УДК 532.517.4

ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАЛЬНЕГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА ТЕЛОМ ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Гребенев, А. Г. Деменков[*,**], Г. Г. Черных

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090 Новосибирск, Россия

[*] Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

[**] Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия

E-mails: vngrebenev@gmail.com, demenkov@itp.nsc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

С использованием трехпараметрической модели турбулентности, включающей дифференциальные уравнения баланса энергии турбулентности, переноса скорости ее диссипации и касательного турбулентного напряжения, исследуется течение в дальнем турбулентном следе за телом вращения. Следствием локально-равновесного алгебраического усечения уравнения переноса касательного турбулентного напряжения является известное соотношение Колмогорова — Прандтля. Установлено, что при определенном ограничении на значения эмпирических констант и при согласующемся с математической моделью законе роста временного масштаба это соотношение является дифференциальной связью модели или инвариантным многообразием в фазовом пространстве соответствующей динамической системы. Показана эквивалентность локально-равновесного приближения и условия равенства нулю скобки Пуассона для обезразмеренных коэффициента турбулентной диффузии и дефекта продольной компоненты скорости. Приведены результаты численных экспериментов, хорошо согласующиеся с теоретическими результатами.

Ключевые слова: метод дифференциальных связей, трехпараметрическая модель турбулентного следа, локально-равновесное приближение, турбулентный след за телом вращения, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20220511

Введение. Турбулентные следы за буксируемыми телами вращения в однородной жидкости представляют собой классический объект исследований экспериментальной, теоретической и вычислительной гидродинамики (см. работы [1–10] и библиографию к ним). Уникальные экспериментальные данные о динамике турбулентных следов за буксируемыми телами различной формы представлены в работе [3], в которой выявлена существенная зависимость параметров дальних турбулентных следов от формы тела. Постановки задачи и результаты математического моделирования турбулентных следов за телами различной

Работа выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий по теме "Разработка и исследование вычислительных технологий решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики". Численные эксперименты проведены в Институте теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН в рамках государственного задания № 121031100246-5.

формы обсуждались в [2, 5–7, 9], причем в [9] исследование проводилось с использованием метода прямого численного моделирования (DNS). В [4] сделано предположение об асимптотической универсальности дальних турбулентных следов с одинаковым суммарным избыточным импульсом (см. также [9]). В работах [2, 5–8, 10] изучаются дальние турбулентные следы за телами вращения, при этом одной из применяемых математических моделей турбулентности в [2, 5] является классическая (e, ε)-модель турбулентности. Сравнение результатов расчетов, основанных на двух полуэмпирических моделях турбулентности, с результатами расчетов с использованием прямого численного моделирования и с экспериментальными данными [3] для удлиненного тела вращения проведено в работе [10], в которой показано, что максимальная близость к экспериментальным данным получена при использовании простой математической модели, включающей колмогоровское алгебраическое представление скорости диссипации.

Результаты исследования автомодельности вырождения осесимметричных и плоских турбулентных следов с использованием трехпараметрической модели турбулентности, включающей наряду с дифференциальными уравнениями баланса энергии турбулентности и переноса скорости ее диссипации дифференциальное уравнение для определения касательного турбулентного напряжения, приведены в [8].

Алгебраическое локально-равновесное усечение дифференциального уравнения переноса касательного напряжения приводит к известной формуле Колмогорова — Прандтля, связывающей касательное турбулентное напряжение с градиентом продольной компоненты осредненной скорости [11]. Модель переходит в известную двухпараметрическую (e, ε)-модель турбулентности. В настоящей работе приводится обоснование локально-равновесного усечения (алгебраической параметризации) дифференциального уравнения переноса касательного напряжения с использованием метода дифференциальных связей [12, 13] для модели дальнего турбулентного следа за телом вращения. В рамках такого подхода локально-равновесное приближение интерпретируется как совместная дифференциальная связь модели или как инвариантное многообразие в фазовом пространстве соответствующей динамической системы.

Данная работа является продолжением работ [14–16], в которых метод дифференциальных связей использовался для обоснования локально-равновесного приближения в задаче о динамике плоских турбулентных следов.

1. Дифференциальная связь: инвариантное многообразие фазового пространства. Рассмотрим основные понятия метода совместных дифференциальных связей и их связь с инвариантными многообразиями динамических систем [13].

Динамическая система дифференциальных уравнений

$$x_{it} = f^i(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$; $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, порождает, вообще говоря локально, поток или однопараметрическую группу G в фазовом пространстве. Векторное поле задается следующим образом:

$$V_f = f^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f^n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Многообразие M, заданное уравнениями

$$g^1(\boldsymbol{x}) = g^k(\boldsymbol{x}), \qquad k < n,$$

является инвариантным многообразием группы G при выполнении равенства

$$V_f(g^i)\big|_M = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Инвариантные множества динамической системы (1) представляют собой инвариантные многообразия однопараметрической группы G.

Рассмотрим систему эволюционных уравнений F

$$u_t^i = F^i(t, \boldsymbol{x}, u^1, \ldots, u_\lambda^j, \ldots), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$; $u_\lambda^k = \partial^{|\lambda|} u^k / \partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}$. Пусть L — система дифференциальных уравнений для независимых переменных $t, x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через $[L]$ множество, порожденное системой L и ее дифференциальными следствиями, а через $[L]_0$ — систему по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и ее дифференциальные следствия. Для операторов полного дифференцирования по переменным $t, x_1, \ldots, x_n$ используем обозначения D_t, $D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}$.

Рассмотрим порожденное системой (2) векторное поле

$$V_F = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^m F^1 \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^m D^\alpha(F^i) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i},$$

$(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n})$.

Многообразие H, заданное уравнениями

$$h^j(t, \boldsymbol{x}, u^1, \ldots, u_\lambda^k, \ldots) = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

является инвариантным многообразием или совместной дифференциальной связью системы (2) при

$$V_F(h^j)\big|_{[H]_0} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l.$$

Условие инвариантности допускает эквивалентную формулировку

$$D_t(h^j)\big|_{[F]_0}\big|_{[H]_0} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

где F — система (2).

Заметим, что инвариантные многообразия порождаются не только симметриями дифференциальных уравнений, но и законами сохранения. Симметрии дифференциальных уравнений и вариационные производные плотностей законов сохранения удовлетворяют определяющим уравнениям

$$D_t h^i = \sum_{k=1}^m a_n^{ik} D_x^n(h^k) + \ldots + a_0^{ik} h^k, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где a_j^{ik} зависит от t, $\boldsymbol{x}$, функций u^l и их производных. Таким образом, уравнения (3) удовлетворяются с учетом системы (2). В случае если функции h^i удовлетворяют определяющим уравнениям (3), имеем

$$D_t(h^i)\big|_{[(2)]_0}\big|_{[H]_0} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4}$$

где $[H]_0$ обозначает уравнения

$$h^1 = h^2 = \ldots = h^m = 0.$$

Рассмотрим систему (вообще говоря, неэволюционную) вида

$$F^i(x_0, \boldsymbol{x}, u^1, \ldots, u_\alpha^j, \ldots) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{5}$$

Произвольные m функций $h^1, \ldots, h^m$, зависящие от $x_0, \boldsymbol{x}, u^1, \ldots, u^m, u_\alpha^j, \ldots$, определяют дифференциальный оператор

$$H^* = \sum_{i=1}^m \Big(h^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{|\alpha|>1} D^\alpha(h^i) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^i} \Big),$$

где $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$,

$$h^1 = h^2 = \ldots = h^m = 0. \tag{6}$$

Уравнения (6) являются совместными дифференциальными связями системы (5) при

$$H^*(F) + Bh\big|_{(5)} = 0, \tag{7}$$

где $F = (F^1, \ldots, F^m)$; $h = (h^1, \ldots, h^m)$.

В случае если уравнения (5) являются системой эволюционных уравнений, условия (7) принимают вид

$$D_t h^i + L^i(h)\big|_{(5)} = 0,$$

где

$$L^i(h)\big|_{(6)} = 0.$$

В этом случае уравнения H задают инвариантное многообразие.

2. Локально-равновесное усечение уравнения переноса касательного турбулентного напряжения: дифференциальная связь модели. Для исследования течения в дальнем турбулентном следе за телом вращения используется следующая трехпараметрическая модель турбулентности:

$$U_0\,\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\langle u'v'\rangle; \tag{8}$$

$$U_0\,\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{2}{3}\,C_s\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{e^2}{\varepsilon}\,\frac{\partial e}{\partial r} + P - \varepsilon; \tag{9}$$

$$U_0\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{2}{3}\,C_\varepsilon\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{e^2}{\varepsilon}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{e}\,(C_{\varepsilon_1}P - C_{\varepsilon_2}\varepsilon); \tag{10}$$

$$U_0\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle u'v'\rangle = \frac{2}{3}\,C_s\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{e^2}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\langle u'v'\rangle - \frac{2}{3}\,C_s\,\frac{e^2}{\varepsilon}\,\frac{\langle u'v'\rangle}{r^2} - C_{\phi_1}\Big(\langle u'v'\rangle\,\frac{\varepsilon}{e} - C_\mu e\,\frac{\partial U_1}{\partial r}\Big). \tag{11}$$

Здесь x, r, φ — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела; направление x противоположно направлению движения тела; U_0 — скорость набегающего потока; $U_1 = U_0 - U$ — дефект осредненной продольной компоненты скорости; e — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации; угловые скобки означают операцию осреднения; величина

$$P = \langle u'v'\rangle\,\frac{\partial U_1}{\partial r}$$

задает генерацию энергии турбулентности; C_s, C_ε, C_{ε_1}, C_{ε_2}, C_{ϕ_1} — эмпирические постоянные. Математическая модель (8)–(11) является следствием упрощения известной математической модели рейнольдсовых напряжений [11] в приближении дальнего следа и в предположении $\langle v^2\rangle = (2/3)e$. Уравнения математической модели обезразмериваются с использованием масштаба скорости U_0 и масштаба длины D, в качестве которого выбирается диаметр тела. В дальнейшем по возможности сохраняются те же обозначения для обезразмеренных переменных, что и для размерных. Переменная x в уравнениях (8)–(11) играет роль времени.

Локально-равновесная аппроксимация (усечение) означает, что конвективный и диффузионный переносы пренебрежимо малы [11, 17, 18]. Применяя эту концепцию к модели (8)–(11), получаем следующее представление касательного напряжения Рейнольдса $\langle u'v'\rangle$, известное как соотношение Колмогорова — Прандтля [11]:

$$\langle u'v'\rangle = C_\mu\,\frac{e^2}{\varepsilon}\,\frac{\partial U_1}{\partial r} \equiv C_\mu e\tau\,\frac{\partial U_1}{\partial r} \tag{12}$$

($C_\mu = 2C_s/3$; $\tau = e/\varepsilon$).

Относительно простая модель (8)–(11), используемая в данной работе, удовлетворительно описывает динамику турбулентного следа за удлиненным телом вращения. Более общие полуэмпирические модели второго порядка замыкания пространственных турбулентных потоков представлены в [2, 11, 17, 18].

Верификация локально-равновесной аппроксимации проводится в рамках метода дифференциальных связей. Покажем, что соотношение (12) при определенных приведенных ниже ограничениях является дифференциальной связью, совместной с системой уравнений (8)–(11). Докажем, что множество

$$M = \Big(e, \tau, U_1, \langle u'v'\rangle\colon \quad \mathcal{H}(e, \tau, U_1, \langle u'v'\rangle) \equiv \langle u'v'\rangle - C_\mu e\tau\,\frac{\partial U_1}{\partial y} = 0\Big)$$

является инвариантным относительно потока, порожденного системой дифференциальных уравнений (8)–(11). Критерием инвариантности множества M является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $(e, \varepsilon, \tau, U_1, \langle u'v'\rangle)$ *— достаточно гладкое решение системы* (8)–(11). *Предположим также, что* $C_{\varepsilon_1} = 1$, $C_\varepsilon = C_s$, $C_\mu = (2/3)C_s$. *Тогда множество* M *является инвариантным многообразием системы* (8)–(11) *для* $\tau = \tau_h = (C_{\varepsilon_2} - 1)(x + x_0)$, *если и только если скобка Пуассона* $\{C_\mu e\tau_h, U_1\} = 0$.

Рассмотрим сначала уравнение для τ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{e}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{2}{3\varepsilon}\,\frac{1}{r}\,C_s\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\tau e\,\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{P}{\varepsilon} - 1 -{}&\\ - \frac{2e}{3\varepsilon^2}\,C_\varepsilon\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\tau e\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon}\,C_{\varepsilon_1}P + C_{\varepsilon_2} ={}&\\ = \frac{2}{3\varepsilon}\,C_s\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\tau^2 e\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} + \frac{2}{3\varepsilon}\,C_\varepsilon\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\tau e\varepsilon\,\frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{P}{\varepsilon} - 1 -{}&\\ - \frac{2}{3\varepsilon}\,C_s\,\frac{1}{r}\,\tau\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\tau e\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon}\,C_{\varepsilon_1}P + C_{\varepsilon_2}.&\end{aligned} \qquad (13)$$

Уравнение (13) имеет однородное решение

$$\tau(x, r) \equiv \tau_h(x) = (C_{\varepsilon_2} - 1)(x + x_0) \qquad (14)$$

(x_0 — произвольная постоянная) для $C_s = C_\varepsilon$ (рекомендованные значения $C_s = 0{,}22$, $C_\varepsilon = 0{,}17$ [11]) и $C_{\varepsilon_1} = 1$ (рекомендованное значение $C_{\varepsilon_1} = 1{,}44$ [11]). Для того чтобы доказать, что M является инвариантным многообразием (совместной дифференциальной связью) системы (8)–(11), проверим условия инвариантности (4):

$$D_x(\mathcal{H})\Big|_{[H]_0}\Big|_{[(8)-(11)]_0} = 0. \qquad (15)$$

Проводя непосредственные вычисления в левой части уравнения (15) для $\tau = \tau_h(x)$, получаем

$$D_x(\mathcal{H}) = -eC_\mu\,\frac{\partial U_1}{\partial r}\,\tau_{hx} - \tau_h C_s\,\frac{2}{3}\Big(\frac{\partial e}{\partial x}\,\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{\partial e}{\partial r}\,\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big)$$

или с учетом $C_\mu = 2C_s/3$

$$D_x(\mathcal{H}) = \{C_\mu e\tau_h, U_1\}. \qquad (16)$$

3. Результаты численных экспериментов. С использованием полученных теоретических результатов выполнена серия численных экспериментов. Математическую модель, включающую дифференциальные уравнения (8)–(11), будем называть математической моделью 1, систему уравнений (8)–(10), замкнутую посредством алгебраического соотношения (12) с соответствующими начальными и краевыми условиями, — математической моделью 2. Для математических моделей 1, 2 ставились следующие граничные условия:

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \langle u'v' \rangle = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad x \geqslant x_{01},$$

$$U_1 = e = \varepsilon = \langle u'v' \rangle = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad x \geqslant x_{01}.$$

Граничные условия для касательного напряжения задаются лишь для модели 1.

Вычислительный эксперимент заключался в следующем. Начальные данные при расчетах по модели 2 задавались при $x_{01} = 181D$ и были согласованы с экспериментальными данными [3] для следа за удлиненным телом вращения. При этом начальное условие для скорости диссипации задавалось в соответствии с соотношением Колмогорова. Конечно-разностный алгоритм, его реализация, тестирование и использование при решении задач свободной турбулентности представлены в работе [5]. Расчет проводился вплоть до значения расстояния $x = 2000D$. При $x = 600D$ в вычислительный эксперимент вводилась модель 1. Начальное условие для касательного турбулентного напряжения $\langle u'v' \rangle$ определялось из соотношения (12). На расстояниях $x/D = 800$, 1200, 1600 рассчитанные распределения U_1, e, ε, $\langle u'v' \rangle$ оказались близкими. Результаты расчетов по модели 2 на последовательности сеток показывают, что значения конечно-разностного аналога скобки Пуассона на больших расстояниях от тела близки к нулю для всех сеточных параметров. В таблице представлены полученные на последовательности сеток значения величины

$$\delta^n = \frac{\max_j \, |(U^h_{1x}(e^2/\varepsilon)^h_r)^n_j - (U^h_{1r}(e^2/\varepsilon)^h_x)^n_j|}{\max_j \, (|\nabla^h(e^2/\varepsilon)|^2_j, |\nabla^h U_1|^2_j)}, \tag{17}$$

рассматриваемой в качестве функции расстояния от тела и при $x = x^n$ характеризующей конечно-разностный аналог скобки Пуассона (16), но без учета множителя C_μ. В (17) $(U^h_{1x})_j$, $(U^r_{1r})_j$, $((e^2/\varepsilon)^h_x)_j$, $((e^2/\varepsilon)^h_r)_j$, $(\nabla^h U_1)_j$, $(\nabla^h(e^2/\varepsilon))_j$ — конечно-разностные аппроксимации первых частных производных и градиентов в точках (x^n, r_j): $x^n = x_{01} + nh_x$, $r_j = (j-1)h_r$, $j = 1, 2, \ldots, n_r + 1$.

Из таблицы следует, что при достаточно больших значениях x значение δ^n близко к нулю.

На рис. 1 представлены результаты вычислений, выполненных с использованием моделей 1, 2. Результаты расчетов дефекта продольной компоненты скорости U_1 и энергии турбулентности e, соответствующие $x/D = 800$, 1200, 1600, представлены на рис. 1,*а,б*. Скорость диссипации ε и касательное напряжение Рейнольдса $\langle u'v' \rangle$ для тех же расстояний

Значения δ^n при различных расстояниях от тела, полученные в расчетах на последовательности сеток

x/D	δ^n		
	$h_x = 0{,}1$, $h_r = 0{,}1$	$h_x = 0{,}025$, $h_r = 0{,}05$	$h_x = 0{,}006\,25$, $h_r = 0{,}025$
200	$0{,}412 \cdot 10^{-2}$	$0{,}414 \cdot 10^{-2}$	$0{,}415 \cdot 10^{-2}$
400	$0{,}972 \cdot 10^{-3}$	$0{,}972 \cdot 10^{-3}$	$0{,}973 \cdot 10^{-3}$
600	$0{,}262 \cdot 10^{-3}$	$0{,}265 \cdot 10^{-3}$	$0{,}266 \cdot 10^{-3}$
800	$0{,}116 \cdot 10^{-3}$	$0{,}116 \cdot 10^{-3}$	$0{,}112 \cdot 10^{-3}$
1200	$0{,}551 \cdot 10^{-4}$	$0{,}532 \cdot 10^{-4}$	$0{,}535 \cdot 10^{-4}$
1600	$0{,}363 \cdot 10^{-4}$	$0{,}352 \cdot 10^{-4}$	$0{,}340 \cdot 10^{-4}$

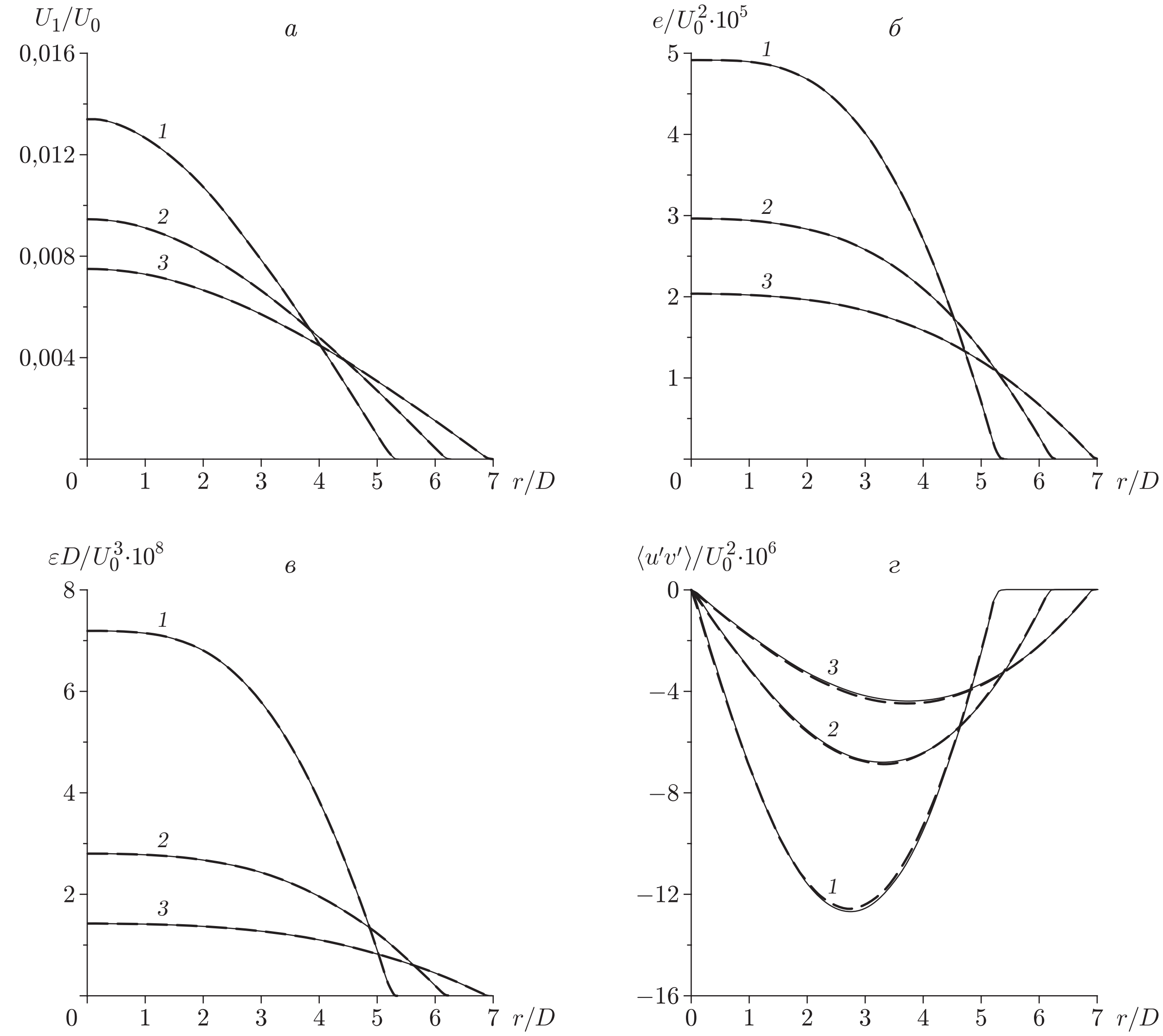

Рис. 1. Радиальные распределения дефекта продольной компоненты скорости U_1 (*а*), энергии турбулентности e (*б*), скорости диссипации ε (*в*) и касательного турбулентного напряжения $\langle u'v' \rangle$ (*г*) при различных значениях расстояния x/D:

1 — $x/D = 800$, *2* — $x/D = 1200$, *3* — $x/D = 1600$; штриховые линии — модель 1, сплошные — модель 2

x/D приведены на рис. 1,*в*,*г*. В соответствии с условиями теоремы эмпирические постоянные в моделях полагались равными $C_\varepsilon = C_s = 0{,}22$, $C_{\varepsilon_1} = 1{,}0$, $C_{\varepsilon_2} = 1{,}92$, $C_\mu = 0{,}147$, $C_{\phi_1} = 2{,}2$. Результаты расчетов по моделям 1, 2 близки, что соответствует теореме.

В доказательстве теоремы используется представление (14) для масштаба времени $\tau = e/\varepsilon = \tau_h(x)$. Это условие для выполненных численных экспериментов показано на рис. 2. Видно, что при достаточно больших значениях x величина τ выходит на соответствующую асимптотику. Это согласуется с данными, приведенными в таблице. Анализ результатов расчетов позволяет сделать вывод о независимости величины τ от радиальной переменной.

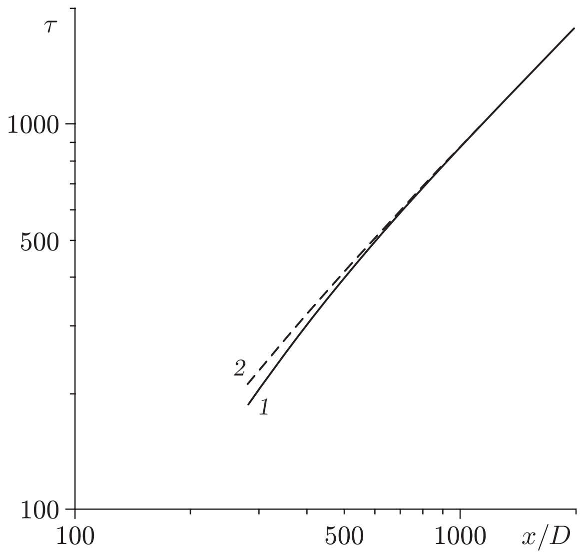

Рис. 2. Зависимость временного масштаба $\tau = e/\varepsilon$ от расстояния от тела:
1 — $e(x,0)U_0/\varepsilon(x,0)D$, *2* — $0{,}92(x/D - 50)$

Заключение. В работе при исследовании дальнего турбулентного следа за удлиненным телом вращения рассмотрена трехпараметрическая математическая модель, включающая дифференциальное уравнение переноса касательного турбулентного напряжения $\langle u'v' \rangle$. Показано, что известное соотношение Колмогорова — Прандтля, являющееся следствием алгебраического локально-равновесного усечения этого уравнения, при определенном ограничении на значения эмпирических постоянных есть дифференциальная связь модели 1. Представлены результаты численных экспериментов, подтверждающих реализуемость алгебраической параметризации касательного турбулентного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гиневский А. С.** Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969.
2. **Rodi W.** The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence: Ph. D. Diss. L., 1972.
3. **Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М.** О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 4. С. 804–807.
4. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй / Г. Н. Абрамович, Т. А. Гиршович, С. Ю. Крашенинников, А. Н. Секундов, И. П. Смирнова. М.: Наука, 1984.
5. **Федорова Н. Н., Черных Г. Г.** О численном моделировании осесимметричных турбулентных следов // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 3. С. 141–159.
6. **Козлов В. Е.** Автомодельные решения для турбулентного осесимметричного следа // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 16–20.
7. **Piquet J.** Turbulent flows. Models and physics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
8. **Капцов О. В., Ефремов И. А., Шмидт А. В.** Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 74–78.
9. **Redford J. A., Castro I. P., Coleman G. N.** On the universality of turbulent axisymmetric wakes // J. Fluid Mech. 2012. V. 710. P. 419–452.

10. **Деменков А. Г., Дружинин О. А., Черных Г. Г.** Численные модели дальнего турбулентного следа за удлиненным телом вращения // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 967–970.
11. **Rodi W.** Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review. Karlsruhe: Univ. of Karlsruhe, 1980.
12. **Сидоров А. Ф.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
13. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
14. **Гребенев В. Н., Деменков А. Г., Черных Г. Г.** Анализ локально-равновесного приближения в задаче о дальнем плоском турбулентном следе // Докл. АН. 2002. Т. 385, № 1. С. 57–60.
15. **Grebenev V. N., Demenkov A. G., Chernykh G. G., Grichkov A. N.** Local equilibrium approximation in free turbulent flows: verification through the method of differential constrains // Z. angew. Math. Mech. 2021. Bd 117, N 9. e202000095.
16. **Гребенев В. Н., Деменков А. Г., Черных Г. Г.** Метод дифференциальных связей: локально-равновесное приближение в безымпульсном плоском турбулентном следе // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 3. С. 38–47.
17. **Hanjalic K., Launder B. E.** A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 609–638.
18. **Lewellen W.** Handbook of turbulence. N. Y.: Plenum, 1977. (Fundamental and applications; V. 1).

Поступила в редакцию 9/II 2022 г.,
после доработки — 9/II 2022 г.
Принята к публикации 25/IV 2022 г.