УДК 539.313+517.957

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ТРУБОПРОВОДА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО НЕМУ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Башуров, Н. А. Ваганова*, А. И. Кропотов, М. В. Пчелинцев**, Н. А. Скоркин**, М. Ю. Филимонов*

Центр экологического и техногенного мониторинга, 456080 Трехгорный
* Институт математики и механики УрО РАН, 620219 Екатеринбург
** Снежинский физико-технический институт — филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 456770 Снежинск
E-mails: cetm@atlint.ru, n.a.scorkin@rambler.ru, fmy@imm.uran.ru

Предложена нелинейная модель, описывающая перемещение трубопровода с движущейся по нему жидкостью и позволяющая рассмотреть ряд прикладных задач, не имеющих решения в рамках линейной модели. Решена задача о равновесии трубы с движущейся по ней жидкостью в поле силы тяжести. Построено точное решение уравнения упрощенной нестационарной модели.

Ключевые слова: трубопровод, равновесие, деформация, точное решение.

1. Вывод уравнений движения и постановка задачи. В работе [1] рассмотрена математическая модель заполненного движущейся жидкостью или газом трубопровода, размещенного в болотистой местности. На трубопровод действуют упругие силы, обусловленные деформацией стенок трубы, центробежная сила, вызванная движением жидкости по трубе, и сила реакции грунта, оказывающего сопротивление перемещению трубы. Модель представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, в котором независимыми переменными являются время и длина трубопровода, а искомой функцией — смещение трубопровода относительно начального положения. Сила сопротивления среды движению трубопровода зависит от скорости перемещения трубы, что обусловливает нелинейность уравнений данной модели.

На рис. 1 показаны элемент трубы и силы, действующие на него ($\boldsymbol{T}$ — сила "натяжения" трубы, направленная по касательной к кривой $y(x)$; $\boldsymbol{P}$ — вес элемента трубы; $\boldsymbol{F}$ — центробежная сила, обусловленная движением по трубе жидкости плотностью ρ_0 со скоростью v, считающейся постоянной). Будем моделировать трубу упругой нитью длиной L. Сила упругости, возникающая вследствие изменения начальной длины элемента нити, определяется законом Гука $T = E\varepsilon S$, где E — модуль Юнга; ε — относительная линейная деформация; S — площадь сечения нити.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта РФФИ-Урал 10-08-96014) и в рамках интеграционных проектов УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (грант № 09-С-1-1004).

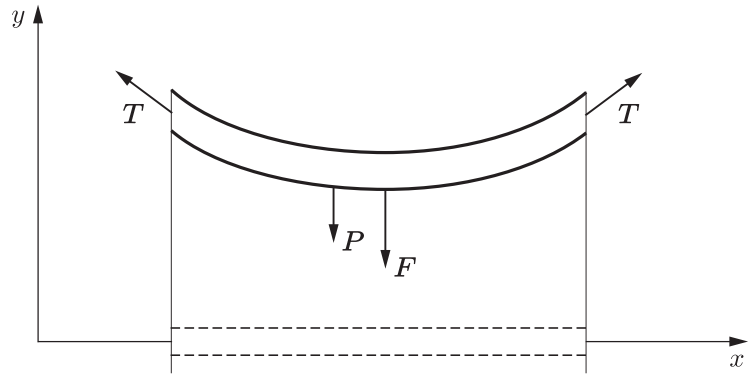

Рис. 1. Элемент трубы и действующие на него силы

Каждая точка трубы определяется координатой s (лагранжевой координатой), которая соответствовала ей в начальный момент, когда труба находилась в состоянии равновесия. При деформации трубы точка смещается как по вертикали, так и по горизонтали. Можно считать, что движение точки описывается двумя уравнениями

$$x = x(s,t), \qquad y = y(s,t). \tag{1}$$

Выведем уравнения перемещения трубы с движущейся по ней жидкостью. Проекции на оси x и y упругих сил, приходящихся на единицу площади, имеют вид

$$T_x = E\,\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2} - 1}{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2}}\,\frac{\partial x}{\partial s}\Big), \qquad T_y = E\,\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2} - 1}{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2}}\,\frac{\partial y}{\partial s}\Big).$$

Проекция силы тяжести на ось y равна $-\rho g$. Плотность ρ представляет собой средневзвешенную сумму плотностей материала трубы и жидкости. Проекции центробежной силы можно представить в виде

$$F_x = -\rho_0 v^2\,\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \qquad F_y = -\rho_0 v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

В этом случае система уравнений, описывающая перемещение трубопровода, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= E\,\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2} - 1}{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2}}\,\frac{\partial x}{\partial s}\Big) - \rho_0 v^2\,\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= E\,\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2} - 1}{\sqrt{y_s'^2 + x_s'^2}}\,\frac{\partial y}{\partial s}\Big) - \rho_0 v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \rho g. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача о равновесии сводится к решению системы (2) с нулевой левой частью. Граничные условия для этой системы имеют вид

$$x(0,t) = y(0,t) = 0, \qquad x(L,t) = L, \quad y(L,t) = 0.$$

Ниже рассматриваются как полная система (2) (“сложная” модель), так и упрощенная (“простая” модель).

2. “Простая” модель. Рассмотрим тонкую трубу длиной L с площадью сечения S, полагая, что $\sqrt{S} \ll L$. В дальнейшем будем моделировать трубу упругой нитью, форма которой описывается кривой $y = y(x)$. В этом заключается отличие “простой” модели от “сложной” модели, в которой движение трубы описывается уравнениями (1). Как и в классической модели струны, предполагается, что смещение точек трубы в горизонтальном направлении отсутствует. Это предположение верно, если $\partial y/\partial s \ll 1$ и $\partial x/\partial s \approx 1$.

Пусть по трубе движется жидкость плотностью ρ_0 со скоростью v. На элемент единичной длины стенки трубы со стороны жидкости действует центробежная сила $F = \rho_0 S v^2/R$ (R — радиус кривизны кривой $y(x)$), направленная по нормали к кривой $y(x)$. Будем считать, что в начальный момент времени труба расположена параллельно оси x, начальные напряжения отсутствуют, поэтому на трубу действует только сила тяжести. Первоначальная невозмущенная форма трубы может изменяться. В этом случае появляются как упругие силы, стремящиеся вернуть трубу в исходное положение, так и центробежные силы инерции, действующие в направлении, противоположном направлению упругих сил. Эти силы определяют деформацию трубы, а следовательно, и величину напряжений в оболочке трубы, которая может превысить допустимую величину.

Выведем уравнение изогнутой трубы в предположении, что деформации и их производные по пространству малы. В этом случае сила упругости определяется по формуле

$$T = ES\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2,$$

где E — модуль Юнга. При выводе этой формулы не учитывались бесконечно малые второго и более высоких порядков. Центробежная сила вычисляется следующим образом:

$$F = \rho_0 S v^2 \Big[1 + \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2\Big]^{-3/2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Уравнение движения трубы имеет вид

$$m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = ES\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho_0 S v^2 \Big[1 + \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2\Big]^{-3/2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho S g, \tag{3}$$

где m — масса элемента трубы единичной длины, представляющая собой сумму масс стенки трубы и жидкости в данном элементе трубы.

Отметим, что в отличие от линейного уравнения, полученного без учета внешних сил в работе [1], уравнение (3) является нелинейным.

Рассмотрим равновесие в поле силы тяжести упругой трубы, по которой движется жидкость со скоростью v. Полагая в уравнении (3) производную по времени равной нулю, получаем уравнение равновесия

$$E\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho_0 v^2 \Big[1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2\Big]^{-3/2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho g. \tag{4}$$

При $v = 0$ первый интеграл в уравнении (4) принимает вид

$$Ew^3/3 = \rho g x + A, \tag{5}$$

где $w = dy/dx$; A — неизвестная константа. Решение уравнения (5) имеет вид

$$y = (3Kx + A)^{4/3}/(4K) + B,$$

где B — произвольная постоянная; $K = \rho g/E$.

Используя условия жесткого закрепления трубы $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, получаем систему двух уравнений для произвольных постоянных

$$A^{4/3}/(4K) + B = 0, \qquad (3KL + A)^{4/3}/(4K) + B = 0,$$

решение которой имеет вид

$$y = (3Kx - 3KL/2)^{4/3}/(4K) - (3KL/2)^{4/3}/(4K).$$

Максимальный прогиб трубы равен $(3KL/2)^{4/3}/(4K)$ и достигается в ее середине. Методом стрельбы получено решение уравнения (4) при следующих значениях параметров:

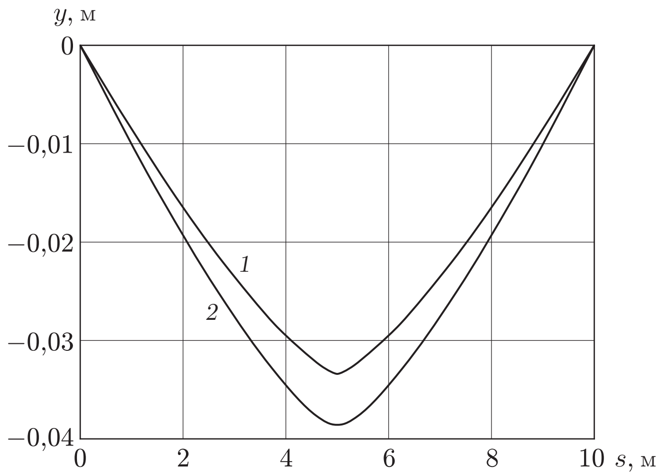

Рис. 2. Прогибы трубы, рассчитанные по “простой” модели при различных значениях скорости жидкости:
1 — $v = 0$; *2* — $v = 10$ м/с

$E = 210 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 1500$ кг/м^3, $L = 10$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. На рис. 2 представлены решения уравнения (4) при $v = 0$, 10 м/с.

3. “Сложная” модель. Рассмотрим “сложную” модель трубы, находящейся в состоянии равновесия в поле силы тяжести:
$$E\,\frac{d}{ds}\Big(\frac{\sqrt{(x')^2+(y')^2}-1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\,y'\Big) - ay'' = b, \qquad E\,\frac{d}{ds}\Big(\frac{\sqrt{(x')^2+(y')^2}-1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\,x'\Big) - ax'' = 0.$$
Здесь $a = \rho_0 v^2$; $b = \rho g$. Первые интегралы этой системы имеют вид
$$E\,\Big(\frac{\sqrt{(x')^2+(y')^2}-1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} - \frac{a}{E}\Big)y' = bs + c_1, \qquad E\,\Big(\frac{\sqrt{(x')^2+(y')^2}-1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} - \frac{a}{E}\Big)x' = c_2. \tag{6}$$
Из (6) следует зависимость $y' = \gamma(s)x'$, где $\gamma(s) = (bs + c_1)/c_2$. С использованием этой зависимости можно проинтегрировать уравнения
$$x(s) = \frac{c_2}{E-a}\,s + \frac{E}{E-a}\,\frac{c_2}{b}\,\ln\big|\gamma(s) + \sqrt{\gamma^2(s)+1}\,\big| + c_3,$$
$$y(s) = \frac{b}{E-a}\,\frac{s^2}{2} + \frac{c_1}{E-a}\,s + \frac{E}{E-a}\,\frac{c_2}{b}\,\sqrt{1+\gamma^2(s)} + c_4.$$
Константы интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 определяются из граничных условий $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $x(0) = 0$, $x(L) = L$:
$$\frac{Ec_2}{(E-a)b}\ln\big|\gamma(0) + \sqrt{\gamma^2(0)+1}\,\big| + c_3 = 0, \qquad \frac{Ec_2}{(E-a)b}\sqrt{\gamma^2(0)+1} + c_4 = 0,$$
$$\frac{c_2L}{E-a} + \frac{Ec_2}{(E-a)b}\,\ln\big(\gamma(L) + \sqrt{\gamma^2(L)+1}\,\big) + c_3 = L, \tag{7}$$
$$\frac{bL^2}{2(E-a)} + \frac{c_1L}{E-a} + \frac{Ec_2}{(E-a)b}\sqrt{\gamma^2(L)+1} + c_4 = 0.$$

Решение системы (7) сводится к решению системы двух уравнений относительно неизвестных $\alpha = (bL + c_1)/c_2$, $\beta = c_1/c_2$:
$$L(\alpha+\beta)/2 + E\big(\sqrt{1+\alpha^2} - \sqrt{1+\beta^2}\,\big)/b = 0; \tag{8}$$
$$\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} - \big(\beta + \sqrt{1+\beta^2}\,\big)\,\mathrm{e}^{-Lb/E}\,\mathrm{e}^{(E-a)(\alpha-\beta)/E} = 0. \tag{9}$$

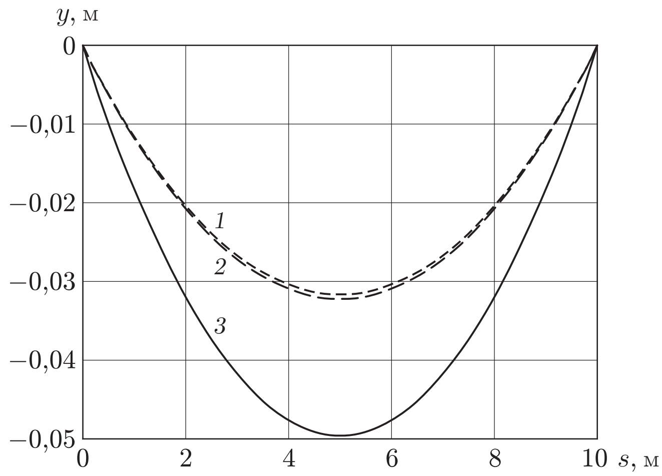

Рис. 3. Прогибы трубы, рассчитанные по “сложной” модели:
1 — $v = 0$; *2* — $v = 10$ м/с; *3* — $v = 100$ м/с

Так как $E \gg a$ и $E \gg Lb$, то, заменяя в (9) $(E-a)/E$ на единицу и Lb/E на нуль, получаем приближенную систему, которая, как нетрудно установить, имеет только нулевое решение: $\alpha = \beta = 0$. Это означает, что решение системы уравнений (8), (9) нужно искать в окрестности нулевого значения переменных α, β. Нелинейная система уравнений (8), (9) решается численно с использованием модифицированного метода Ньютона [2]:

$$\frac{dX}{d\tau} = -[DF(X)]^{-1}F(X),$$

где

$$F(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)/2 + (E/b)\left(\sqrt{1+\alpha^2} - \sqrt{1+\beta^2}\right) \\ \alpha + \sqrt{1+\alpha^2} - \mathrm{e}^{-Lb/E}\,\mathrm{e}^{(E-a)(\alpha-\beta)/E}\left(\beta + \sqrt{1+\beta^2}\,\right) \end{pmatrix}, \qquad X = (\alpha,\beta)^{\mathrm{т}},$$

$DF(X)$ — матрица Якоби.

Оценки показывают, что при скорости движения жидкости $v < 104{,}8$ м/с существует единственное решение системы (8), (9). В частности, при $v = 100$ м/с $\alpha = 0{,}019\,184\,6$, $\beta = -0{,}019\,185\,1$, при $v = 10$ м/с $\alpha = 0{,}012\,906\,5$, $\beta = -0{,}012\,906\,8$, при $v = 0$ $\alpha = 0{,}012\,711\,3$, $\beta = -0{,}012\,711\,4$.

На рис. 3 приведены результаты расчетов по “сложной” модели при различных значениях скорости жидкости. Из рис. 2, 3 следует, что при $v = 0$ распределения прогибов по длине трубы, полученные по двум моделям, близки, но уже при $v = 10$ м/с значение максимального прогиба трубы, вычисленное с помощью “простой” модели, существенно больше значения этого параметра, полученного с использованием “сложной” модели. По-видимому, “сложная” модель является более точной, чем упрощенная, но утверждать это можно лишь при наличии экспериментальных данных.

При значении скорости жидкости $v \approx 104{,}837$ м/с существует два решения системы (8), (9), а при $v > 104{,}837$ м/с — три решения. В частности, при $v = 105$ м/с $\alpha = 0{,}020\,454\,2$, $\beta = -0{,}020\,454\,9$; $\alpha = -0{,}011\,354\,8$, $\beta = 0{,}011\,355\,2$; $\alpha = -0{,}009\,098\,5$, $\beta = 0{,}009\,098\,7$. На рис. 4 показаны формы трубы в состоянии равновесия, соответствующие этим трем решениям.

4. Точное решение упрощенного уравнения “сложной” модели. Предположим, что в уравнении (3) $\partial y/\partial x \ll 1$. Представляя второе слагаемое в правой части уравнения (3) в виде ряда Тейлора и отбрасывая члены выше четвертого порядка относительно

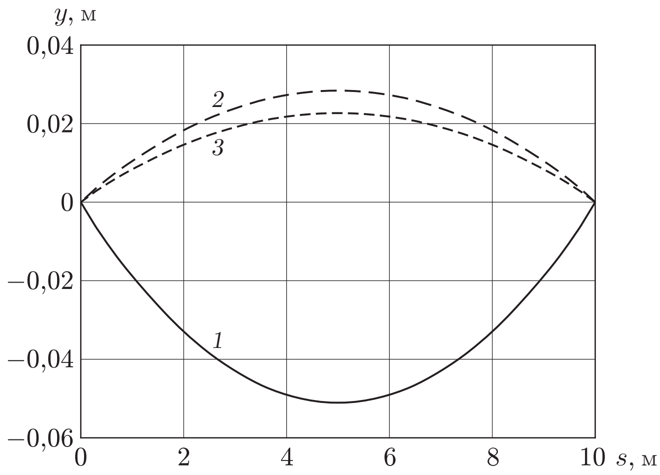

Рис. 4. Формы трубы, рассчитанные по “сложной” модели при $v = 105$ м/с: *1* — $\alpha = 0{,}020\,454\,2$, $\beta = -0{,}020\,454\,9$; *2* — $\alpha = -0{,}011\,354\,8$, $\beta = 0{,}011\,355\,2$; *3* — $\alpha = -0{,}009\,098\,5$, $\beta = 0{,}009\,098\,7$

$\partial y/\partial x$, получаем уравнение

$$\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Big[\Big(E + \frac{3}{2}\,\rho_0 v^2\Big)\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 - \rho_0 v^2\Big]\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho g. \qquad (10)$$

Для уравнения (10) можно найти точное решение в виде полинома второй степени

$$y_1(x,t) = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t). \qquad (11)$$

Подставляя $y_1(x,t)$ в уравнение (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов полинома (11)

$$a_2''(t) = q a_2^3(t); \qquad (12)$$

$$a_1''(t) = q a_1(t) a_2^2(t); \qquad (13)$$

$$a_0''(t) = \frac{q}{4}\,a_1^2(t)a_2(t) - \frac{2\rho_0 v^2}{\rho}\,a_2(t) - g, \qquad q = \frac{8(E + (3/2)\rho_0 v^2)}{\rho}. \qquad (14)$$

Уравнение (12) разрешимо в эллиптических функциях. Существует частное решение этого уравнения

$$a_2(t) = \sqrt{\frac{2}{q}}\,\frac{1}{t + A_1} \qquad (15)$$

(A_i ($i \geqslant 1$) — произвольные постоянные). В этом случае уравнение (13) преобразуется в уравнение Эйлера, решение которого имеет вид

$$a_1(t) = A_2/(t + A_1) + A_3(t + A_1)^2. \qquad (16)$$

Подставляя решения (15), (16) в уравнение (14), получаем

$$a_0(t) = \frac{A_3^2\sqrt{2q}}{8}\Big(\frac{t^5}{10} + \frac{A_1 t^4}{2} + A_1^2 t^3\Big) + \frac{A_3\sqrt{2q}}{4}\Big(\frac{A_3 A_1^2}{2} + A_2\Big)t^2 - {}$$
$$- p\sqrt{\frac{2}{q}}\,\big[t\ln(t + A_1) + A_1\ln(t + A_1) - t - A_1\big] - \frac{gt^2}{2} + A_4 t + A_5,$$

где $p = 2\rho_0/\rho$. Найденное точное частное решение $y_1(x,t)$ может быть использовано при тестировании численных методик, которые будут применяться при решении нестационарных задач о движении трубопровода.

Заключение. Предложена нелинейная модель трубопровода с движущейся по нему идеальной жидкостью, отличающаяся от линейной модели, рассмотренной в [1]. Это позволило решить ряд прикладных задач. Рассмотрены две модели ("простая" и "сложная"). Для "сложной" модели получено частное аналитическое решение. Для обеих моделей проведены расчеты состояния равновесия при различных значениях скорости движения жидкости по трубе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ткаченко О. П.** Движение подземного трубопровода с учетом конечности его перемещений // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, ч. 2 (спецвыпуск). С. 628–631.
2. **Пчелинцев М. В., Скоркин Н. А.** Геометрический смысл метода Ньютона // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, физика. 2009. Вып. 1, № 22. С. 4–11.

Поступила в редакцию 26/I 2011 г.,
в окончательном варианте — 14/IV 2011 г.