

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В СВОБОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В. А. Сабельников

(Жуковский)

В настоящее время в литературе известны два подхода для определения распределения вероятностей концентрации в турбулентных потоках. В первом — функциональный вид плотности распределения вероятностей задается априори, как правило, исходя из ее первых двух моментов — средней концентрации и дисперсии, для которых выписываются и решаются полуэмпирические уравнения [1—3] (см. также обзор [4]<sup>1</sup>). Более универсальным и перспективным представляется второй подход, когда плотность распределения вероятностей определяется из решения полуэмпирических уравнений. При их выводе используются как точные уравнения движения и диффузии [5—7], так и модельные уравнения (например, Ланжевена) [8—10] (подробнее см. [11, 12]). Конкретные примеры расчета турбулентного горения на основе уравнений для распределения вероятностей концентрации в литературе практически отсутствуют (модельные ситуации см., например, в [8, 9, 12—14]).

Такое положение объясняется не только техническими трудностями, возникающими при решении уравнений для распределения вероятностей, но также и недостаточной апробацией этих уравнений для описания химически инертных струй, по которым в отличие от факелов имеется обширный экспериментальный материал. Ясно, что расчет таких течений и детальное сопоставление с экспериментальными данными — первый и необходимый шаг на пути широкого использования распределений вероятностей концентрации для описания турбулентного горения. Кроме того, такие расчеты позволят лучше уяснить границы применимости гипотез, положенных в основу замыкания уравнений для распределений вероятностей.

Имея все сказанное в виду, в настоящей работе полуэмпирическое уравнение для распределения вероятностей концентрации пассивной примеси, полученное в [5], используется для определения распределения вероятностей и коэффициента перемежаемости в автомодельных свободных течениях. Показано, что в этом случае из-за знакопеременного коэффициента перед производной по автомодельной координате, постановка краевой задачи имеет много общего с постановкой краевой задачи для уравнений эллиптического типа. Сформулированная краевая задача решена двумя различными способами — интегральным и конечно-разностным. Получено хорошее соответствие с экспериментальными данными для плоского следа за слабо подогретым круговым цилиндром [15, 16], в подогретых плоской [17] и осесимметричной струях [18, 19]. Поля средней скорости, потока вещества и скалярной диссипации, определяющей скорость смешения вещества до молекулярных масштабов, в расматриваемой теории считаются известными.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим диффузию пассивной примеси в свободных турбулентных течениях таких, как струи и следы. При больших числах  $Re$  область турбулентного движения в свободных течениях, согласно [20], в каждый момент времени отделена от нетурбулент-

<sup>1</sup> Этот подход использовался также В. И. Головичевым в кандидатской диссертации «Численное моделирование неравновесных процессов в турбулентных течениях реагирующих газов и химических лазерных систем непрерывного действия», Новосибирск, 1977.

вой области резкой границей. В нетурбулентной области из-за механизма дальнего действия через пульсации давления также существуют пульсации скорости, но они носят потенциальный характер. Поскольку траектории жидких частиц не выходят за границу области турбулентного движения [21] и для поля концентрации отсутствует механизм, аналогичный механизму дальнего действия в случае поля скорости, то вполне правдоподобно предположение, что концентрация примеси в нетурбулентной области, если в начальном сечении отсутствуют пульсации концентрации, может принимать лишь постоянные значения [19]. В силу линейности уравнения диффузии за эти значения можно принять нуль и единицу. В качестве характерного примера можно указать задачу о диффузии в турбулентной струе, распространяющейся в затопленном пространстве. Здесь концентрация равна нулю в затопленном пространстве, единице — в потенциальном (нестационарном) ядре струи, а все промежуточные ее значения наблюдаются в турбулентной жидкости.

В указанном случае плотность распределения вероятностей концентрации  $P(c)$  записывается в виде

$$P(c) = \gamma_0 \delta(c) + \gamma_1 \delta(c-1) + \gamma P_t(c), \quad \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma = 1.$$

Здесь  $P_t(c)$  — условная плотность распределения вероятностей концентрации в турбулентной жидкости;  $c$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) — концентрация пассивной примеси;  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  — вероятности значений концентрации  $c=0$  и  $c=1$  соответственно;  $\gamma$  — коэффициент перемежаемости;  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Полуэмпирическое уравнение и граничные условия по  $c$  для  $P_t(c)$  имеют вид [5]

$$\partial \gamma P_t / \partial t + \langle u_\alpha \rangle \cdot \partial \gamma P_t / \partial x_\alpha + \partial v_\alpha(c) \gamma P_t / \partial x_\alpha = - \gamma \langle N \rangle_t \cdot \partial^2 P_t / \partial c^2, \quad (1.1)$$

$$v_k(c) = q_k \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle), \quad (1.2)$$

$$P_t(0) = P_t(1) = 0.$$

Здесь  $t$  — время;  $x_k$  — декартовы координаты ( $k=1, 2, 3$ );  $N = D(\partial c / \partial x_\alpha \cdot \partial c / \partial x_\alpha)$  — мгновенная скалярная диссипация ( $D$  — коэффициент молекулярной диффузии);  $u_k$  — гидродинамическая скорость;  $\sigma^2 = \langle (c - \langle c \rangle)^2 \rangle$  — дисперсия пульсаций концентрации;  $q_k = \langle (u_k - \langle u_k \rangle)(c - \langle c \rangle) \rangle$  — поток вещества; скобками  $\langle \rangle$  и  $\langle \rangle_t$  обозначено полное (безусловное) осреднение и осреднение по турбулентной жидкости соответственно. По повторяющимся греческим индексам производится суммирование от 1 до 3.

Перечислим гипотезы, при использовании которых в [5] получено уравнение (1.1). Первая гипотеза качественная и не вносит дополнительных неизвестных функций. Она постулирует существование перемежаемости и опирается на экспериментальные данные [20]. Вторая — случайные величины  $N$  и  $c$ , определяемые существенно различными масштабами движения, согласно теории Колмогорова локально-однородной и изотропной турбулентности [22], предполагает статистически независимыми, что позволяет считать условно осредненное значение скалярной диссипации в турбулентной жидкости при заданном значении концентрации не зависящим от концентрации. Опыты [23] находятся в достаточно удовлетворительном соответствии с этой гипотезой. Тем самым вторая гипотеза вводит в уравнение (1.1) не выражающуюся через  $P_t$  неизвестную функцию  $\langle N \rangle_t$ . Третья гипотеза — условное среднее значение пульсационной скорости при заданной концентрации  $v_k(c)$  заменяется линейной функцией концентрации<sup>2</sup>

$$v_k(c) = q_k \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle)$$

<sup>2</sup> Ясно, что для химически активных примесей вторая и третья гипотезы должны быть изменены. Для более определенного заключения требуются экспериментальные данные. Кроме того, в этом случае более перспективно, по-видимому, использование совместного распределения вероятностей скорости, концентрации и температуры.

(если совместное распределение вероятностей скорости и концентрации  $P(u_k, c)$  нормально, то это соотношение точное). Экспериментальные данные [24] хорошо согласуются с этим предположением. В последней гипотезе также появляются дополнительные неизвестные функции: вектор потока вещества  $q_k$  (дисперсия  $\sigma^2$  выражается через  $P_i$  и  $\gamma$  (1.5)).

Таким образом, в уравнение (1.1) наряду с искомыми характеристиками — распределением вероятностей  $P_i$  и коэффициентом перемежаемости  $\gamma$  — входят дополнительные функции  $\langle u_i \rangle$ ,  $\langle N \rangle_i$  и  $q_i$  (определяющие поля средней скорости, скалярной диссипации и потока вещества соответственно), которые должны быть заданы с помощью экспериментальных данных или других соображений (например, найдены из полуэмпирических уравнений). При этом необходимо учесть, что  $\langle N \rangle = \gamma \langle N \rangle_i$ , поскольку в нетурбулентной жидкости  $N = 0$ .

В области вниз по течению, достаточно удаленной от источника примеси, вероятность равенства  $c = 1$  в нетурбулентной жидкости пренебрежимо мала, т. е. можно принять, что  $\gamma_i \approx 0$ . Тогда для  $P(c)$  из соотношения, приведенного выше, имеем

$$P(c) = (1 - \gamma)\delta(c) + \gamma P_i(c). \quad (1.3)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением отмеченной области.

Безусловное и условное средние любой функции  $G(c)$  находятся по известному правилу  $\langle G \rangle = \int GPdc$ ,  $\langle G \rangle_i = \int GP_idc$ . В силу (1.3) справедлива связь

$$\langle G \rangle = (1 - \gamma)G(0) + \gamma \langle G \rangle_i. \quad (1.4)$$

В частном случае  $G = c^2$  из формулы (1.4) получим соотношение, связывающее полную дисперсию  $\sigma^2$  с дисперсией по турбулентной жидкости  $\sigma_i^2$

$$\begin{aligned} \sigma^2 / \langle c \rangle^2 &= (1 - \gamma + \sigma_i^2 / \langle c \rangle_i^2) / \gamma, \\ \sigma_i^2 &= \langle (c - \langle c \rangle_i)^2 \rangle_i = \int (c - \langle c \rangle_i)^2 P_idc, \\ \langle c \rangle_i &= \int c P_idc = \langle c \rangle / \gamma. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поскольку в соотношении для дисперсии  $\sigma^2$  (1.5), входящем в уравнение (1.4), присутствует интеграл от искомой функции  $P_i$ , то (1.4) является нелинейным интегродифференциальным уравнением в частных производных.

Условия нормировки  $P_i$ , определение  $\langle c \rangle$  через  $P$ , а также связь между  $\langle c \rangle_i$  и  $\langle c \rangle$  в (1.5) дают после интегрирования уравнения (1.1) по всем  $c$  уравнение для коэффициента перемежаемости

$$\partial \gamma / \partial t + \langle u_\alpha \rangle \cdot \partial \gamma / \partial x_\alpha + \partial \gamma v_\alpha \langle c \rangle_i / \partial x_\alpha = \gamma \langle N \rangle_i \cdot \partial P_i(0) / \partial c, \quad (1.6)$$

где  $v_i \langle c \rangle_i = q_i \sigma^{-2} (\langle c \rangle_i - \langle c \rangle) = q_i \sigma^{-2} \langle c \rangle \gamma^{-1} (1 - \gamma)$ . С другой стороны, из уравнения (1.6) следует выполнение условия нормировки  $P_i$ . Действительно, если проинтегрировать (1.1) по всем  $c$  и использовать (1.6), то из полученного выражения нетрудно заключить, что если условие нормировки выполнено в начальный момент времени, то оно будет выполняться и во все последующие моменты.

**2. Уравнения для автомодельной задачи.** Задача Коши для обратнопараболического уравнения (1.1) некорректна: чем меньше масштаб возмущений в начальных условиях, тем быстрее они разрастаются, что быстро приводит к полному искажению решения. Отметим, что один из возможных вариантов регуляризации в стационарном случае состоит в интегрировании уравнения (1.1) в обратном направлении (т. е. в сторону уменьшения продольной координаты  $x$ ), начиная с некоторого сечения  $x = x_\infty$ , в котором из каких-либо соображений поставлено «начальное» условие для  $P_i$  и  $\gamma$ . Согласно экспериментальным данным [25], на достаточно больших расстояниях от «источника», каковым может быть сопло или обтекаемое тело, статистические характеристики — моменты гидро-

динамических полей — с хорошей точностью описываются автомодельными зависимостями. В опытах [26] показано, что этот вывод сохраняет свою силу и для распределения вероятностей концентрации. Из сказанного следует, что в качестве «начальных» условий при  $x_{\infty}/d \gg 1$  ( $d$  — линейный характерный размер «источника») естественно задать автомодельное решение уравнения (1.4).

Анализ автомодельных решений — предмет дальнейшего рассмотрения. Для автомодельных свободных течений с осевой или плоской симметрией (затопленные круглая и плоская струи, след за цилиндром) уравнения (1.1) и (1.6) в приближении пограничного слоя после достаточно громоздких преобразований можно записать в следующем виде:

$$A \cdot \partial \gamma f / \partial z + B \cdot \partial \gamma f / \partial \eta = \partial^2 \gamma f / \partial \eta^2 + C \gamma f, \quad (2.1)$$

$$A_0 \frac{(I_2 - 1)}{(I_2 - \gamma)} \frac{d\gamma}{dz} = \left[ \left( a_1 + A_1 \frac{dI_2}{dz} \right) (1 - \gamma) (I_2 - \gamma)^{-1} - \frac{\partial f(0)}{\partial \eta} \right] \cdot \gamma, \quad (2.2)$$

где

$$f(\eta, z) = \langle c \rangle_t P_t(c, x, y), \quad \eta = c / \langle c \rangle_t, \quad z = y/L(x),$$

$$L = d(x/d)^\beta, \quad \beta = (1 + i)/2, \quad I_k(z) = \int_0^\infty \eta^k f d\eta,$$

$$A = A_0 + A_1 \eta, \quad B = B_1 \eta + B_2 \eta^2, \quad C = C_0 + C_1 \eta,$$

$$A_0 = \frac{\beta}{z^i} F \frac{\theta^2}{h} \frac{I_2}{I_2 - \gamma}, \quad A_1 = -A_0/I_2, \quad \theta = r/\gamma, \quad (2.3)$$

$$B_2 = -A_1 \cdot d \ln \theta / dz, \quad B_1 = -B_2 I_2 - a_1,$$

$$a_1 = \beta u \cdot \theta^2 / h, \quad u = 1/z^i \cdot dF/dz,$$

$$C_0 = -\frac{B_1}{I_2} - (a_1 + A_0 \cdot d\gamma/dz + A_1 \gamma \cdot dI_2/dz) (I_2 - \gamma)^{-1},$$

$$C_1 = -2B_2 + [a_1 + A_1 (dI_2/dz - d\gamma/dz)] (I_2 - \gamma)^{-1},$$

$d$  — диаметр цилиндра для следа, диаметр сопла для круглой струи, ширина сопла для плоской струи; параметр  $i$  равен нулю для плоских течений и единице для осесимметричных. Для следа функция  $F(z) = z$ , а для струй связана с полем скорости соотношениями

$$F = z^i (uz - v) \beta^{-1}, \quad \langle u \rangle = U_s u(z), \quad \langle v \rangle = U_s v(z), \quad U_s = U_0 (d/x)^\beta,$$

где  $U_0$  — скорость на выходе из сопла для струйных течений и скорость свободного потока для следа.

Функция  $r$  и  $h$  определяют поля средней концентрации и скалярной диссипации в турбулентной жидкости  $\langle c \rangle = R(x)r(z)$ ,  $\langle N \rangle_t = U_s R^2 L^{-1} h(z)$ ,  $R = U_s/U_0$ .

При выводе уравнений (2.1) и (2.2) использовалась связь между потоком вещества в поперечном направлении  $q_y$  и средней концентрацией  $\langle c \rangle$   $q_y = \beta/z^i Fr U_s R$ , вытекающая из осредненного уравнения диффузии (записанного в приближении пограничного слоя) после однократного интегрирования, а также соотношение (1.5) для  $\sigma^2$ . Решение (2.1) ищется в области  $0 \leq z < \infty$ ,  $0 \leq \eta < \infty$ . Здесь принято, что максимальное значение координаты  $\eta$  равно бесконечности, так как на автомодельном участке  $1/\langle c \rangle_t \gg 1$ . Решение должно удовлетворять условию нормировки  $I_0 = 1$  и следствию из определения  $\langle c \rangle_t$  через  $P_t$  ( $I_1 = 1$ ). Эквивалентность условия нормировки и соотношения (2.2) показывается, как и в п. 1.

Основные особенности уравнения для распределения вероятностей концентрации в автомодельных течениях связаны со свойствами коэффициента  $A$ , являющегося множителем при производной по координате  $z$  в (2.1). Из (2.3) следует, что

$$A > 0, 0 \leq \eta < I_2; A < 0, I_2 < \eta < \infty; \quad (2.4)$$

$$A = 0, \eta = I_2, \quad z = 0.$$

Как будет видно из дальнейшего,  $A = 0$  и при  $z = \infty$ . Таким образом, точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  особые.

Существенное значение имеет изменение знака коэффициента  $A$  при  $\eta = I_2(z)$ . Следовательно, несмотря на то, что уравнение (2.1) параболическое, оба направления по координате  $z$  равноправны (теория уравнений такого типа интенсивно разрабатывается в последние годы, см., например, [27]). Чтобы понять некоторые из свойств уравнения (2.1), проанализируем характер решений в особых точках.

**3. Решение на оси симметрии.** В точке  $z = 0$  уравнение (2.1) имеет вид

$$f_c'' + a_1 \eta f_c' + (c_1 + d_1 \eta) f_c = 0, \quad (3.1)$$

где  $a_1 = n^2(m\gamma_c)^{-1}$ ;  $c_1 = a_1(1 - n^2)$ ;  $d_1 = a_1^2 m$ ;  $n = r_c / \sqrt{\Phi_c}$ ;  $m = \gamma_c h_c / (\beta u_c \Phi_c)$ ;  $\Phi = \sigma^2 / R^2 = r^2(I_2 - \gamma)\gamma^{-1}$ ; нижний индекс  $c$  соответствует значениям функций при  $z = 0$ , штрихом обозначено дифференцирование по  $\eta$ . Уравнение (3.1) исследовано в [5] в предположении, что перемежаемостью можно пренебречь (т. е.  $\gamma_c = 1$ ).

Параметр  $n$  обратно пропорционален интенсивности пульсаций концентрации и в рассматриваемых случаях принимает достаточно большие значения ( $n \sim 4 \div 5$ ). Значение  $m$ , как следует из уравнения баланса для  $\sigma^2$ , равно отношению удвоенной скалярной диссипации  $2\langle N \rangle$  к взятой с обратным знаком конвекции.

Одно из граничных условий дается формулой (1.2), второе получается из допущения существования моментов всех положительных порядков. Тогда

$$f_c(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^k f_c = 0, \quad (3.2)$$

где  $k$  — произвольное положительное число. Из (2.2) имеем

$$f_c'(0) = d_1(1 - \gamma_c). \quad (3.3)$$

Формула (3.3) получается и из уравнения (3.1) интегрированием по всем  $\eta$  и использованием условий  $I_0 = 1$  и  $I_1 = 1$  (последнее выполняется тождественно, в чем можно убедиться, умножив (3.1) на  $\eta$  и проинтегрировав по всем  $\eta$ ). Тем самым соотношение (3.3) эквивалентно условию нормировки  $I_0 = 1$  и может быть использовано вместо последнего. Поскольку  $f_c(0) = 0$ , то из (3.3) следует, что нетривиальное решение уравнения (3.1) существует лишь при  $\gamma_c < 1$ .

В (3.1) входит неизвестное значение коэффициента перемежаемости  $\gamma_c$ . Граничные условия (3.2), условие нормировки и определение  $I_2$  не позволяют найти  $\gamma_c$  и лишь накладывают связь между  $I_2$  (или  $n$ ) и  $\gamma_c$ . Действительно, общее решение уравнения (3.1) выражается через функции параболического цилиндра  $D_\nu$  [28]:

$$f_c = \exp(-t_2^2/4) [R_1 D_\nu(t_1) + R_2 D_\nu(-t_1)], \quad t_2 = \sqrt{a_1} \eta, \\ t_1 = t_2 - 2\sqrt{a_1} m, \quad \nu = n^2(m - \gamma_c)\gamma_c^{-1}, \quad (3.4)$$

где  $R_1, R_2$  — произвольные постоянные. Используя асимптотические разложения функций  $D_\nu$  при больших значениях аргумента, легко установить, что второе краевое условие в (3.2) выполняется при всех  $R_1$  и  $R_2$ . Оставшиеся условия  $-f_c(0) = 0$ ,  $I_0 = 1$  и определение  $I_2$  через  $f_c$  — накладывают три связи между постоянными  $R_1, R_2, \gamma_c, I_2$ , т. е. дают связь между  $\gamma_c$  и  $I_2$ .

Наиболее простой способ определения этой связи состоит в следующем. Применим к уравнению (3.1) преобразование Лапласа

$$\frac{dE}{dp} = \left( \frac{p}{a_1} - m + \frac{va_1}{a_1 p + d_1} \right) \bar{F} - \frac{f'_c(0)}{a_1 p + d_1}, \quad F(p) = \int_0^\infty e^{-p\eta} f_c d\eta.$$

Так как  $I_0 = 1$ , то  $F(0) = 1$ . Тогда после интегрирования уравнения для  $F(p)$  получим искомое соотношение

$$(1 - \gamma_c) \left( \frac{n^2}{\gamma_c} \right)^{v+1} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{m\gamma_c}{2n^2} p^2 + mp - (v+1) \ln \left( p + \frac{n^2}{\gamma_c} \right) \right] dp = 1. \quad (3.5)$$

Ниже формула (3.5) будет существенно упрощена при  $1 - \gamma_c \ll 1$  и  $n \gg 1$ .

Из известных свойств функций  $D_\nu$  имеем  $f_c > 0$  лишь при  $\nu < 0$ , т. е. при  $m < \gamma_c$  (это условие указано в [5] в предположении, что  $\gamma_c = 1$ ). Согласно опытным данным, в плоском следе [15]  $m = 2,6$ , в плоской струе [17]  $m = 1,84$ , в осесимметричной струе [18, 19]  $m = 0,75$  и во всех случаях  $1 - \gamma_c \ll 1$ . Поэтому в следе и в плоской струе условие строгой положительности  $f_c$  не выполнено, что, по-видимому, связано с неточностью принятой линейной по  $c$  аппроксимацией для условно осредненной скорости  $v(c)$  при  $(c - \langle c \rangle) \sigma^{-1} \gg 1$ . Однако и при  $m > \gamma_c$  решение (3.4) можно считать вполне удовлетворительным, если корни  $f_c$  расположены вне основной области ее изменения<sup>3</sup>. Асимптотические оценки и численные расчеты (которые рассмотрены ниже) показывают, что такая ситуация имеет место в наиболее интересном случае  $1 - \gamma_c \ll 1$ ,  $n \gg 1$  и указанных выше значениях параметра  $m$ , когда корни  $f_c$  находятся в области  $(c - \langle c \rangle)^{-1} > 3$  ( $\eta > 1 + 3/n$ ).

При  $n \rightarrow \infty$  формула (3.5) после использования для оценок интеграла метода перевала принимает вид

$$1 - \gamma_c = \frac{m^{1/4}}{n\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \right)^{v+1/2} \exp \left[ -n^2 \left( \sqrt{m} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad \nu = n^2(m - 1). \quad (3.6)$$

Полученное соотношение хорошо согласуется с результатами численного решения уравнения (3.1) при  $1 - \gamma_c \approx 10^{-3}$  (см. ниже).

Краевая задача для уравнения (3.1) при заданном значении  $\gamma_c$  решалась численно методом Нумерова [29] при начальных условиях  $f_c(0) = 0$  и (3.3) на интервале  $0 \leq \eta \leq 5$  с шагом  $\Delta\eta = 10^{-3}$  (порядок аппроксимации метода  $O(\Delta\eta^5)$ ) пристрелкой по второму моменту  $I_2$  до совпадения заданного и рассчитанного по  $f_c$  второго момента. Необходимые интегралы вычислялись методом Симпсона. Расчеты показали, что экспериментальный диапазон значений  $n$  для указанных выше  $m$  достигается при  $1 - \gamma_c = 10^{-2} \div 10^{-4}$ . Функции  $f_c$  при этом получаются практически совпадающими с распределением Гаусса.

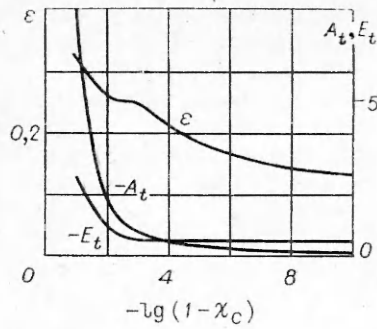
Расчетная зависимость интенсивности пульсаций  $\varepsilon = \sigma_i / \langle c \rangle_i = \sqrt{I_2 - 1}$ , асимметрии  $A_i$  и эксцесса  $E_i$  от коэффициента перемежаемости  $\gamma_c$  для течения в следе за цилиндром ( $m = 2,6$ ,  $r_c = 0,268$  [15]) приведена на рис. 1.

Непосредственно сопоставлять расчетные и экспериментальные данные трудно, так как коэффициент перемежаемости в опытах не измерялся с требуемой точностью. Так, например, опытным данным [15]  $m = 2,6$ ,  $n = 4,75$  по формуле (3.6) соответствует  $1 - \gamma_c = 10^{-4}$ . Значение коэффициента асимметрии  $A_i$  хорошо согласуется с результатами опытов [16], где  $A_i = 0,4$ . В значениях коэффициента эксцесса имеются расхождения: в [16]  $E_i = 0,1$ . Это обстоятельство может быть вызвано как неточностью предположений, с помощью которых получено уравнение для распределения вероятностей  $P(c)$ , так и трудностями измерения моментов высоких порядков.

<sup>3</sup> Предложение в [6] полуэмпирическое уравнение первого порядка для  $P(c)$ , как легко показать, при  $m > 1$  вообще не имеет ограниченного решения.



Рис. 1. Расчетная зависимость интенсивности  $\varepsilon$ , асимметрии  $A_t$  и эксцесса  $E_t$  пульсаций концентрации от коэффициента перемежаемости  $\chi_c$  на плоскости симметрии в дальнем следе за круговым цилиндром.



4. Решение в окрестности  $z = \infty$ . Задавать  $f$  при  $z \rightarrow \infty$  произвольной функцией, видимо, нельзя. Поэтому поступим следующим образом. Предположим, что при  $z \rightarrow \infty$   $f$  можно представить в виде асимптотического ряда, главный член которого описывается автомодельной зависимостью. Поскольку  $I_0 = I_1 = 1$ , то этот член от  $z$  не зависит, т. е.  $f(\eta, z) \rightarrow f_\infty(\eta)$  при  $z \rightarrow \infty$ . Полученный вывод согласуется с представлениями, развитыми в [25], а также с экспериментальными данными [19], из которых следует, что интенсивность пульсаций концентрации в турбулентной жидкости очень слабо изменяется при увеличении расстояния от оси струи. Для  $f_\infty$  из (2.1) следует обыкновенное интегродифференциальное уравнение, коэффициенты в котором зависят от асимптотического поведения функций  $r$ ,  $h$  и  $F$  при  $z \rightarrow \infty$ . Пусть главные члены в разложении этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} r &= r_0(z) \exp[-p_1(z)], \quad h = h_0(z) \exp[-p_2(z)], \\ F &= F_0(z). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ . Относительно функций  $r_0$ ,  $h_0$  и  $F_0$  предполагается, что они возрастают (или убывают) слабее, чем некоторая степень  $z$ .

Главный член разложения коэффициента перемежаемости  $\gamma_\infty(z)$  ищем в виде

$$\gamma_\infty = \left( \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} \frac{r_0^2 F_0}{h_0 z^i} \frac{\beta}{a} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} p(z) \right]. \quad (4.2)$$

Здесь  $p = 2p_1 - p_2 > 0$ ;  $a > 0$  — пока неизвестная постоянная. Подстановка разложений (4.1) и (4.2) в (2.1) и (2.2) дает

$$f_\infty'' + \varphi \eta (b\eta - a) f_\infty' + [b(2\varphi - 1)\eta + a(1 - \varphi)] f_\infty = 0, \quad (4.3)$$

$$f_\infty'(0) = a - b. \quad (4.4)$$

Здесь  $b = a/I_2$ ;  $\varphi = \lim_{z \rightarrow \infty} p_2/p > 0$ . Анализ экспериментальных данных [15] показывает, что в уравнении (2.1)  $A \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Такое ограничение на поведение коэффициента  $A$  естественно и из физических соображений о существовании предельной  $f_\infty$ . Поскольку  $A \sim (dp/dz)^{-1}$ , то  $p(z)$  растет быстрее, чем первая степень  $z$ .

Стандартным методом устанавливается, что одно из линейно-независимых решений уравнения (4.3) имеет при  $\eta \rightarrow \infty$  асимптотику  $\exp(-1/3b\varphi\eta^3)$ , а второе  $-\eta^{(\varphi^{-1}-2)}$ . Поскольку предполагается существование моментов всех положительных порядков, то в рассматриваемом случае в отличие от решения при  $z = 0$ , исследованного в п. 3, условие

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^k f_\infty = 0 \text{ не тривиально.}$$

Имеем, следовательно, для постоянной  $a$ , входящий в (4.2)–(4.4), задачу на собственные значения. В силу условия неотрицательности  $f_\infty$   $a$  должно равняться первому собственному значению. Функция  $f_\infty$  оп-

ределяется полностью, что существенно отличается от рассмотренного в п. 3 решения при  $z=0$ , где  $f_c$  находится с точностью до одного параметра  $\gamma_c$ , значение которого, как будет видно ниже, находится только из глобального решения при выполнении граничного условия симметрии при  $z=0$ .

Краевую задачу для (4.3) удобно решать, сделав замену независимой переменной  $\xi = \eta b^{1/3}$ . Тогда

$$f''_{\infty} + \varphi \xi (\xi - \mu_1) f'_{\infty} + [\xi (2\varphi - 1) + \mu_1 (1 - \varphi)] f_{\infty} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь  $\mu_1 = ab^{-2/3}$ , штрихом обозначено дифференцирование по  $\xi$ .

Первое собственное значение  $\mu_1$  определялось для  $\varphi$  из диапазона  $0 \leq \varphi \leq 0$  с шагом 0,1 с помощью метода пристрелки. Вначале с использованием метода Нумерова на отрезке  $0 \leq \xi \leq 7$  с шагом  $\Delta \xi = 10^{-3}$  для (4.5) решалась задача Коши  $f_{\infty}(0) = 0$ ,  $f'_{\infty}(0) = 1$ . Значение  $\mu_1$  подбиралось так, чтобы на рассматриваемом отрезке выполнялось условие  $f_{\infty} > 0$ . После этого по результатам численного счета проверялась скорость стремления к нулю функции  $f$  в окрестности правой границы отрезка интегрирования. Во всех случаях она оказывалась явно выше степенной. После определения первого собственного значения  $\mu_1$  функция  $f_{\infty}$  находилась с помощью метода пристрелки по второму моменту  $I_2$  при решении методом Нумерова задачи Коши  $f_{\infty}(0) = 0$ ,  $\partial f_{\infty}(0)/\partial \eta = a - b$  для уравнения (4.3) на отрезке  $0 \leq \eta \leq 6$  с шагом  $\Delta \eta = 10^{-3}$ .

На рис. 2 представлены результаты расчетов краевой задачи для первого собственного значения  $a$ , интенсивности пульсаций  $\varepsilon$ , асимметрии  $A_i$  и эксцесса  $E_i$  в зависимости от  $\varphi$ . Согласно экспериментальным данным [15, 16, 19, 30],  $\varepsilon \approx 0,58 \div 0,74$ ,  $A_i = 0,8 \div 0,9$ , а  $E_i = -0,1$ .

На рис. 3 приведены результаты расчетов функции  $f_{\infty}$  для  $\varphi = 1, 0,5$  и  $0$ . На этом же графике представлены экспериментальные данные [31, 32]. Видно, что наилучшее соответствие с опытными данными получается при  $\varphi \approx 0$ . Решение, соответствующее  $\varphi = 0$ , найдено ранее в [5]. Оно выражается через функцию Эйри [28]

$$f_{\infty} = \frac{b^{1/3}}{1,274 \sqrt{\pi}} Ai(y), \quad y = b^{1/3} [\eta - I_2(\infty)] = \xi - \mu_1. \quad (4.6)$$

Значение  $\mu_1$  в этом случае совпадает с наибольшим из корней уравнения  $Ai(y) = 0$ .

**5. Постановка краевой задачи и численное решение.** Краевая задача для уравнения (2.1) формулируется следующим образом:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^k f = 0 \quad \text{при } k > 0, \quad f(0, z) = 0, \quad (5.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f = f_{\infty}, \quad \frac{\partial^{2l+1} f(\eta, 0)}{\partial z^{2l+1}} = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

Можно привести нестрогие соображения в пользу разрешимости (5.1). Они основаны на рассмотрении уравнения (2.1) отдельно в областях  $0 \leq \eta < I_2$  и  $\eta > I_2$ . В указанных областях (2.1) полностью эквивалентно уравнению, описывающему распределение скорости в пограничном слое. В области  $0 \leq \eta < I_2$  начальные условия необходимо ставить при  $z=0$ , а в области  $\eta > I_2$  — при  $z=\infty$ . В каждой из указанных областей решение для  $f$  является функционалом от неизвестных заранее функций  $\gamma$ ,  $I_2$  и значения  $f$  при  $\eta = I_2$  (скажем,  $f_0(z) = f[I_2(z), z]$ ). Эти функции затем находятся из условий нормировки  $I_2 = 1$ , определения  $I_2$  и гладкости  $f$  при  $\eta = I_2$ . Последнее соотношение в (5.1) (условие симметрии) необходимо для определения  $\gamma_c$ .

Решение краевой задачи (5.1) для уравнения (2.1) находилось двумя различными методами. В обоих случаях, имея в виду результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных для  $f$  при  $z = \infty$  (см. рис. 3), в качестве  $f_{\infty}$  бралось решение (4.6), соответствующее  $\varphi = 0$ .



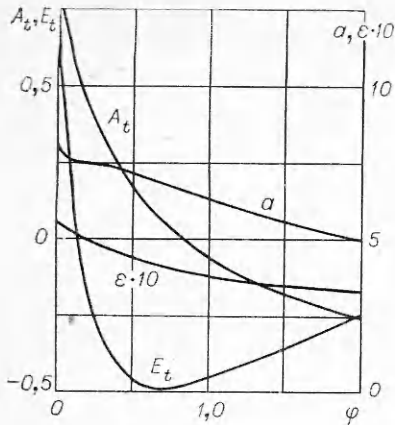


Рис. 2. Расчетная зависимость первого собственного значения  $a$ , интенсивности  $\varepsilon$ , асимметрии  $A_t$  и эксцесса  $E_t$  пульсаций концентрации от параметра  $\varphi$ .

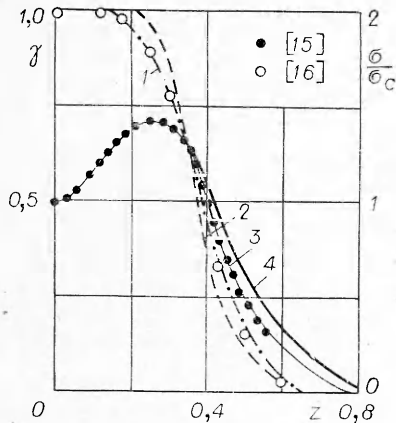


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные данные для коэффициента перемежаемости  $\gamma$  и среднеквадратичного значения пульсаций концентрации в дальнем следе за круговым цилиндром.

1 — расчет  $\gamma$  интегральным методом; 2 — расчет  $\gamma$  конечно-разностным методом; 3 — расчет  $\sigma/\sigma_c$  интегральным методом; 4 — расчет  $\sigma/\sigma_c$  конечно-разностным методом.

тов при  $z \rightarrow \infty$ , приведенных в п. 4, задавался второй момент  $I_2(z)$ , а искомыми функциями считались диссипация по турбулентной жидкости  $h$  и коэффициент перемежаемости  $\gamma$ . Полученное таким способом решение удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными по большому количеству измеренных в [15—18] параметров, таких как дисперсия  $\sigma^2$ , коэффициент перемежаемости  $\gamma$ , все статьи баланса в уравнении для  $\sigma^2$ , асимметрия и эксцесс.

В качестве примера на рис. 4 изображены результаты расчетов  $\gamma$  и среднеквадратичного значения пульсаций концентрации  $\sigma$ , отнесенного к своему значению  $\sigma_c$  при  $z=0$  (кривые 1, 3 соответственно). На этом же графике приведены экспериментальные данные по отношению  $\sigma/\sigma_c$  из [15] и  $\gamma$  из [16].

Второй метод интегрирования краевой задачи из п. 2 — релаксационный, близкий к используемым при расчете отрывных течений в погра-

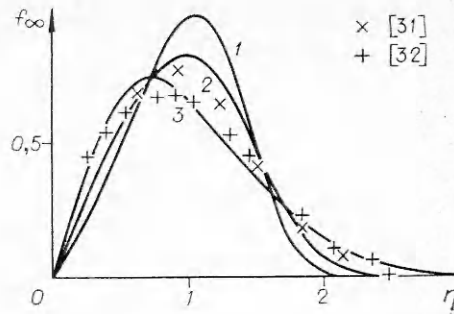


Рис. 3. Расчетные и экспериментальные данные для плотности распределения вероятностей концентрации в турбулентной жидкости ( $\varphi = 1$  (1), 0,5 (2) 0 (3)).

Первый метод интегральный. Основная его идея опирается на результаты, полученные в пп. 3 и 4, где найдены решения при  $z=0$  и  $z=\infty$ . Этот метод сходен с интегральным методом расчета характеристик пограничного слоя. Зададим  $f$  в виде  $f = \alpha f_c + (1 - \alpha) f_\infty$ ,  $\alpha = [I_2(z) - I_2(\infty)] / [I_2(0) - I_2(\infty)]^{-1}$ . Определению подлежат второй момент  $I_2$  и коэффициент перемежаемости  $\gamma$ . Дифференциальное уравнение для  $I_2$ , полученное из (2.1) умножением на  $\eta^2$  и последующим интегрированием по всем  $\eta$ , и уравнение для  $\gamma$  (2.2) представляют собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Граничные условия имеют вид

$$\lim_{z \rightarrow \infty} I_2 = I_2(\infty), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \gamma = 0.$$

Поскольку  $I_2(\infty)$  известно, то из этих уравнений находим  $I_2$  и  $\gamma$ .

Более удобным оказалось решение обратной задачи, когда, исходя из экспериментальных данных [15—18, 30] и теоретических результатов

нических слоях [33]. Первые производные по  $z$  аппроксимировались с учетом направления передачи информации: при  $A > 0$  с помощью левосторонних разностей, при  $A < 0$  — правосторонних разностей. Аналогичным образом в зависимости от знака  $B$  аппроксимировалась и первая производная по  $\eta$ . Вторая производная по  $\eta$  аппроксимировалась обычным способом. Разностная схема имеет первый порядок по  $\Delta z$ ,  $\Delta \eta$  ( $\Delta z$ ,  $\Delta \eta$  — шаги интегрирования). Для квазилинеаризации нелинейной системы разностных уравнений использовалось решение, полученное на предыдущей итерации. Полученные линейные уравнения решались на каждом слое  $z = \text{const}$  методом прогонки с последовательным переходом от слоя к слою в направлении роста  $z$ . Итерации заканчивались, когда сумма модулей разностей значений  $f$  во всех расчетных точках на полученной и предыдущей итерациях становилась меньше заданного малого числа. Для сходимости итерационного процесса использовался коэффициент релаксации, равный  $10^{-2}$ .

Остановимся на результатах расчетов по такому методу для плоского следа. В этом случае предполагалось, что  $f=0$  при  $\eta = \eta_m - 3$ , а краевое условие, соответствующее  $z \rightarrow \infty$ , ставилось при  $z = z_m = 1$  (некоторые расчеты проводились при  $\eta_m = 4$  и  $z_m = 0,8$ ). Основные расчеты выполнены при  $\Delta \eta = \eta_m/90$  и  $\Delta z = 1/40$ . Функции  $r$  и  $h$  задавались из опытов [15, 16].

Расчеты показали, что в области  $z > 0,25$  распределения коэффициента перемежаемости и второго момента удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Однако в области  $0 \leq z \leq 0,25$  распределения обеих величин осциллируют. Так,  $\gamma$  в ряде расчетных точек превышал единицу на 15—20%. Измельчение сетки не устраняет отмеченный недостаток. Эти колебания, по-видимому, обусловлены неточностями конечно-разностной аппроксимации уравнения (2.1) в области  $z \sim 0$ ,  $\eta \sim 0$ . Действительно, если ввести «естественный» масштаб концентрации  $s = (c - \langle c \rangle_i) / \sigma_i$ , то точка  $c = 0$  соответствует величине перемешивания  $s = -\langle c \rangle_i / \sigma_i$ . Это значение  $s = 4 \div 5$  при  $z = 0$ , т. е. очень велико, если учесть, что решение  $f$  изменяется примерно как  $\exp(-1/2s^2)$  (см. п. 3). Отсюда видно, что при  $z \sim 0$  и  $\eta \sim 0$  решение изменяется очень резко. Поскольку  $\gamma$  связано с  $\partial f(0)/\partial \eta$ , то значения  $\gamma$  вычисляются неточно, что, видимо, и приводит к осцилляциям.

Отмеченную трудность можно обойти, если не рассматривать решение вблизи плоскости симметрии. При этом следует задать  $f$  в некоторой точке, удаленной от плоскости симметрии. В п. 3 отмечалось, что при  $z = 0$   $f$  близка к нормальной. Опыты [16] показывают, что в следе за цилиндром при  $z < 0,25$ , т. е. в области, где перемежаемость несущественна ( $\gamma \sim 1$ ), коэффициенты асимметрии и эксцесса относительно малы, т. е.  $f$  также близка к нормальной и хорошо аппроксимируется несколькими первыми членами ряда Грама-Шарлье

$$f = n g_0(s) [1 + A_i/3! (s^3 - 3s) + E_i/4! (s^4 - 6s^2 + 3) + A_i^2/72 (s^6 - 15s^4 + 45s^2 + 15)],$$

$$g_0 = (2\pi)^{-1/2} \exp(-1/2s^2), \quad s = n(\eta - 1).$$

В расчетах величины  $n$ ,  $A_i$  и  $E_i$  брались из экспериментальных данных [15, 16]. Значения координаты  $z$ , где  $f$  задавалась приведенной формулой, составляли  $z = z_0 = 0,075; 0,1; 0,125; 0,15$ . Увеличение  $z_0$  приводило к уменьшению осцилляций, и при  $z_0 = 0,15$  решение было вполне удовлетворительным. Это решение и анализируется ниже.

Расчет показал, что переход  $f$  к асимптотическому виду  $f_\infty$  осуществляется в достаточно узкой области  $0,3 \leq z \leq 0,45$ . На рис. 4 приведено сопоставление результатов расчетов коэффициента перемежаемости  $\gamma$  и отношения  $\sigma/\sigma_c$  (кривые 2, 4 соответственно) с опытами [15, 16]. Видно, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

В заключение отметим, что подход к описанию процесса смешения в турбулентных потоках, предложенный в [5] и положенный в основу настоящего исследования, состоит в получении из точных незамкнутых уравнений для распределений вероятностей с помощью феноменологических (а иногда и умозрительных) гипотез полуэмпирических связей и соотношений между различными статистическими характеристиками турбулентности, включая и распределение вероятностей концентрации. Тем самым он не касается вопроса о замыкании уравнений и построении системы уравнений без эмпирических постоянных. В своей сущности такой подход позволяет лишь одни функции выразить через другие, и его плодотворность будет определяться только тем, какого рода функции должны быть заданы (что в значительной степени зависит от характера используемых гипотез), чтобы найти искомые. В точной формулировке в рассмотренной задаче искомые характеристики — коэффициент перемежаемости и распределение вероятностей концентрации — связаны с не менее простыми функциями: условно осредненными при заданном значении концентрации скоростью и скалярной диссипацией. В этом смысле точное незамкнутое уравнение для распределения вероятностей концентрации мало что дает. И лишь привлечение гипотез, упомянутых в п. 1, позволяет по достаточно «грубым» характеристикам турбулентности, а именно по полям средней скорости, средней концентрации и скалярной диссипации (при решении обратной задачи — полю дисперсии концентрации), с достаточной точностью определить такие тонкие характеристики, как распределение вероятностей концентрации и коэффициент перемежаемости.

Автор благодарит В. Р. Кузнецова за внимание к работе, неоднократное полезное обсуждение полученных результатов, предоставление данных обработки экспериментов [31, 32], приведенных на рис. 3, и за указанный автору способ получения формулы (3.6). Автор также благодарит Г. И. Баренблатта за внимание к работе и критические замечания и В. Л. Зимонта за советы, учтенные при подготовке статьи к печати.

*Поступила в редакцию 22/IV 1981*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. G. Lockwood, A. S. Naguib. Comb. Flame, 1975, 24.
2. В. Р. Кузнецов, А. Б. Лебедев. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, 1.
3. В. Л. Зимонт, Е. А. Мещеряков, В. А. Сабельников. ФГВ, 1978, 14, 3.
4. В. Л. Зимонт, Е. А. Мещеряков, В. А. Сабельников. Тр. четвертых кандеровских чтений. Секция «Конструкция двигателей и летательных аппаратов». М.: ИИЕТ АН СССР, 1978.
5. В. Р. Кузнецов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, 5.
6. С. Dopazo. Phys. Fluids, 1975, 18, 4.
7. S. V. Pope. Comb. Flame, 1976, 27, 299.
8. В. А. Фрог. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1973, 6.
9. P. M. Chung. Phys. Fluids, 1972, 15, 10.
10. J. Janicka, W. Kolbe, W. Kollman. J. Non — Equilib. Therm., 1979, 4, 47.
11. В. З. Компаниец, А. А. Овсянников, Л. А. Полак. Химические реакции в турбулентных потоках газа и плазмы. М.: Наука, 1979.
12. E. E. O'Brien. AIAA Paper, 1980, No. 137.
13. В. А. Сабельников. Тр. VI Всесоюз. симпозиума по горению. Горение газов и натуральных топлив. Черноголовка, 1980.
14. R. J. Wywater. AIAA Paper, 1980, N 139.
15. P. Freimuth, M. S. Uberoi. Phys. Fluids, 1971, 14, 12.
16. J. C. LaRue, P. A. Libby. Phys. Fluids, 1974, 17, 11.
17. M. S. Uberoi, J. Bashir. Phys. Fluids, 1975, 18, 4.
18. S. Corrsin, M. S. Uberoi. NASA Report 1040, 1951.
19. H. A. Backer, H. C. Hottel, G. S. Williams. J. Fluid Mech., 1967, 30, 2.
20. S. Corrsin, A. L. Kistler. NASA Report 1244, 1955.
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953.
22. Дж. К. Бэтчелор. Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.
23. В. Р. Кузнецов, В. И. Расщупкин. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, 6.
24. В. А. Безуглов. Тр. 20 науч. конф. МФТИ. Долгопрудный, 1975.
25. А. А. Таунсенд. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.

