

УДК 519.63:517.958

Численное моделирование фильтрации флюида в анизотропной трещиновато-пористой среде*

П.Н. Вабищевич, А.В. Григорьев

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, 58, Якутск, Республика Саха (Якутия), Россия, 677000

E-mails: vabishchevich@gmail.com (Вабищевич П.Н.), re5itsme@gmail.com (Григорьев А.В.)

Вабищевич П.Н., Григорьев А.В. Численное моделирование фильтрации флюида в анизотропной трещиновато-пористой среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 61–74.

Рассматривается модель двойной пористости для случая анизотропной трещиновато-пористой среды (Dmitriev, Maksimov; 2007). Интерес представляет функция обменного перетока между трещинами и пористыми блоками, которая зависит от направления перетока. Функция перетока основывается на разности градиентов давлений. Данная особенность функции перетока позволяет учитывать анизотропные свойства фильтрации в более общем виде. Представлены результаты численного решения модельной двумерной задачи. Вычислительный алгоритм базируется на конечно-элементной аппроксимации по пространству и использованию явно-неявных аппроксимаций по времени.

DOI: 10.15372/SJNM20160105

Ключевые слова: модель двойной пористости, анизотропная фильтрация, трещиновато-пористые среды, градиентная функция перетока.

Vabishchevich P.N., Grigoriev A.V. Numerical modeling of a fluid flow in anisotropic fractured porous media // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 61–74.

A model of double porosity in the case of an anisotropic fractured porous medium is considered (Dmitriev, Maksimov; 2007). The function of the exchange flow between fractures and porous blocks, which depends on the direction of a flow, is investigated. The flow function is based on the difference between pressure gradients. This feature enables one to take into account anisotropic filtering properties in a more general form. The results of the numerical solution of the model two-dimensional problem are presented. The computational algorithm is based on the finite element spatial approximation and the explicit-implicit temporal approximation.

Keywords: double porosity model, anisotropic filtration, fractured porous media, gradient flow function.

Основная часть нефтеносных пластов в мире представляют собой карбонатные резервуары. Трещиновато-пористая среда рассматривается как система поровых блоков, разделенная системой трещин. Флюид насыщает как поровые блоки, так и трещины. Линейные размеры раскрытости трещин значительно превышают характерные размеры пор в блоках. Таким образом, проницаемость трещин значительно превышает проницаемость поровых блоков. С другой стороны, объем пустотного пространства, соответствующий трещинам, значительно меньше объема, соответствующего поровым блокам. Поэтому коэффициент емкости среды (пористости), соответствующий трещинам, значительно ниже, чем коэффициент емкости среды, соответствующей поровым блокам. Основные запасы флюида хранятся в поровых блоках, трещины, в свою очередь, отвечают за перенос данных запасов. Описанные свойства структуры пустотного пространства трещиновато-пористой среды часто называют средой с двойной пористостью, которая

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 15-11-10024).

отражена в работах [1, 2]. Заметим, что за механизм перетока между трещинами и пористыми блоками отвечает разность давлений. В классической модели двойной пористости система трещин предполагается изотропной, хотя на практике хорошо известно, что трещиноватые резервуары отличаются анизотропной структурой. Данный факт отражен в таких работах как [3–5].

Исследования основаны на модели двойной пористости для случая анизотропной трещиновато-пористой среды, предложенной в работе [6]. Основная особенность учитывается заданием зависящей от направления перетока функцией обменного перетока между трещинами и пористыми блоками. Формулируется модельная двумерная нестационарная краевая задача для системы двух параболических уравнений, которые описывают давление в порах и трещинах. Уравнения завязаны друг с другом нелинейной функцией перетока. Численное решение задачи базируется на конечно-элементной аппроксимации по пространству. Для аппроксимации по времени используются явно-неявные аппроксимации, когда с нижнего временного слоя берутся функции перетока. Представлены результаты расчетов, которые иллюстрируют возможности предложенного алгоритма и влияние основных параметров пористой среды на фильтрацию жидкости в порах и трещинах.

1. Фильтрация на основе модели двойной пористости

С целью описания фильтрации флюида в трещиновато-пористой среде Баренблатт, Желтов, Кочина [1] разработали модель, которая отражает связь между фильтрационными потоками в трещинах и поровых блоках. Математическую модель, называемую моделью двойной пористости, в тензорной формулировке можно записать в следующем виде:

$$w_i^\alpha = -\frac{k_{ij}^\alpha}{\mu} \nabla_j p^\alpha, \quad (1)$$

$$\frac{\partial m^\alpha \rho}{\partial t} + \nabla_j \rho w_j^\alpha = q^\alpha, \quad (2)$$

$$q^\alpha = q^\alpha(p^\alpha, \rho, \mu), \quad \rho^\alpha = \rho(p^\alpha), \quad m^\alpha = m(p^\alpha), \quad \alpha = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь w_i^α — компоненты векторов скорости фильтрации, k_{ij}^α — компоненты тензоров проницаемости, m^α — пористости, ρ — плотность флюида, μ — вязкость флюида, q^α — обменный переток между трещинами и поровыми блоками (индекс α равен 1 и 2 соответственно), такой что $q_1 = -q_2 = q$. Уравнения (1) описывают закон Дарси, уравнения (2) есть уравнения непрерывности, соотношения (3) задают функцию перетока и уравнения состояния.

Классическая модель [1] рассматривает случай изотропного пространства поровых блоков и трещин. Тем не менее, исследования газоносных и нефтеносных пластов показали, что трещиноватая среда обладает значительной анизотропией. В большинстве случаев анизотропные свойства трещиноватой и пористой сред могут быть описаны введением тензора проницаемости в закон Дарси. С другой стороны, очевидно, что переток между трещинами и поровыми блоками в условиях анизотропии сред должен зависеть от направления перетока. По этой причине скалярная функция количества потока q^α должна быть функцией векторного аргумента. Данная ситуация подробно исследуется в [7].

Рассмотрим задание направленной проницаемости, которая является скалярной функцией, определенной как $k(n_i) = k_{ij}n_i n_j$ (зависит от векторного аргумента n_i). Желаемое соотношение следует из закона Дарси:

$$Q^\alpha = w_i^\alpha n_i^\alpha = -\frac{k_{ij}^\alpha n_i^\alpha n_j^\alpha}{\mu} |\nabla_j p^\alpha|.$$

Здесь Q^α — проекция вектора скорости на ось градиента давления, $|\nabla_j p^\alpha|$ — модуль градиента давления, $\nabla_j p^\alpha = |\nabla_j p^\alpha| n_j^\alpha$. Тогда направленная проницаемость определяется следующим образом:

$$k^\alpha(n_i) = k_{ij}^\alpha n_i^\alpha n_j^\alpha = -\frac{\mu w_i^\alpha n_i^\alpha}{|\nabla_j p^\alpha|}.$$

Следуя аналогичным соображениям, можно построить функцию перетока.

2. Функция перетока в анизотропной среде с двойной пористостью

Предполагая, что функция перетока аналогична потоку w_i^α в законе Дарси, и умножая (скалярно) данный поток на величину $\rho S n_i$ (где S — поверхность, через которую флюид перетекает из поровых блоков в трещины), мы получим

$$\tilde{q}^\alpha = \rho S n_i w_i^\alpha = -\rho S n_i \frac{k_{ij}^2}{\mu} \nabla_j p^\alpha. \quad (4)$$

Отметим, что за переток из поровых блоков в трещины и наоборот отвечает меньшая проницаемость k_{ij}^2 , что отражено в выражении (4). В оригинальной модели [1, 8] движущей силой перетока между трещинами и поровыми блоками служит разность давления трещин и поровых блоков. Определение функции перетока для анизотропных сред [6] требует введения градиента разности давлений

$$\tilde{q}^1 - \tilde{q}^2 = \rho S n_i \frac{k_{ij}^2}{\mu} \nabla_j p^2 - \rho S n_i \frac{k_{ij}^2}{\mu} \nabla_j p^1. \quad (5)$$

Основываясь на (5), запишем следующее выражение, верное для единичной площади:

$$q = \frac{\rho}{\mu} n_i q_{ij} \nabla_j (p^2 - p^1), \quad (6)$$

где q_{ij} — тензор, составленный из коэффициентов, определяющих функцию перетока ($q = (\tilde{q}^1 - \tilde{q}^2)/S$). Формулу (6) можно записать в виде

$$q = \frac{\rho}{\mu} q_{ij} n_i n_j |\nabla_j (p^2 - p^1)|,$$

где $|\nabla_j (p^2 - p^1)|$ — модуль градиента разности давлений между поровыми блоками и трещинами.

3. Модельная задача

Начнем рассмотрение с простого случая анизотропной двухмерной модели двойной пористости с функцией перетока типа (6). Запишем систему уравнений модели двойной пористости в безразмерном виде:

$$c \frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div} K_1 \operatorname{grad} u_1 + r |K \operatorname{grad}(u_2 - u_1)| = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div} K_2 \operatorname{grad} u_2 - r |K \operatorname{grad}(u_2 - u_1)| = 0. \quad (8)$$

Здесь K — тензор второго порядка, выражаемый через матрицу 2×2 , K_α — тензор проницаемости, задающий проницаемости в трещинах и в поровых блоках соответственно:

$$K_1 = K, \quad K_2 = dK. \quad (9)$$

Рассмотрим двумерную задачу в области Ω , которая отображена на рис. 1. Выбор подобной геометрии области Ω основывается на необходимости наглядно продемонстрировать влияние анизотропии на результаты расчетов. Наличие *ступеньки* на левой границе области, в отличие от обычной прямоугольной геометрии, позволяет визуально отличить один вид анизотропии от другого. В данном случае ($\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_N = \Gamma_2 \cup \Gamma_4$) граничные условия берутся в виде:

$$u_\alpha(\mathbf{x}, t) = 1 - \exp(-\delta t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad u_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3; \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4; \quad t \in (0, T], \quad (11)$$

где $\mathbf{v}_\alpha = K_\alpha \operatorname{grad} u_\alpha$. Начальное состояние определяется условиями:

$$u_\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \alpha = 1, 2. \quad (12)$$

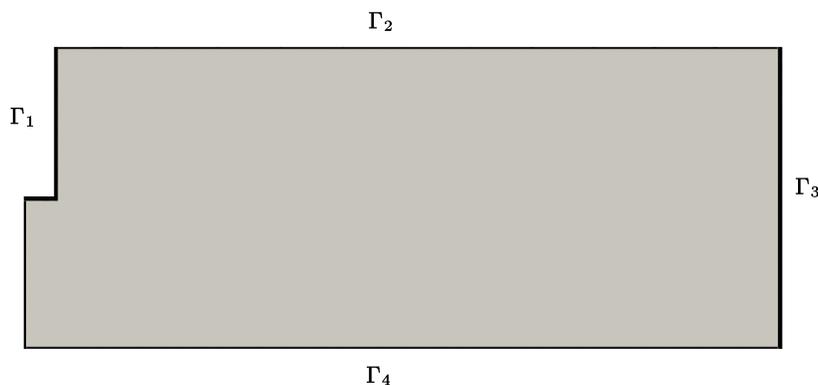


Рис. 1. Область Ω

Из постановки задачи (7)–(12) следует, что на части границы Γ_1 повышается давление от 0 до 1. Динамика подъема давления зависит от параметра δ . Такое задание граничных условий на части границы Γ_1 моделирует условия на нагнетающей скважине.

Следуя основной тенденции, отслеживаемой в моделях двойной пористости, будем считать, что основные фильтрационные потоки идут по трещинам, а основные запасы флюида находятся в пористых блоках. Тем самым будем рассматривать тип трещиноватости, при котором линейные размеры раскрытости трещин значительно превосходят характерные размеры диаметров пор (параметр $d = 0.01$), а объем пустотного пространства, приходящийся на трещины, значительно меньше объема, приходящегося на поровые блоки (параметр $c = 0.01$). Для модельной задачи рассматриваются 3 основных представления тензора K .

1. Для изотропной фильтрации

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

2. При преобладании проницаемости по одной из координат

$$K = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

3. При преобладании фильтрации по диагонали

$$K = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

4. Вычислительный алгоритм

Численное решение поставленной модельной задачи основывается на методе конечных элементов [9, 10]. В частности, программы написаны на языке Python с использованием конечно-элементной библиотеки FEniCS [11, 12]. Для приближенного решения нестационарной задачи фильтрации введем равномерную, для простоты, сетку по времени с шагом τ :

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau N = T\}$$

и обозначим $y^n = y(t^n)$, $t^n = n\tau$. По пространству используем конечно-элементную аппроксимацию, состоящую из стандартных лагранжевых конечных элементов второй степени. В области Ω проводится триангуляция (с использованием пакета METIS), на этой расчетной сетке определим конечномерное пространство конечных элементов $V \subset H^1(\Omega)$. Здесь $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций v таких, что v^2 и $|\nabla v|^2$ имеют конечный интеграл в Ω и $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_D\}$. Используемая расчетная сетка сгущена к участкам с наибольшими градиентами решения.

Будем рассматривать следующую схему по времени:

$$c \frac{y_1^{k+1} - y_1^k}{\tau} - \operatorname{div} K \operatorname{grad} y_1^{k+1} + r |K \operatorname{grad}(y_2^k - y_1^k)| = 0, \quad (16)$$

$$\frac{y_2^{k+1} - y_2^k}{\tau} - d \operatorname{div} K \operatorname{grad} y_2^{k+1} - r |K \operatorname{grad}(y_2^k - y_1^k)| = 0. \quad (17)$$

Тем самым мы используем явно-неявные аппроксимации по времени: с нижнего временного слоя берутся нелинейные обменные члены.

Далее необходимо представить задачу (16), (17) в вариационном виде. Домножим каждое уравнение на соответствующую пробную функцию и проинтегрируем по области Ω , при интегрировании применим формулу интегрирования по частям. Тем самым мы получим вариационную формулировку поставленной задачи

$$c \int_{\Omega} \frac{y_1^{k+1} - y_1^k}{\tau} v_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} K \operatorname{grad} y_1^{k+1} \operatorname{grad} v_1 \, d\mathbf{x} + r \int_{\Omega} |K \operatorname{grad}(y_2^k - y_1^k)| v_1 \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\Omega} \frac{y_2^{k+1} - y_2^k}{\tau} v_2 \, d\mathbf{x} + d \int_{\Omega} K \operatorname{grad} y_2^{k+1} \operatorname{grad} v_2 \, d\mathbf{x} - r \int_{\Omega} |K \operatorname{grad}(y_2^k - y_1^k)| v_2 \, d\mathbf{x} = 0$$

с учетом граничных условий на Γ_D . Далее производим ансамблирование глобальной матрицы конечных элементов и вектора решений. В результате получаем СЛАУ, которое решается (итерационным) методом обобщенных минимальных невязок GMRES, который сходится за конечное число итераций.

5. Результаты расчетов

Приведем результаты численных расчетов, которые выполнены на достаточно подробных сетках (1294 элемента, 5068 элементов, 19664 элемента, 77870 элементов). Наиболее грубая расчетная сетка показана на рис. 2.

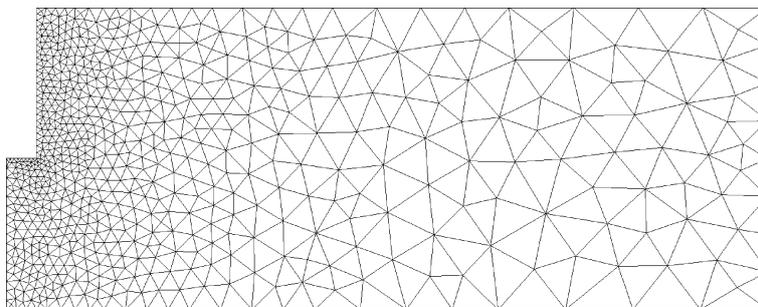


Рис. 2. Расчетная сетка 1: 700 узлов, 1294 элемента

Для данной задачи определим эталонное решение $\bar{y}^k(\mathbf{x})$, которое будет представлять собой численное решение на наиболее подробной сетке (77870 элементов, $\tau = 10^{-3}$). Контроль численного решения будем проводить путем сравнения с этим эталонным решением. Моделирование проводилось при значениях параметров: $c = 0.01$, $d = 0.01$, $r = 1.0$, $\delta = 10.0$. На рис. 3–6 показаны зависимости от времени погрешности в нормах $L_2(\Omega)$, $C(\Omega)$ в сравнении с эталонным решением.

Также в таблице отображены шаги по времени, необходимые для достижения погрешности $\varepsilon = 0.01$ (на конечный момент времени) при различных сетках и значений параметра r , где

$$\varepsilon = \|\bar{y}^k - y^k\|_{L_2(\Omega)}.$$

При использовании явно-неявной схемы есть ограничения на выбор шага по времени.

Таблица. Шаг по времени для разных значений параметра r и разных сеток

Сетка	$r = 0.1$	$r = 0.5$	$r = 1$
1 (1294 элемента)	0.148	0.041	0.022
2 (5068 элементов)	0.143	0.041	0.022
3 (19664 элемента)	0.142	0.041	0.022

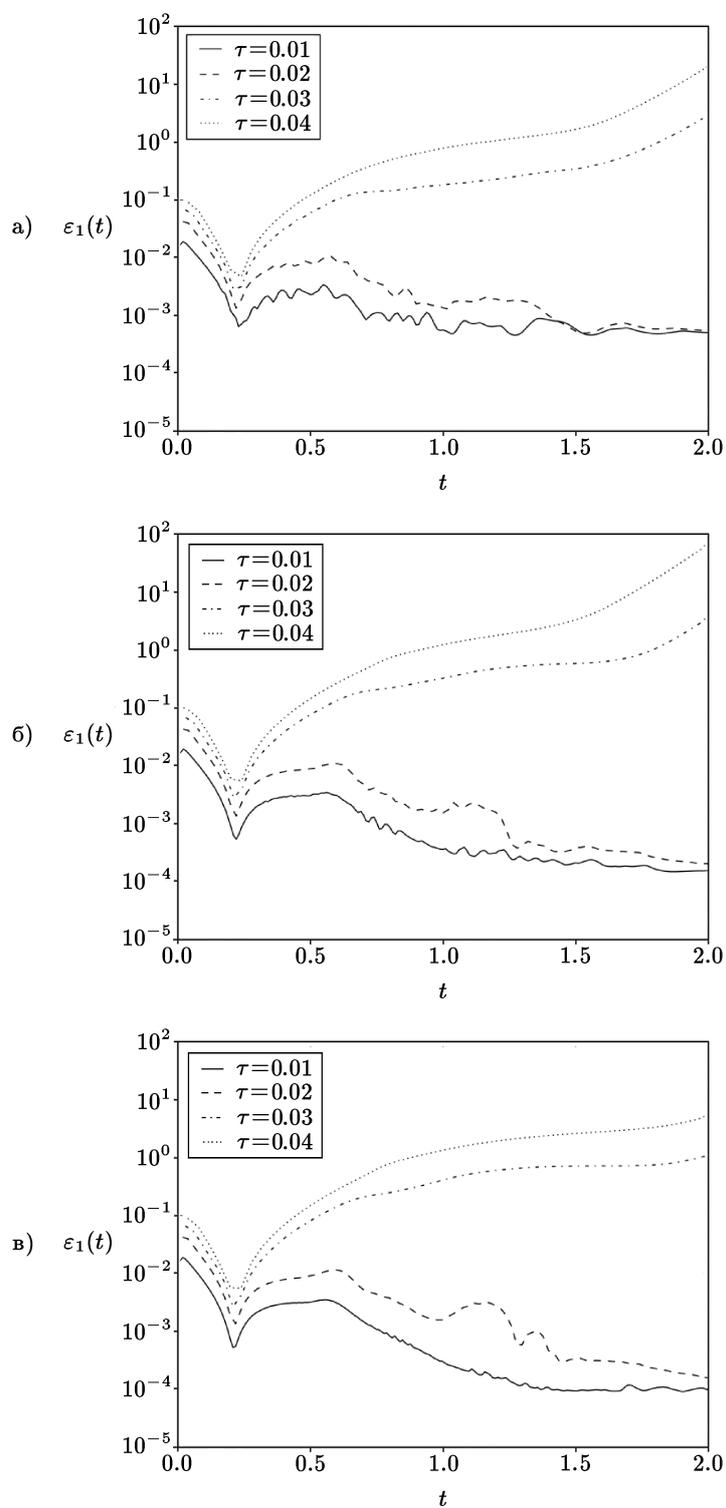


Рис. 3. Норма $L_2(\Omega)$ погрешности решения u_1 на: а) — грубой сетке (1294 элемента); б) — средней сетке (5068 элементов); в) — мелкой сетке (19664 элемента)

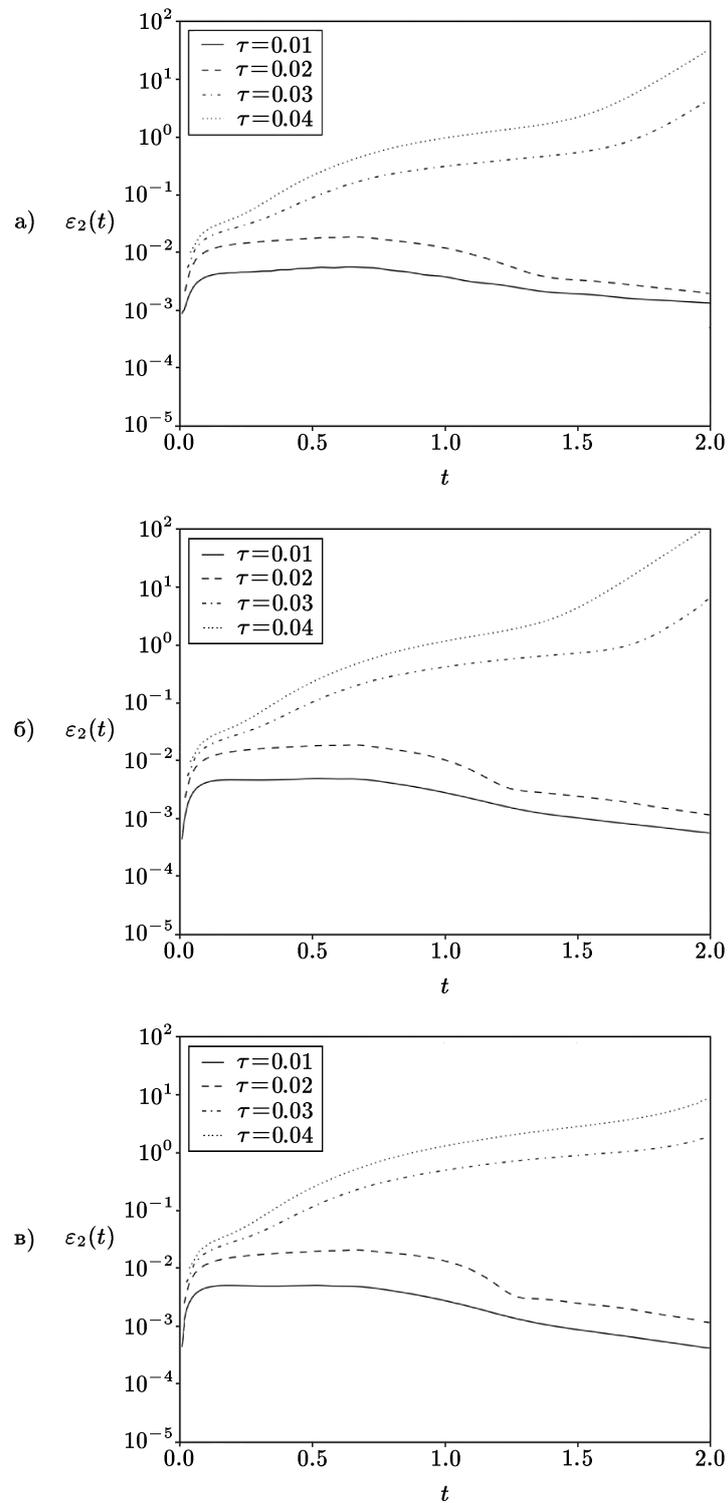


Рис. 4. Норма $L_2(\Omega)$ погрешности решения u_2 на: а) — грубой сетке (1294 элемента); б) — средней сетке (5068 элементов); в) — мелкой сетке (19664 элемента)

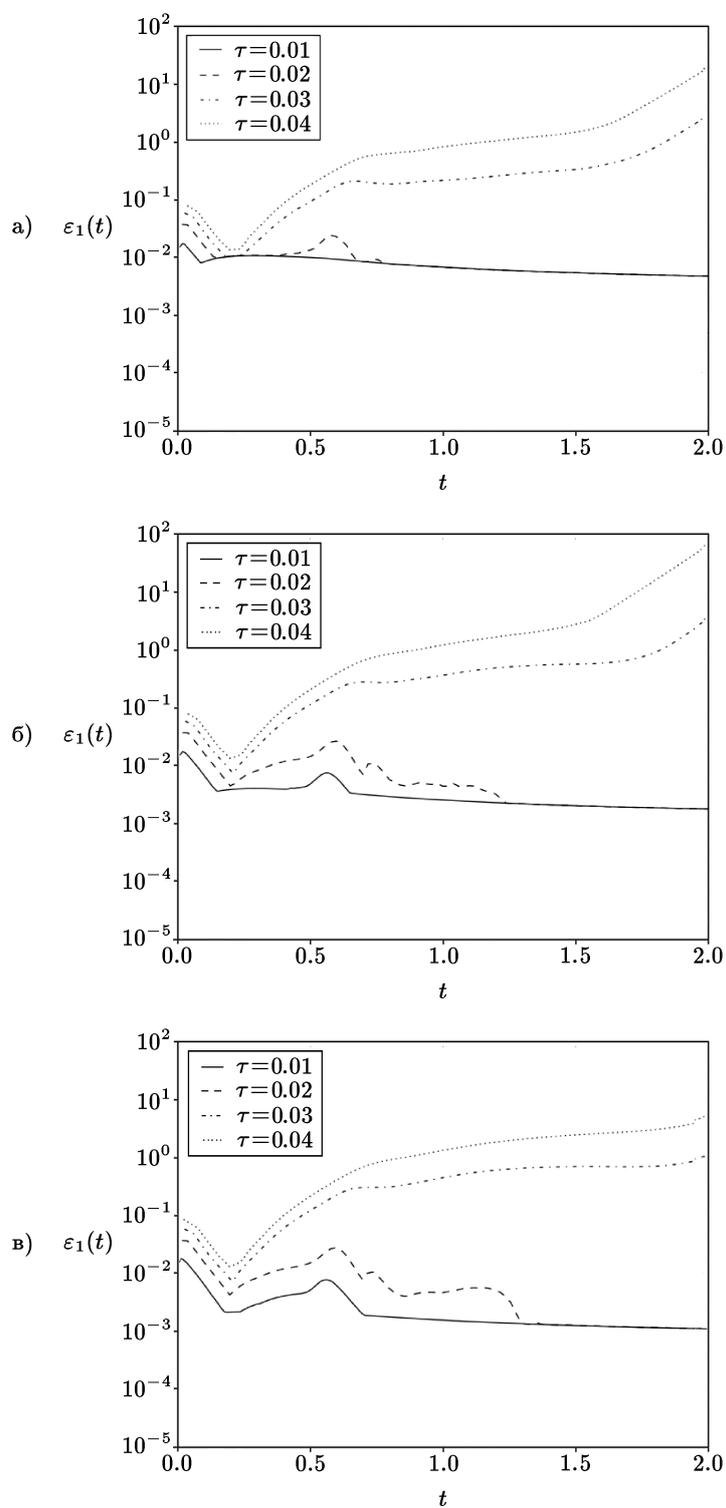


Рис. 5. Норма $C(\Omega)$ погрешности решения u_1 на: а) — грубой сетке (1294 элемента); б) — средней сетке (5068 элементов); в) — мелкой сетке (19664 элемента)

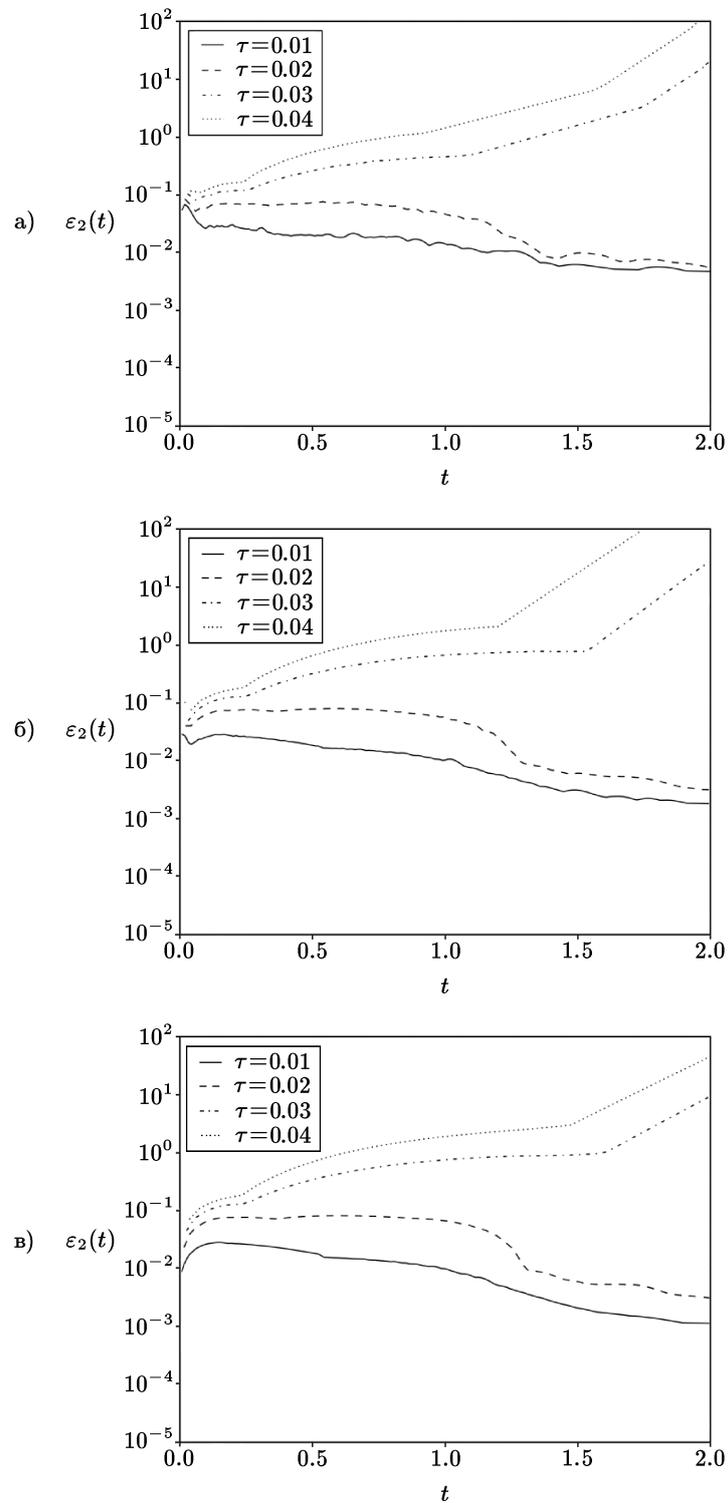


Рис. 6. Норма $C(\Omega)$ погрешности решения u_2 на: а) — грубой сетке (1294 элемента); б) — средней сетке (5068 элементов); в) — мелкой сетке (19664 элемента)

Исходя из полученных результатов расчетов, можно сделать следующие выводы:

- используемая модель двойной пористости позволяет учитывать анизотропные свойства обеих сред, а также обменного перетока;
- наблюдается сходимость численного решения к эталонному при достаточно малых значениях шага по времени;
- давление в трещинах (u_1) быстрее устанавливается, нежели давление в порах (u_2);
- погрешность почти не зависит от используемых пространственных сеток;
- наблюдается обратная пропорциональность максимального шага по времени от параметра перетока r .

Результаты расчетов, которые приведены ниже, получены на сетке, представленной на рис. 2. Моделирование проводилось при значении параметра $r = 1$. Распределения давлений в трещинах и порах отображены на рис. 7–9.

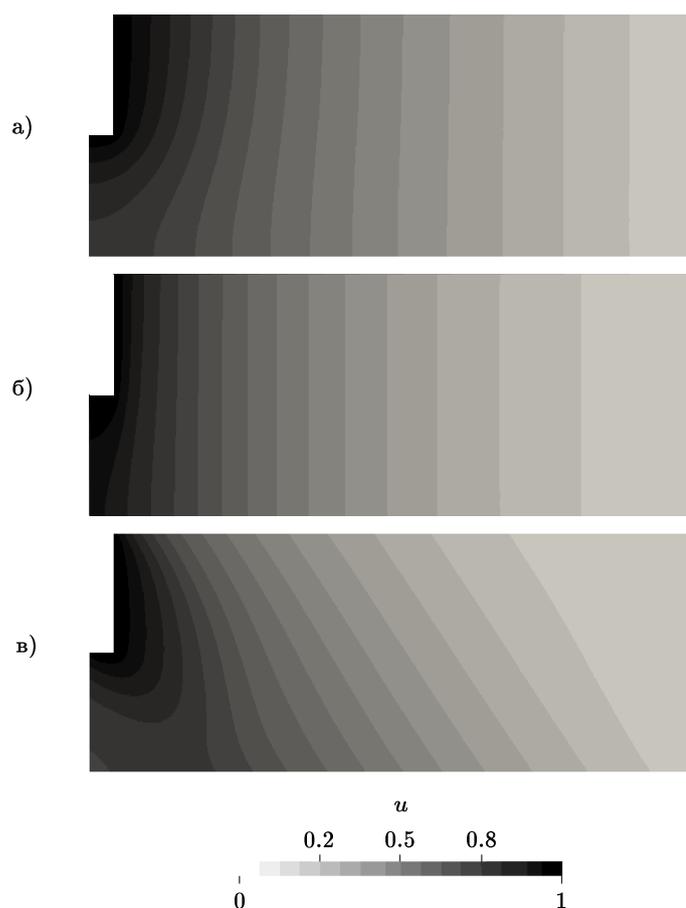


Рис. 7. Распределение давления в трещинах u_1 в момент времени $t = 1$: а) тензор K берется в виде (13); б) тензор K берется в виде (14); в) тензор K берется в виде (15)

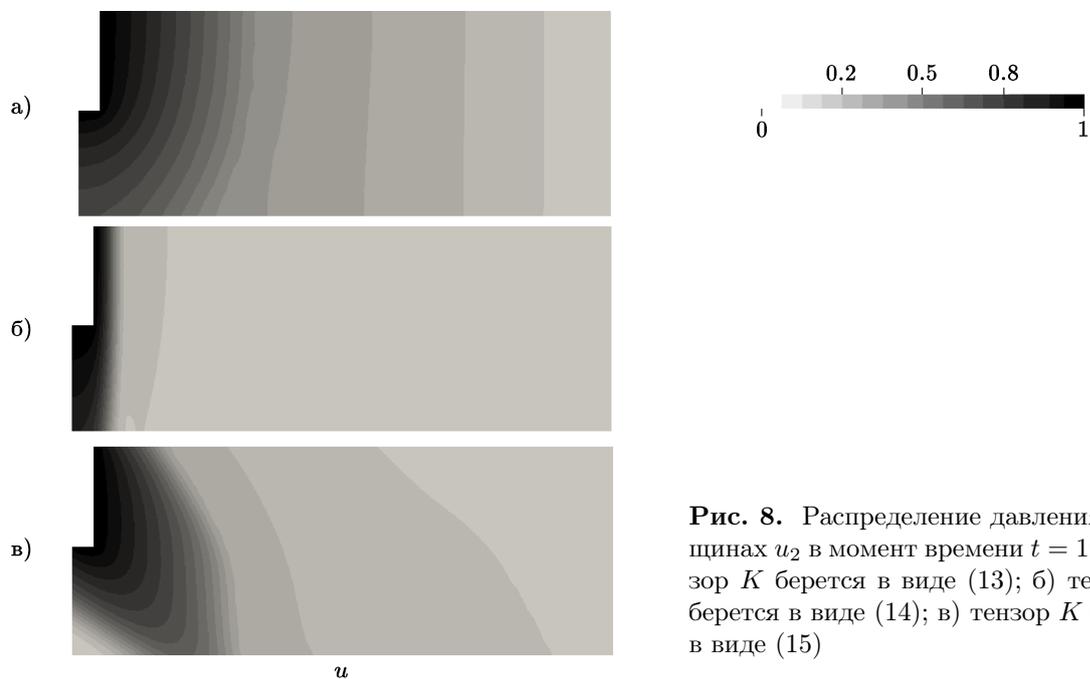


Рис. 8. Распределение давления в трещинах u_2 в момент времени $t = 1$: а) тензор K берется в виде (13); б) тензор K берется в виде (14); в) тензор K берется в виде (15)

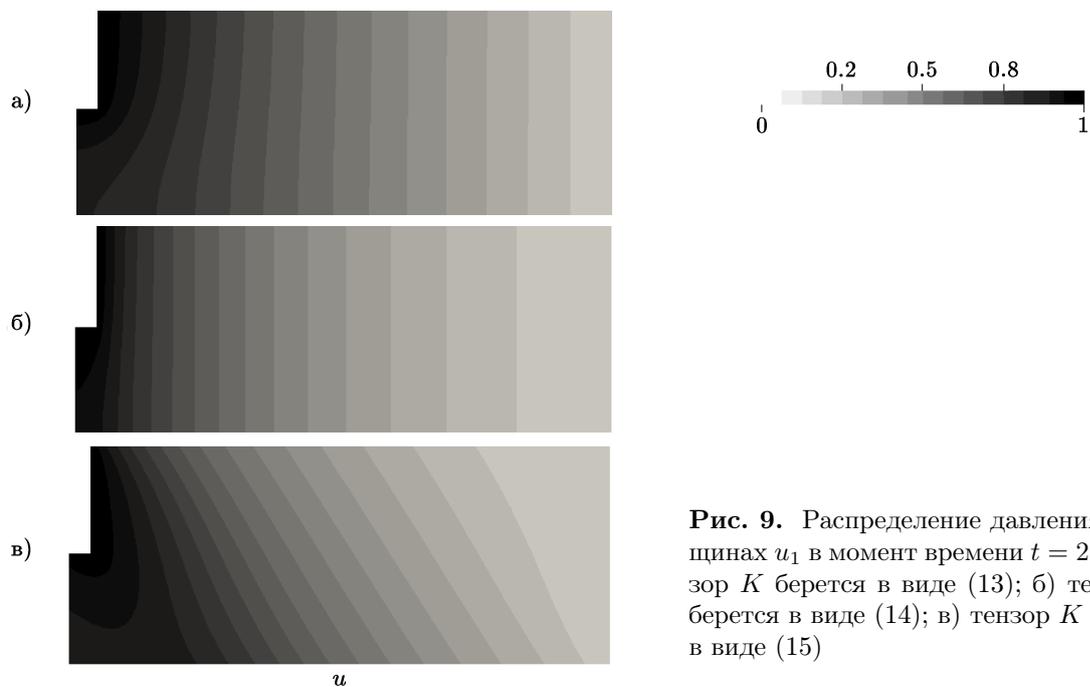


Рис. 9. Распределение давления в трещинах u_1 в момент времени $t = 2$: а) тензор K берется в виде (13); б) тензор K берется в виде (14); в) тензор K берется в виде (15)

Литература

1. **Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.** Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, вып. 5. — С. 852–864.
2. **Maryška J., Severýn O., Tauchman M., and Tondr D.** Modelling of processes in fractured rock using FEM/FVM on multidimensional domains // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 215, № 2. — P. 495–502.
3. **Loret B., Rizzi E.** Strain localization in fluid-saturated anisotropic elastic–plastic porous media with double porosity // J. of the Mechanics and Physics of Solids. — 1999. — Vol. 47, № 3. — P. 503–530.
4. **Bera P., Khalili A.** Double-diffusive natural convection in an anisotropic porous cavity with opposing buoyancy forces: multi-solutions and oscillations // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 2002. — Vol. 45, № 15. — P. 3205–3222.
5. **Schoenberg M., Sayers C.M.** Seismic anisotropy of fractured rock // Geophysics. — 1995. — Vol. 60, № 1. — P. 204–211.
6. **Dmitriev N.M., Maksimov V.M.** Models of flow through fractured-porous anisotropic media // Fluid Dynamics. — 2007. — Vol. 42, № 6. — P. 937–942.
7. **Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Максимов В.М.** Подземная гидромеханика. — М.: Недра, 1993.
8. **Barenblatt G.I., Entov V.M., and Ryzhik V.M.** Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. — Springer, 2010.
9. **Quarteroni A., Valli A.** Numerical Approximation of Partial Differential Equations. — Springer, 2008.
10. **Brenner S.C., Scott L.R.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods. — Springer, 2008.
11. **Dupont T., Hoffman J., Johnson C. et al.** The FEniCS Project. — Göteborg, Sweden: Chalmers Finite Element Centre, Chalmers University of Technology, 2003. — (Technical Report 2003-21).
12. **Langtangen H.P.** A FEniCS tutorial // Automated solution of differential equations by the finite element method. — Springer, 2012. — P. 1–73.

*Поступила в редакцию 24 ноября 2014 г.,
в окончательном варианте 25 мая 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Barenblatt G.I., Zheltov YU.P., Kochina I.N.** Ob osnovnykh predstavleniyakh teorii fil'tratsii odnorodnykh zhidkostey v treshchinovatykh porodakh // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1960. — Т. 24, вып. 5. — С. 852–864.
2. **Maryška J., Severýn O., Tauchman M., and Tondr D.** Modelling of processes in fractured rock using FEM/FVM on multidimensional domains // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 215, № 2. — P. 495–502.
3. **Loret B., Rizzi E.** Strain localization in fluid-saturated anisotropic elastic–plastic porous media with double porosity // J. of the Mechanics and Physics of Solids. — 1999. — Vol. 47, № 3. — P. 503–530.
4. **Bera P., Khalili A.** Double-diffusive natural convection in an anisotropic porous cavity with opposing buoyancy forces: multi-solutions and oscillations // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 2002. — Vol. 45, № 15. — P. 3205–3222.

5. **Schoenberg M., Sayers C.M.** Seismic anisotropy of fractured rock // *Geophysics*. — 1995. — Vol. 60, № 1. — P. 204–211.
6. **Dmitriev N.M., Maksimov V.M.** Models of flow through fractured-porous anisotropic media // *Fluid Dynamics*. — 2007. — Vol. 42, № 6. — P. 937–942.
7. **Basniev K.S., Dmitriev N.M., Maksimov V.M.** *Podzemnaya gidromekhanika*. — M.: Nedra, 1993.
8. **Barenblatt G.I., Entov V.M., and Ryzhik V.M.** *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. — Springer, 2010.
9. **Quarteroni A., Valli A.** *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. — Springer, 2008.
10. **Brenner S.C., Scott L.R.** *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. — Springer, 2008.
11. **Dupont T., Hoffman J., Johnson C. et al.** *The FEniCS Project*. — Göteborg, Sweden: Chalmers Finite Element Centre, Chalmers University of Technology, 2003. — (Technical Report 2003-21).
12. **Langtangen H.P.** *A FEniCS tutorial // Automated solution of differential equations by the finite element method*. — Springer, 2012. — P. 1–73.