивные ударные волны и волны разрежения, распад которых приводит к образованию когерентных структур. Данный процесс аналогичен процессу турбулизации объема газа при сильном встряхивании [20. С. 194]. Когда интенсивность распавшихся волн (пульсаций) становится малой, при определенном значении Re (по длине пластины) происходит выброс "медленного" газа из вязкого подслоя на внешнюю границу пограничного слоя, толщина которого увеличивается в два раза (M = 2). Такая картина течения сохраняется в виде структурированного поля вихрей, аналогичного "установившейся турбулентности" [14] или детерминированному полю вихрей в дозвуковом течении [12]. Это происходит вследствие того, что достаточно сильные внешние возмущения подавляют внутренние частоты в задаче. При этом распределения параметров течения на поверхности пластины (давление, температура, коэффициент поверхностного трения) соответствуют экспериментальным данным. Это объясняется тем, что в турбулентных потоках основная энергия заключена в крупномасштабных вихрях [20. С. 186], которые достаточно точно моделируются с помощью численных методов. Следует отметить, что в указанных выше работах не рассматривается поведение турбулентного течения, после того как прекратятся внесенные определенным образом внешние возмущения. Результаты теоретических исследований [5] свидетельствуют о перераспределении энергии между пульсациями и образовавшейся пространственной структурой, что может способствовать поддержанию турбулентного состояния пограничного слоя. Механизм сохранения турбулентного течения в слоях смешения за счет обмена энергией внешнего и внутреннего полей с помощью крупномасштабных вихрей описан в [8]. В работе [19] для получения стохастического течения моделировалось обтекание пластины сверхзвуковым потоком газа с наложенными на него внешними воз-



Рис. 1. Схема расчетной области обтекания пластины

мущениями малой интенсивности. Установлено, что после линейного увеличения амплитуды вдоль пластины дальнейший рост ее происходит нелинейно вследствие резонансного трехволнового взаимодействия волн.

В настоящей работе с точки зрения эволюции вязкого слоя под действием внешних возмущений исследуется механизм образования берстингов для узкой пластины при переходе сверхзвукового ламинарного течения в турбулентное [5]. Представлены основные характеристики турбулентного поля, на основе которых построена модель образования берстинга.

1. Постановка задачи. На рис. 1 показана картина обтекания прямоугольной пластины сверхзвуковым потоком вязкого газа (z, x, y) — продольная, поперечная, нормальная координаты; w, u, v — компоненты скорости вдоль этих координат). Пластина находится в плоскости ABCD, являющейся нижней границей расчетного объема, состоящего из кубов с размерами $dx \times dy \times dz$. Начало декартовой системы координат располагается на острой передней кромке плоской пластины. Ось z совпадает с направлением вектора скорости w_{∞} невозмущенного сверхзвукового потока, ось y направлена по нормали к пластине, ось х совпадает с передней кромкой. Максимальное количество расчетных точек составляет $1,7 \cdot 10^7$, пространственные шаги равны 10^{-5} м, временные — 10^{-9} с. Сначала устанавливается квазистационарное обтекание пластины с пограничным слоем толщиной δ . Затем на скорость набегающего потока w_{∞} накладывается плоская гармоническая волна с интенсивностью $\Delta p = 0.005 \div 0.010$ % значения P_{∞} , длиной волны λ , которая выбирается из условия максимального резонансного усиления внешних волн, зависящего от числа Маха М, толщины слоя, длины волны и ширины пластины [17]. Число Рейнольдса, определенное по длине пластины, для пространственного расчета равно ${\rm Re} \sim 10^6$. Рассматривается симметричная по оси у задача, т. е. приводятся картины обтекания одной поверхности пластины. На выходной границе и в трансверсальном направлении задаются неотражающие граничные условия, при этом используются явная двухшаговая разностная схема [22], прямое численное моделирование течения в рамках уравнений Навье — Стокса и не используются схемы турбулентности. В расчетах геометрические размеры отнесены к длине пластины, давление *p*, плотность *R* — к их значениям в набегающем потоке, а компоненты скорости — к скорости звука невозмущенного потока. В задаче рассчитывается обтекание теплоизолированной пластины газом со скоростью w_∞ и параметрами $p_{\infty} = 10^5$ Па, $T_{\infty} = 278$ К, $R_{\infty} = 1,25$ кг/м³, $\mu_{\infty} = 1,72 \cdot 10^{-5}$ Па·с, число Прандтля Pr = 0,72, число Маха набегающего потока M = 2.

2. Результаты расчетов. Рассмотрим распределения параметров течения и компонент вектора вихря на поверхности пластины, внутри пограничного слоя и на его внешней границе.

2.1. Распределение параметров течения на нижней границе расчетной области. На



Рис. 2. Распределения параметров течения вдоль поверхности пластины: a — на начальной стадии турбулизации потока (разрушение первоначальных внешних возмущений в виде гармонических волн), δ — в развитом турбулентном течении, e — в случае реализации схемы неотражающих граничных условий, z — в областях ламинарного и турбулентного течений (1 — энтропия s, 2 — температура T, 3 давление P, 4 — коэффициент поверхностного трения c_f)

рис. 2, а, б приведены картины распределения давления на пластине, обтекаемой потоком газа с числом Maxa M = 2 и первоначально плоской гармонической волной с частотой 780 кГц, выбранной исходя из условия, что при длине волны порядка толщины ламинарного пограничного слоя происходит максимальное усиление набегающих возмущений [17]. На рис. 2, а в начале пластины видны следы набегающей волны слабой интенсивности, которые не приводят к формированию вторичного течения в виде продольных вихревых структур вдоль боковых поверхностей пластины, т. е. в случае слабой интенсивности волны течение является практически квазидвумерным и переходный период происходит почти по линейному закону. Давление и энтропия постепенно увеличиваются, температура практически не меняется. Такое течение имеет место до достижения значения z = 0.8, когда медленно меняющаяся с ростом Re величина давления на пластине p₊ становится меньше p_{∞} . В конце пластины (Re $\approx 10^6$) после выполнения указанного условия в результате нелинейной неустойчивости происходит взрывной переход от ламинарного течения к турбулентному. Внешние волны разрушаются образующимися с собственной частотой интенсивными пульсациями. Возникают пространственные турбулентные пятна различного размера, т. е. энергия внешних возмущений (пульсаций) приводит к образованию пространственных структур. Развитие турбулентной области более подробно показано на рис. 2, δ , где видна область с хаотическим движением пятен диаметром 0,1 ÷ 1,5 мм. На рис. 2, δ учтены все расчетные точки на отрезке 0.8 < z < 1.0 в отличие от рис. 2, a и рис. 4, на которых количество точек уменьшено в пять раз. В последующие моменты времени передний фронт возмущенной области колеблется с частотой, приближенно равной 10 кГц, в диапазоне 0.50 < z < 0.85 $(0.45 \cdot 10^6 < \text{Re} < 0.85 \cdot 10^6)$. На рис. 2,6 показана картина течения газа на пластине и вне ее при выполнении неотражающих граничных условий в трансверсальном направлении. Результаты анализа показывают, что возникающие на пластине пульсации распространяются во внешнее поле в виде вихрей вдоль характеристик сверхзвукового потока, не отражаясь от границы расчетного поля. Распределение газодинамических параметров вдоль поверхности пластины в ламинарной и турбулентной областях потока показано на рис. 2, г, где приведены мгновенные значения температуры T, энтропии s, давления P, коэффициента поверхностного трения c_f в центральном продольном сечении. При турбулизации потока значения всех параметров увеличиваются, что согласуется с известными экспериментальными и численными данными.

На рис. 3 показано поведение пульсаций давления на поверхности пластины и на расстоянии δ от нее на интервале времени $0 \div 8 \cdot 10^{-6}$ с. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что характер пульсаций соответствует турбулентному течению. Также на рис. 3 видно, что в турбулентном течении реализуются пульсации с частотами $6 \cdot 10^5 \div 6 \cdot 10^6 \Gamma$ ц.

2.2. Ламинарное и турбулентное течения газа в пограничном слое. На рис. 4,а-в



Рис. 3. Зависимость давления от времени в турбулентном потоке: 1 — на поверхности пластины, 2 — на расстоянии δ от пластины



Рис. 4. Картины течения внутри пограничного слоя (мгновенные значения в продольном центральном сечении):

а — поле плотности, б — поле давления, є — поле нормальной компоненты скорости, г — квазипериодические выбросы вязкой жидкости в пристенной области (берстинги), d — профили продольной скорости в различных сечениях (1 — ламинарное течение (z = 0,2), 2 — переходное течение (z = 0,4), 3, 4 — турбулентное течение (3 — z = 0,8, 4 — z = 0,95)); вертикальные линии — толщина ламинарного и турбулентного пограничных слоев приведены мгновенные распределения параметров течения (плотности, давления и нормальной компоненты скорости) в центральном продольном сечении расчетного поля. Результаты представлены в момент, когда на участке z > 0.65 установилось развитое турбулентное течение (для данного момента в расчетах "отключены" внешние возмущения, отсутствующие в левой части рис. 4 (z < 0.65) в ламинарном пограничном слое. Видно, что более легкий газ (см. рис. 4, a), движущийся с меньшей продольной скоростью, достигает внешней границы пограничного слоя и деформирует ее вследствие неустойчивости вязкого слоя к возмущениям, приводящим к выбросу газа с поверхности пластины. Начальные возмущения представляют собой плоские внешние гармонические волны слабой интенсивности. В случае их отсутствия при развитии на поверхности пластины турбулентного течения неустойчивость потока в продольном, трансверсальном и вертикальном относительно пластины направлениях поддерживается внутренними волнами. Реализуется самоподдерживающаяся турбулентность, когда энергия, диссипируемая в пограничном слое, компенсируется ее поступлением из основного потока. На рис. $4, \delta$ видно, что на внешней границе пограничного слоя в результате воздействия на него пульсаций давления образуются вихри с разными знаками, способствующие поступлению газов из вязкого слоя во внешний поток и наоборот. Нелинейный механизм образования вихрей на сдвиговых слоях в сверхзвуковых течениях (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца) описан в [17]. На рис. 4, г показаны пульсации компоненты скорости v, нормальной к поверхности пластины, в диапазоне $-0.6 \div 0.3$. Видно, что происходит непрерывное движение газа к пластине и от нее. Максимальное значение скорость v принимает на внешней границе пограничного слоя в вершинах берстингов — квазипериодических выбросов вязкой жидкости в пристенной области. В результате выбросов газа во внешнем поле образуются наклонные волны малой интенсивности. На рис. 4,г более подробно показано образование берстингов (поле плотности) начиная с z = 0.65, когда проявляется неустойчивость вязкого подслоя.

Существенное отличие структуры течения при таком сверхзвуковом обтекании пластины от принятого в литературе для дозвуковых течений заключается в том, что внутри пограничного слоя находится наиболее неустойчивый к внешним или внутренним возмущениям слой, где скорость потока переходит через скорость звука. На рис. 4, ∂ показаны изменения профиля продольной скорости в поперечных сечениях пограничного слоя при переходе от ламинарного течения (кривая 1) к турбулентному (кривые 3, 4) (кривая 2 соответствует переходному состоянию). Видно, что при M = 1 реализуются пульсации продольной скорости. Положения вертикальных прямых на рис. 4, ∂ соответствуют толщине ламинарного (z = 0,2) и турбулентного (z = 0,8) пограничных слоев. Мгновенное значение толщины турбулентного пограничного слоя соответствует данным численного расчета [18] для того же сечения z = 0,8.

2.3. Поведение газа в поперечных сечениях при различных значениях числа Рейнольдca. Как указывалось в подп. 2.1, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при 0,50 < z < 0,85. Для более полного описания процесса перехода на рис. 5 представлены картины течения в трех поперечных сечениях (z = 0,50; 0,65; 0,90) для трех параметров: v, продольной компоненты вихря ω_z и u. В первом сечении течение является ламинарным, во втором — переходным, в третьем — турбулентным. На рис. 5 видно, что при z = 0,5 ламинарное течение газа является квазидвумерным. Распределение нормальной компоненты скорости v (см. рис. 5,a) симметрично относительно ширины пластины. На рис. 5, 6, 6 на краях пластины находятся вихри равной интенсивности с противоположными знаками, поперечное течение отсутствует. В области начала перехода (z = 0,65) симметрия скорости v и продольной компоненты вихря ω_z относительно ширины пластины нарушается, появляется незначительная поперечная скорость u. В области развитого турбулентного течения (z = 0,9) реализуются интенсивные пульсации нормальной скорости



Рис. 5. Картины течения в трех поперечных сечениях: $a-e - z = 0.5, e-e - z = 0.65, \ m-u - z = 0.9; \ a, \ e, \ m - cкорость v, \ d, \ d, \ s - продольная компонента вихря <math>\omega_z$, $e, \ e, \ u$ — поперечная скорость u

газа на поверхности пластины; распределение продольной компоненты вихря представлено множеством мелкомасштабных и крупных вихрей; имеются значительные колебания поперечной скорости. Таким образом, с увеличением интенсивности пульсаций, начиная с сечения z = 0.65 квазидвумерное течение становится пространственным.

3. Механизм образования берстингов. Результаты работ [17–19, 21] позволяют в рамках полного нелинейного взаимодействия сформулировать условие, при котором в данной задаче происходит переход от ламинарного течения к турбулентному. На рис. 6 показано распределение параметров течения в случае, когда реализуется резонансное трехволновое взаимодействие волн и появляется условие для образования берстингов. Вдоль пластины распространяется плоская гармоническая волна определение длины, интенсивность которой определяется начальной амплитудой $\pm a$. При движении вдоль пластины и увеличении числа Рейнольдса вследствие линейной неустойчивости интенсивность волны увеличивается. Сначала на пластине устанавливается течение с ламинарным пограничным слоем, в котором давление равно $P = P_{\infty} + b$ (b — малая величина, первоначально превышающая mod a). При наложении на течение внешней волны суммарная текущая величина давления, которое действует на вязкий подслой на пластине, равна $P_+ = P_{\infty} + b \pm a$. Поскольку mod a растет, при больших значениях Re возможны два случая: $P_+ > P$ или $P_+ < P_{\infty}$. В первом случае давление незначительно сжимает пограничный слой, толщина его уменьшается и течение является устойчивым. Вследствие действия градиента давлее



Рис. 6. Схема зарождения берстингов при условии трехволнового резонанса mod a > b:

I — ламинарный пограничный слой;
 cd — часть обтекаемой пластины,
 ef — внешняя граница пограничного слоя

ния по нормали к пластине появляется отрицательный градиент нормальной скорости. Во втором случае в области G на вязкий подслой действует давление, меньшее, чем во внешнем потоке, и образуется положительный градиент нормальной скорости, который стремится оттеснить поток от пластины. В этом случае течение в вязком подслое неустойчиво, так как возникают силы, аналогичные тем, которые вызывают отрыв невязкого потока газа от обтекаемой поверхности [21].

Неустойчивость течения в вязком подслое приводит к его перестройке. Таким образом, имеем классическую задачу о распаде произвольного разрыва Н. Е. Кочина [23]. В пространственном случае эта задача не имеет аналитического решения, однако использование данных численного эксперимента позволяет представить картину перехода при выполнении условия

$$\mod a > b.$$
 (1)

На рис. 5 данное условие выполняется при z = 0.65 (Re = $0.65 \cdot 10^6$), когда появляются незначительные пульсации нормальной и поперечной компонент скорости. Это объясняется тем, что при неустойчивости вязкого слоя, которая описывается нелинейными уравнениями, любые незначительные изменения параметров течения могут привести к существенному изменению его характера. Эти изменения, величина которых на два порядка меньше амплитуды внешней волны a, в данном случае вносит фоновое поле, образующееся при прохождении внешних возмущений через головную ударную волну. При выполнении условия (1) система уравнений реагирует на изменение параметров течения: поперечная и нормальная компоненты скорости резко увеличиваются. На отрезке, равном двум-трем длинам внешних волн, ламинарное течение превращается в хаотическое движение с выбросами газа из вязкого подслоя на внешнюю границу пограничного слоя.

Условие для образования берстингов приведено на рис. 6, где показано изменение знака градиента продольного давления. Такое поведение давления в дозвуковом вязком подслое свидетельствует о появлении в области *G* условия для отрыва газа, которое реализуется при неустойчивом состоянии пристенного слоя. Аналогичное распределение давления характерно для обтекания профиля дозвуковым потоком газа, когда вследствие торможения в кормовой области реализуется отрыв потока от обтекаемой поверхности.

4. Обсуждение результатов. Прямое численное моделирование уравнений Навье — Стокса подтверждает теоретические результаты, полученные в рамках слабонелинейной модели развитого пограничного слоя в случае обтекания узкой пластины. Показано, что при переходе к турбулентному течению основным фактором является трехволновой резонанс. В отличие от слабонелинейной модели процесс перехода начинается с потери устойчивости вязкого подслоя под действием внешних возмущений. Этот процесс происходит лавинообразно. При этом основную роль играют соотношения между толщиной пограничного слоя, шириной пластины и длиной волны возмущений. Ранее были получены соотношения между этими параметрами, при которых наблюдается неустойчивость ламинарного течения в продольном и нормальном по отношению к пластине направлениях.

Заключение. В работе исследован переход от ламинарного обтекания узкой пластины к турбулентному при внешних возмущениях слабой интенсивности. В отличие от случая интенсивных возмущений в рассмотренном случае процесс усиления волн обусловлен линейной неустойчивостью. При Re $\approx 10^6$ амплитуда волн увеличивается и вязкий подслой, перестройка которого приводит к появлению и быстрому росту поперечной и нормальной компонент скорости, становится неустойчивым. В результате происходит переход к турбулентному течению. Сформулировано условие, при котором происходит турбулизация потока.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D. Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient: Tech. note / NASA. N D-195. Washington, 1959.
- Kline J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W. The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 741–773.
- Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary-layers // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P. 393–413.
- 4. Гапонов С. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
- 5. Жаров В. А. О волновой теории развитого турбулентного пограничного слоя // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1986. Т. 17, № 5. С. 28–38.
- Huerre P., Monkewitz P. Absolute and convective instabilities in free shear layers // J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 151–168.
- Kachanov Y. S. On the resonant nature of the breakdown of a laminar boundary-layer // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 43–74.
- 8. **Хо Ши Мин.** Возмущения в свободных сдвиговых слоях. Механика. Нелинейные волновые процессы / Хо Ши Мин, П. Уэрре. М.: Мир, 1987.
- 9. Гапонов С. А., Масленникова И. И. Субгармоническая неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Теплофизика и аэромеханика. 1997. Т. 4, № 1. С. 3–12.
- 10. **Чурилов С. М.** Резонансное трехволновое взаимодействие волн, имеющих общий критический слой // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 2. С. 257–282.
- 11. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1975. № 13, вып. 3. С. 18–26.
- Borodulin V. I., Kachanov Y. S., Roschektayev A. P. Experimental detection of deterministic turbulence // J. Turbulence. 2011. V. 12, N 23. P. 1–34. DOI: 10.1080/14685248.2011.573792.
- Kosinov A. D., Panina A. V., Kolosov G. L., et al. Experiments on relative receptivity of three-dimensional supersonic boundary layer to controlled disturbances and its development // Progr. Flight Phys. 2013. V. 5. P. 69–80.
- Иванов М. Ф., Киверин А. В., Шевелкина Е. Д. Эволюция вихревых возмущений на различных стадиях турбулентных течений // Инж. журн. Наука и инновации. 2013. № 8. С. 38–39.

- Кудрявцев А. Н., Хотяновский Д. В. Прямое численное моделирование перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 5. С. 581–590.
- 16. Кудрявцев А. Н., Хотяновский Д. В. Численное моделирование развития неустойчивых возмущений различных мод и начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при числе Маха потока М = 6 // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 843–852.
- 17. Lipatov I. I., Tugazakov R. Ya. Generation of coherent structures in supersonic flow past a finite-span flat plate // Fluid Dynamics. 2015. V. 50, N 6. P. 793–799.
- 18. **Липатов И. И., Тугазаков Р. Я.** Нелинейная неустойчивость в области перехода от ламинарного к турбулентному движению газа при сверхзвуковом пространственном обтекании пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 2. С. 178–196.
- Tugazakov R. Ya. Three-dimensional turbulent supersonic flow over a plate // Fluid Dynamics. 2019. V. 54, N 5. P. 705–713.
- Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
- Ephraim L. R., Burstein S. Z. Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas // J. Comput. Phys. 1967. V. 2. P. 178–196.
- 22. Тугазаков Р. Я. Теория отрыва сверхзвукового потока невязкого газа в задачах газодинамики // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 118–124.
- 23. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости // Собр. соч.: В 2 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 5–42.

Поступила в редакцию 30/XI 2020 г., после доработки — 8/II 2021 г. Принята к публикации 1/III 2021 г.