

УДК 539.374; 538.951

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

В. М. Грешнов

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа
E-mail: Greshnov_VM@list.ru

Рассмотрены скалярные и тензорные модели пластического течения металлических материалов в широком диапазоне температур и скоростей деформаций, являющиеся развитием теории пластичности. Вывод уравнений осуществлен в рамках физико-феноменологического подхода на основе современных положений и методов физики и механики пластической деформации. Для упрочняющегося и вязкопластического тел получена новая математическая формулировка краевой задачи теории пластичности, учитывающая историю нагружения. Приведены результаты апробации модели. Описан численный алгоритм решения прикладных задач с использованием метода конечных элементов.

Ключевые слова: пластическая деформация, теория пластичности, история нагружения, физико-феноменологический подход, упрочняющееся тело, вязкопластичность.

Введение. В теории обработки металлов давлением (ОМД) механико-математические модели, основанные на математической теории пластичности, в отличие от физических моделей, разработаны наиболее полно [1]. В настоящее время с использованием этих моделей проводятся все расчеты и исследования технологических операций ОМД. Однако все более очевидным становится отставание теории от требований практики (современной технологии) [2, 3].

Одной из эффективных технологий ОМД является многопереходная холодная объемная штамповка, которая находит все более широкое применение. Технология холодной объемной штамповки развивается на основе производственного опыта, так как в рамках инженерных расчетов теория пластичности не позволяет учитывать деформационную анизотропию свойств обрабатываемого материала и соответственно сложное нагружение.

Исследование процессов, происходящих при горячей объемной штамповке, являющейся наиболее распространенным видом ОМД, проводится с целью повышения точности штамповки заготовок, снижения материал- и энергоемкости, получения возможности обработки новых высоколегированных и труднодеформируемых сплавов со специальными функциональными свойствами. Математическая теория пластичности обеспечивает лишь приближенный расчет напряженно-деформированного состояния заготовки при горячей объемной штамповке, поскольку не позволяет учитывать историю нагружения, обусловленную зависимостями деформации, скорости деформации и температуры от времени. Это вызвано тем, что поведение вязкоупругого вязкопластического тела не описывается в рамках феноменологической теории пластичности [1, 4].

Изотермическая штамповка при различных условиях, в том числе при условиях сверхпластичности обрабатываемого материала, постепенно находит технологическое применение. Однако расчеты и исследования этих технологических процессов на основе классической теории пластичности вызывают затруднения, поскольку в условиях сверхпластической деформации в оптимальном диапазоне скоростей материалы имеют так называемую

падающую диаграмму деформирования. Такую диаграмму имеют многие высоколегированные сплавы, подвергнутые горячей деформации. К этим материалам неприменим постулат Драккера, из которого следуют принципы максимума, лежащие в основе теории пластичности [4].

Решение указанных проблем в рамках феноменологического подхода вызывает значительные затруднения.

В последние десятилетия интенсивно развивается физика прочности и пластичности, на которой базируется физическое направление в теории ОМД [5]. Одним из направлений дальнейшего развития теории пластичности и соответственно теории ОМД является синтез идей механики и физики пластической деформации как двух фундаментальных дисциплин, имеющих единый объект исследования — пластическую деформацию и разрушение материалов. В этом направлении в последние годы выделились два подхода.

Первый подход, развивающийся с конца 40-х гг. XX в. [6], в результате пересмотра основ математической теории пластичности с учетом современных достижений физики прочности и пластичности привел к созданию нового варианта теории пластичности — теории скольжения [2, 7]. Теория скольжения постоянно совершенствуется [3], но пока не нашла применения в расчетах процессов пластического формообразования металлов. По-видимому, этот подход лежит в основе развиваемых в настоящее время вариантов моделей упругопластического деформирования металлов [8, 9]: геометрической модели дефектной структуры упругопластической сплошной среды, калибровочной теории дефектов и обобщенно-термодинамической модели.

Второй подход основан на синтезе методов и основных положений математической теории пластичности и физики прочности и пластичности. Очевидно, этот подход аналогичен синтезу феноменологической термодинамики и молекулярно-кинетической теории в статистическую термодинамику [10]. В рамках данного подхода физика пластической деформации должна давать основание для вывода законов деформирования металлов при различных структурных состояниях и термомеханических условиях для одноосного напряженного состояния. Поскольку этот подход является физическим и, следовательно, раскрывает механизмы процессов, протекающих при деформации, его использование позволяет обосновывать выбор определяющих параметров и вида функции нагружения (условия пластичности), формулировку соответствующего принципа максимума, ассоциированного закона течения и определяющих соотношений. В математической теории пластичности эти проблемы решаются путем принятия некоторой гипотезы о пластическом поведении материала. Этим объясняется трудность решения перечисленных выше проблем.

Настоящая работа посвящена обобщению и развитию основных теоретических результатов, полученных в рамках второго подхода. Решения некоторых практических задач на основе предлагаемой теории приведены в [11, 12].

1. Скалярные модели пластической деформации (одноосное напряженное состояние). С термодинамической точки зрения пластическая деформация представляет собой неравновесный процесс, поэтому ее теоретическое описание в рамках микроструктурного подхода возможно с использованием методов кинетики [10].

В работах [13, 14] на основе современных представлений физики прочности и пластичности о термоактивируемых микромеханизмах пластической деформации, упрочнения и разупрочнения с помощью метода кинетических уравнений баланса плотностей дислокаций получен скалярный закон течения металлических материалов (при этом упругие деформации не учитываются):

$$\sigma_{(g)} = \alpha(T)mG(T)b\left(1 - \frac{2,5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\epsilon}_{0(g)}}{\dot{\epsilon}_{(g)}}\right) \sqrt{\rho_{s(g)}}, \quad \rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)},$$

$$\begin{aligned}
d\rho_{s(g)} &= \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp \left(- \frac{G(T)b^3 - 1,443\sigma_{(g-1)}b^2/\sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{2,5kT} \right) \right] d\varepsilon_{(g)}, \\
d\sigma_{(g)} &= \left[\frac{\alpha(T)mG(T)b}{2\sqrt{\rho_{s(g)}}} - \frac{mkT_{(g)}}{2b^2\sqrt{\rho_{s(g)}}} \left(1 + \ln \frac{\dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_{s(g)}}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \right) \right] d\rho_{s(g)}, \\
\varepsilon_{(g)} &= \varepsilon_{(g-1)} + d\varepsilon_{(g)}, \quad d\varepsilon_{(g)} = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij(g)} d\varepsilon_{ij(g)} \right)^{1/2}, \quad \dot{\varepsilon}_{(g)} = \frac{d\varepsilon_{(g)}}{dt_{(g)}}, \quad dt_{(g)} = \frac{dU_{z(g)}}{v_{(g)}}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{(g)}$, $d\sigma_{(g)}$ — интенсивность напряжений и приращение интенсивности напряжений на шаге нагружения $g = 1, 2, \dots, n$ при пошаговом расчете пластического течения; α — параметр междислокационного взаимодействия; $m = 3,1$ — фактор Тейлора; G — модуль сдвига; b — осредненный по системам скольжения модуль вектора Бюргера дислокаций (в оценках для металлов $b = (2 \div 3) \cdot 10^{-8}$ см); k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_* b \sqrt{\rho_s}$; $\dot{\varepsilon}_* \simeq 9 \cdot 10^6$ с $^{-1}$; $\rho_{s(g)}$, $d\rho_{s(g)}$ — осредненные по объему скалярная плотность и приращение скалярной плотности неподвижных дислокаций; λ — средняя длина свободного пробега подвижных дислокаций; $\dot{\varepsilon}_{(g)}$ — интенсивность скоростей пластических деформаций; $\nu_D = 10^{12} \div 10^{13}$ с $^{-1}$ — частота тепловых колебаний ионов в кристаллической решетке (частота Дебая); $d\varepsilon_{(g)}$ — интенсивность приращения пластической деформации; $d\varepsilon_{ij(g)}$ — приращение компонент тензора деформации; $dt_{(g)}$ — приращение времени деформирования на шаге нагружения g ; $dU_{z(g)}$ — приращение перемещения деформирующего инструмента; $v_{(g)}$ — линейная скорость перемещения деформирующего инструмента на шаге нагружения g .

Поскольку развиваемая теория изначально ориентирована на решение практических задач [13, 14], т. е. строится как прикладная, в модели (1) не учитываются некоторые детали механизма дислокационной пластичности, например возникновение нелокальной связи между плотностью дислокаций и деформацией [15].

Для жестковязкопластического тела начальный (шаг нагружения $g = 1$) предел текучести материала определяется по формуле

$$\sigma_T = \alpha(T)mG(T)b \left(1 - \frac{2,5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0(1)}{\dot{\varepsilon}_{(1)}} \right) \sqrt{\rho_{s0}}, \tag{2}$$

где ρ_{s0} — исходная (до нагрева и деформации) плотность неподвижных дислокаций в материале.

На текущем шаге нагружения g начальный (мгновенный) предел текучести материала равен

$$\sigma_{(g)}^T = \alpha(T)mG(T)b \left(1 - \frac{2,5kT}{G(T)b^3} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0(g)}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \right) \sqrt{\rho_{s(g-1)}}. \tag{3}$$

Оператор (1) описывает пластическую деформацию металлов в широком диапазоне температур (холодная, теплая и горячая деформации) и скоростей деформаций, в котором доминирующим механизмом является дислокационное скольжение в зернах. За исключением специальных видов обработки, зависимость (1) справедлива для диапазона температур и скоростей, при которых в промышленности осуществляется обработка металлов давлением. На каждом шаге нагружения g оператор (1) ставит в соответствие функциям $\dot{\varepsilon}(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$, $\rho_s(\varepsilon)$ и $\varepsilon(t)$ значение σ , т. е. учитывает историю нагружения, обусловленную зависимостями $\dot{\varepsilon}$ и T от времени деформирования.

При холодной деформации (за исключением высокоскоростного деформирования) напряжение σ практически не зависит от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ и дислокации преодолевают

барьеры силовым способом. При этом условия холодной деформации [14] имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon} = \nu_D b \sqrt{\rho_s} \exp\left(-\frac{Gb^3 - 1,443\sigma b^2 / \sqrt{\rho_s}}{2,5kT}\right). \quad (4)$$

С учетом (4) из (1) следует скалярный закон течения жесткопластического упрочняющегося тела (холодная деформация металлов) в дифференциальной форме:

$$\sigma_{(g)} = \alpha m G b \sqrt{\rho_{s(g)}}, \quad \rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)}, \quad (5)$$

$$d\rho_{s(g)} = \left(\frac{1}{b\lambda} - \rho_{s(g-1)}\right) d\varepsilon_{(g)}, \quad \varepsilon_{(g)} = \varepsilon_{(g-1)} + d\varepsilon_{(g)}, \quad d\varepsilon_{(g)} = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij(g)} d\varepsilon_{ij(g)}\right)^{1/2}$$

и в интегральной форме:

$$\sigma = \alpha m G b \left(\frac{(b\lambda)^{-1}[\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon)}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

Из (2) при выполнении (4) или из (6) при $\varepsilon = 0$ получаем выражение для начального предела текучести материала

$$\sigma_T = \alpha m G b \sqrt{\rho_{s0}}. \quad (7)$$

Значения параметров ρ_{s0} и λ , необходимых для расчета диаграмм деформирования по формулам (1), (5) и являющихся характеристиками структуры материала, можно определить с помощью методов металлографического анализа. Однако наиболее просто эти величины определяются по формулам

$$\rho_{s0} = \frac{(\sigma_T^{exp})^2}{(\alpha m G b)^2}, \quad \lambda = \frac{b(\alpha m G)^2[\exp(\varepsilon) - 1]}{\sigma^2 \exp(\varepsilon) - (\alpha m G b)^2 \rho_{s0}} \quad (8)$$

с использованием экспериментально полученной при стандартных испытаниях образцов сжатием в условиях холодной деформации диаграммы деформирования материала $\sigma(\varepsilon)$. В (8) σ_T^{exp} — экспериментальный предел текучести при холодной деформации; $\varepsilon \in [0,4; 0,6]$ и σ — значение интенсивности деформации и соответствующее ему значение интенсивности напряжений на экспериментальной диаграмме деформирования. Формулы (8) следуют из уравнений (7), (6).

Для группы сталей установлено, что температурные зависимости модуля сдвига G и параметра междислокационного взаимодействия α идентичны и с достаточной для инженерных расчетов точностью аппроксимируются соотношениями

$$G(T) = (-65,94 \cdot 10^{-3} T^2 + 41,08 T + 77,82 \cdot 10^3) G_m / 84\,000,$$

$$\alpha(T) = -1,625 \cdot 10^{-7} T^2 + 10,123 \cdot 10^{-5} T + 0,194,$$

где G_m — модуль сдвига материала при температуре 293 К, МПа.

В случае сталей при температурах, соответствующих горячей деформации, лучшая аппроксимация получается при допущении скачков на зависимостях $\alpha(T)$ и $G(T)$ при температуре полиморфного превращения $Fe_\alpha \rightarrow Fe_\gamma$, т. е. при $T \geq 1000$ К:

$$\alpha(T) = -1,625 \cdot 10^{-7} T^2 + 10,123 \cdot 10^{-5} T + 0,121,$$

$$G(T) = (-65,94 \cdot 10^{-3} T^2 + 41,08 T + 89,38 \cdot 10^3) G_m / 84\,000.$$

Заметим, что скачкообразное увеличение упругих модулей E , G при превращении $Fe_\alpha \rightarrow Fe_\gamma$ известно (см. [5]).

Более подробные по сравнению с [13, 14] исследования модели (1) с использованием экспериментальных диаграмм деформирования сталей показали, что эта модель позволяет

определить не только условия холодной деформации [14], но и условия теплой и горячей деформаций. Установлено, что теплая деформация происходит при изменении (уменьшении с ростом деформации и плотности ρ_s) активационного объема $V = b^2/\sqrt{\rho_s}$, т. е. в соответствии с третьим уравнением системы (1). Горячая деформация осуществляется при постоянном активационном объеме ($V = b^2/\sqrt{\rho_{s0}} = \text{const}$), в этом случае третье уравнение в (1) имеет вид

$$d\rho_{s(g)} = \left[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp \left(- \frac{G(T)b^3 - 1,443\sigma_{(g-1)}b^2/\sqrt{\rho_{s0}}}{2,5kT} \right) \right] d\varepsilon_{(g)}.$$

2. Тензорные модели пластической деформации (объемное напряженное состояние). В работе [16] показано, что скалярные модели удовлетворительно описывают пластическую деформацию металлов в широком диапазоне температур и скоростей деформаций. С целью учета истории нагружения, обусловленной возникновением и развитием деформационной анизотропии, т. е. учета влияния характера траектории нагружения, при расчете и математическом моделировании технологических операций и процессов холодной штамповки следует использовать определяющие соотношения для изотропного материала с анизотропным упрочнением [11]:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\Phi(\varepsilon)} [s_{ij} - g(\varepsilon)\varepsilon_{ij}]. \quad (9)$$

Вследствие того что для определения скалярных функций накопленной пластической деформации $\Phi(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ в предлагаемой модели пластичности имеются зависимости

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{\alpha m G b}{2} \left[\left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2} + (\rho_{s0} + A\varepsilon)^{1/2} \right]; \quad (10)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{\alpha m G b}{3\varepsilon} \left[\left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon)} \right)^{1/2} - (\rho_{s0} + A\varepsilon)^{1/2} \right], \quad (11)$$

становится возможным использование рассмотренной модели для решения практических задач.

Для определения величины A в (10), (11) необходимо провести эксперимент, включающий два этапа: 1) деформирование цилиндрических заготовок, при котором деформация осуществляется по схеме простого растяжения (волочением или прессованием) со средней степенью деформации $0,25 \leq \varepsilon^+ \leq 0,70$; 2) осадка нарезанных из полученного прутка цилиндрических образцов с определением предела текучести на сжатие σ_T^s . Величина A вычисляется по формуле [11]

$$A = \frac{(\sigma_T^s)^2 - (\alpha m G b)^2 \rho_{s0}}{(\alpha m G b)^2 \varepsilon^+}.$$

Решение тестовых и технологических задач холодной штамповки на основе предлагаемой модели пластичности (5), (6), (9)–(11) с использованием метода конечных элементов показывает, что по сравнению с феноменологической теорией упрочняющегося пластического тела эта модель позволяет повысить точность расчета напряженно-деформированного состояния и сил деформирования при штамповке за счет учета истории нагружения [12].

При повышенных температурах (теплая и горячая деформации) металлы проявляют вязкопластические вязкоупругие свойства. Известные тензорные законы деформирования вязкопластических вязкоупругих тел не учитывают историю нагружения, обусловленную зависимостями $T(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$ [4], поэтому необходимо обобщение физико-математического скалярного закона течения (1), (2) на объемное напряженное состояние.

Обобщение проведено с использованием традиционного в математической теории пластичности метода, основанного на выборе функции нагружения [16]. Отличие состоит в том, что функция нагружения не принимается в виде гипотезы, а является следствием скалярного физического закона течения.

Из первого уравнения в (1), уравнений (2), (3), а также из определения предела текучести следует, что вязкопластическое тело не имеет предела текучести. Начальное и текущее напряжения течения определяются скоростью деформации и температурой. Следовательно, для рассмотренного вязкопластического тела процесс разгрузки отсутствует. Помимо процесса нейтрального нагружения для вязкопластического тела в терминах механики определены процессы термического и динамического возврата и соответственно термического и динамического (скоростного) упрочнения [16].

Из первых четырех уравнений системы (1) и уравнения (3) следует, что на каждом шаге g напряжение течения можно представить в виде

$$\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)},$$

где $\sigma_{(g)}^T$ — начальное на шаге g напряжение течения при действительных на этом шаге значениях $\dot{\varepsilon}_{(g)}$ и $T_{(g)}$; $d\sigma_{(g)}$ — приращение напряжения на шаге нагружения g , обусловленное приращением $d\varepsilon_{(g)}$, приводящим к приращению $d\rho_{s(g)}$. На основе этого скалярного физического закона течения вязкопластического тела выражения для мгновенной на шаге деформирования функции нагружения и мгновенного на шаге условия текучести Губера — Мизеса записываются в виде

$$f_{(g)} \left[(\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)}), \Phi_{(g)} \left(\sum_1^{g-1} d\varepsilon_{(g)} + d\varepsilon_{(g)} \right) \right] = 0,$$

$$f_{(g)}(\sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)}) = \frac{3}{2} (s_{ij(g)}^T + ds_{ij(g)})(s_{ij(g)}^T + ds_{ij(g)}) - \left[\Phi_{(g)} \left(\sum_1^{g-1} d\varepsilon_{(g)} + d\varepsilon_{(g)} \right) \right]^2 = 0,$$

где $s_{ij(g)}^T, ds_{ij(g)}$ — девиаторы тензоров $\sigma_{ij(g)}^T$ и $d\sigma_{ij(g)}$.

Для вязкопластического тела новый принцип максимума имеет вид [16]

$$(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})_{(g)} d\varepsilon_{ij(g)} > (\sigma_{ij}^{T0} + d\sigma_{ij}^{0})_{(g)} d\varepsilon_{ij(g)}$$

при условии $f_{(g)}^0(\dot{\varepsilon}_{(g)}^0, T_{(g)}^0) < f_{(g)}(\dot{\varepsilon}_{(g)}, T_{(g)})$, $\dot{\varepsilon}_{(g)}^0 < \dot{\varepsilon}_{(g)}$ и $T_{(g)}^0 > T_{(g)}$.

Ассоциированный закон течения на шаге нагружения g имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial (\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})_{(g)}} [(\sigma_{ij}^T + d\sigma_{ij})_{(g)} d\varepsilon_{ij(g)} - (d\lambda)_{(g)} f_{(g)}] = 0,$$

где $d\lambda$ — множитель Лагранжа.

Определяющие соотношения для вязкопластического тела принимают вид

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{(\sigma^T + d\sigma)_{(g)}} (s_{ij}^T + ds_{ij})_{(g)}, \quad (12)$$

где величины $\sigma^T, d\sigma$ на каждом шаге нагружения рассчитываются по соотношению (3) и четвертому уравнению в системе (1) соответственно.

Из тензорного закона (12), представляющего собой обобщение теории течения, следуют определяющие соотношения для упрочняющегося пластического и нелинейно-вязкого тел, являющиеся частными случаями (12). В [16] показано, что для вязкопластического тела выполняется условие несжимаемости. Следовательно, в (12) тензор приращения деформации является девиатором.

Запишем выражение (12) в виде

$$(s_{ij}^T + ds_{ij})_{(g)} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{(g)}^T}{d\varepsilon_{(g)}} d\varepsilon_{ij(g)} + \frac{2}{3} \frac{d\sigma_{(g)}}{d\varepsilon_{(g)}} d\varepsilon_{ij(g)}. \quad (13)$$

Из (13) следует

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{\sigma_{(g)}^T} s_{ij(g)}^T, \quad d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{2}{3} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{d\sigma_{(g)}} ds_{ij(g)}. \quad (14)$$

В отличие от (12) уравнения (14), свидетельствующие о равенстве направляющих тензоров $\bar{\sigma}_{ij(g)}^T$ и $d\bar{\sigma}_{ij(g)}$, удобно использовать при решении практических задач.

Скалярный закон (1) описывает пластическую деформацию в условиях изменяющихся во времени скорости деформации и температуры адекватно экспериментальным данным [16]. Обобщение этого закона на объемное напряженно-деформированное состояние с использованием метода математической теории пластичности проведено без принятия новых гипотез. Это дает основание полагать, что уравнение (12) достаточно точно описывает пластическую деформацию вязкопластического тела при сложнапряженном состоянии.

В рамках разработанной модели пластичности можно дать новую математическую формулировку краевой задачи. Для анализа процессов холодной деформации (упрочняющееся тело) система уравнений этой задачи включает:

1) дифференциальные уравнения равновесия в приращениях напряжений:

$$d\sigma_{ij,j} = 0; \quad (15)$$

2) геометрические соотношения Коши в приращениях деформаций и перемещений:

$$d\varepsilon_{ij} = (du_{i,j} + du_{j,i})/2; \quad (16)$$

3) определяющие соотношения (8)–(10).

Для анализа процессов теплой и горячей деформаций (вязкопластическое тело) система уравнений краевой задачи включает уравнения (15), (16) и определяющие соотношения (14), (1)–(3). Обе системы дополняются соответствующими конкретной задаче краевыми условиями.

3. Линеаризация определяющих соотношений и общий алгоритм решения краевых задач. Учитывая специфику разработанной теории (для того чтобы проследить “судьбу” каждой материальной частицы, все уравнения записаны в дифференциальной форме (в приращениях)), при решении практических задач, например при математическом моделировании технологических операций и процессов ОМД с целью рационализации и оптимизации технологических параметров, сформулированную краевую задачу целесообразно решать численным методом конечных элементов, который позволяет реализовать необходимый пошаговый алгоритм расчета. (В настоящее время метод и алгоритмы решения хорошо разработаны [17].) При этом на каждом шаге нагружения g решается квазиупругая задача с использованием известных линейных уравнений упругости, в которые превращается второе уравнение (14), в случае если квазиупругие на шаге g константы определить следующим образом: $E_{(g)}^* = d\sigma_{(g)}/d\varepsilon_{(g)}$ — мгновенный секущий модуль; $\nu_{(g)}^* = 1/2 - (1 - 2\nu)E_{(g)}^*/(2E)$ — мгновенный коэффициент Пуассона при малых упруго-пластических деформациях; $K_{(g)}^* = E_{(g)}^*/(1 - 2\nu_{(g)}^*)$ — мгновенный квазимодуль объемного сжатия (ν , E — упругие константы материала (коэффициент Пуассона и продольный модуль упругости соответственно)).

После определения $d\varepsilon_{ij(g)}$ и $d\sigma_{ij(g)}$ по первому уравнению в (14) находятся компоненты тензора $\sigma_{ij(g)}^T$. На шаге нагружения g напряженное состояние $\sigma_{ij(g)} = \sigma_{ij(g)}^T + d\sigma_{ij(g)}$.

Для решения практических задач холодной пластической деформации, например для расчета и анализа технологических процессов холодной штамповки металлов, необходима линеаризация определяющих соотношений (9). В данном случае наличие скалярных физических моделей (10), (11) значительно упрощает эту процедуру при численной реализации соответствующей краевой задачи. Аналогично (12) уравнение (9) запишем в виде

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{\Phi_{(g-1)} + d\Phi_{(g)}} [s_{ij(g-1)} + ds_{ij(g)} - g_{(g-1)}\varepsilon_{ij(g-1)} - dg_{(g)}\varepsilon_{ij(g)} - g_{(g)} d\varepsilon_{ij(g)}]. \quad (17)$$

Как и в случае уравнения (12), из (17) следуют соотношения

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij(g)} &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{\Phi_{(g-1)}} [s_{ij(g-1)} - g_{(g-1)}\varepsilon_{ij(g-1)}]; \\ d\varepsilon_{ij(g)} &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{d\Phi_{(g)}} [ds_{ij(g)} - dg_{(g)}\varepsilon_{ij(g)} - g_{(g)} d\varepsilon_{ij(g)}]. \end{aligned} \quad (18)$$

В соответствии с теорией пластичности изотропного материала с анизотропным упрочнением [4] в уравнении (18) выражение в квадратных скобках представляет собой девиатор приращения активных напряжений $ds_{ij(g)} - dg_{(g)}\varepsilon_{ij(g)} - g_{(g)}d\varepsilon_{ij(g)} = ds_{ij(g)}^a$, или

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{(g)}}{d\Phi_{(g)}} ds_{ij(g)}^a. \quad (19)$$

С использованием подстановки определяемых для каждого шага и каждой материальной частицы значений

$$\begin{aligned} E_{(g)}^{**} &= \frac{d\Phi_{(g)}}{d\varepsilon_{(g)}} = \frac{1}{4} \alpha m G b \left[\left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon_{(g)}) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon_{(g)})} \right)^{-1/2} \frac{(b\lambda)^{-1} - \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon_{(g)})} + A(\rho_{s0} + A\varepsilon_{(g)})^{-1/2} \right], \\ \nu_{(g)}^* &= \nu_{(g)}^{**} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2\nu}{2E} E_{(g)}^{**} \end{aligned}$$

на каждом шаге нагружения g уравнения (19) сводятся к линейным уравнениям упругости в приращениях.

После решения методом конечных элементов квазиупругой задачи на шаге нагружения g и определения величин $d\varepsilon_{ij(g)}$, $\varepsilon_{ij(g)}$, $d\varepsilon_{(g)}$, $d\sigma_{ij(g)}^a$, $d\sigma_{0(g)}^a$ расчет приращений компонент девиатора действующих напряжений осуществляется по формулам $ds_{ij(g)} = ds_{ij(g)}^a + dg_{(g)}\varepsilon_{ij(g)} + g_{(g)}d\varepsilon_{ij(g)}$, где в соответствии с (10) имеем

$$\begin{aligned} dg_{(g)} &= \frac{\alpha m G b}{3\varepsilon_{(g)}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon_{(g)}) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon_{(g)})} \right)^{-1/2} \frac{(b\lambda)^{-1} - \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon_{(g)})} - A(\rho_{s0} + A\varepsilon_{(g)})^{-1/2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon_{(g)}} \left[\left(\frac{(b\lambda)^{-1} [\exp(\varepsilon_{(g)}) - 1] + \rho_{s0}}{\exp(\varepsilon_{(g)})} \right)^{1/2} - (\rho_{s0} + A\varepsilon_{(g)})^{1/2} \right] \right\} d\varepsilon_{(g)}. \end{aligned}$$

Далее проводится расчет компонент тензора приращений действующих напряжений $d\sigma_{ij(g)} = ds_{ij(g)} + d\sigma_{0(g)}\delta_{ij}$, где $d\sigma_{0(g)} = K_{(g)}^{**} d\varepsilon_{0(g)}$; δ_{ij} — символ Кронекера; $K_{(g)}^{**} = E_{(g)}^{**}/(1 - 2\nu_{(g)}^{**})$.

4. Апробация модели. Как отмечено в п. 2, для апробации модели упрочняющегося пластического тела (что соответствует холодной деформации металлов) решены тестовые и технологические задачи пластичности (см., например, [12]). Проверка адекватности

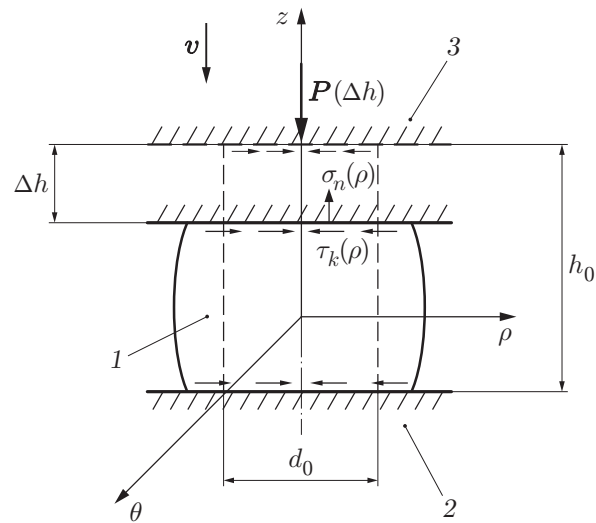


Рис. 1. Схема осадки цилиндрической заготовки плоскими бойками: штриховые линии — исходное состояние заготовки; сплошные — текущее; 1 — заготовка; 2 — неподвижный боек; 3 — подвижный боек

модели вязкопластического тела (что соответствует тепловой и горячей деформациям металлов) проводилась на примере решения задачи об осадке цилиндрической заготовки плоскими бойками в условиях контактного трения.

На рис. 1 показана схема осадки. Цилиндрическая заготовка из стали Ст. 10 с начальными диаметром $d_0 = 6$ мм и высотой $h_0 = 7$ мм осаживается неподвижным и подвижным плоскими бойками. Подвижный боек перемещается со скоростью $v = \text{const}$ (при расчете задавалось три значения скорости: $v = 8,3 \cdot 10^{-1}$; $8,3 \cdot 10^{-2}$; $8,3 \cdot 10^{-3}$ мм/с). На контактные поверхности заготовки с бойками (торцы цилиндра) наносилась смазка — суспензия коллоидного графита в минеральном масле. Выбор этой технологической операции обусловлен возможностью ее осуществления на универсальной испытательной машине 1231У-10, обеспечивающей регистрацию необходимой для деформации заготовки силы P с погрешностью не более 2 % измеряемой величины и перемещения подвижного бойка Δh . Машина снабжена нагревательной печью, что позволяет осуществлять деформацию в изотермических условиях. Заготовка и бойки имели одинаковую постоянную в процессе деформации температуру, равную 850 °С. (Для стали Ст. 10 эта температура соответствует температуре горячей деформации, превышающей температуру рекристаллизации.)

Адекватность модели горячей деформации проверялась путем сравнения экспериментальных и расчетных зависимостей $P(\Delta h)$. Расчетные зависимости $P(\Delta h)$ получены в результате численного моделирования на компьютере деформации заготовки при осадке. Осесимметричная задача решалась методом конечных элементов в приращениях перемещений по изложенному в п. 3 алгоритму. Трение на контактных поверхностях считалось кулоновским:

$$\tau_k = f \sigma_n.$$

Здесь τ_k — удельная сила трения (см. рис. 1); f — коэффициент трения; σ_n — нормальное напряжение на контактной поверхности. Коэффициент трения f в расчетах варьировался.

Для расчета использовались следующие значения характеристик дислокационной структуры стали Ст. 10 и входящих в модель величин: $\rho_{s0} = 1,3 \cdot 10^{10}$ см⁻², $\lambda = 4,7 \cdot 10^{-4}$ см, при $T = 850$ °С $G = 53\,400$ МПа, $\nu_D = 10^{12}$ с⁻¹, $b = 3 \cdot 10^{-8}$ см, $m = 3,1$, $\dot{\epsilon}_* = 9 \cdot 10^6$ с⁻¹.

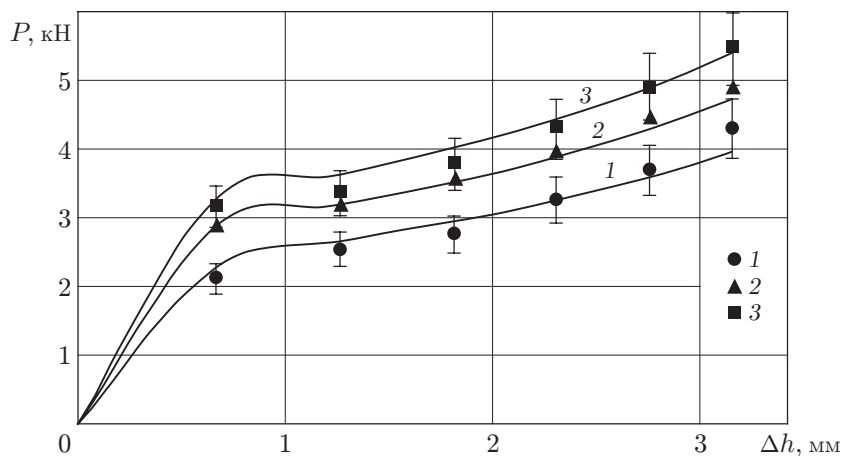


Рис. 2. Зависимости силы осадки от перемещения подвижного бойка при различных скоростях перемещения подвижного бойка и значениях коэффициента трения:

1 — $v = 8,3 \cdot 10^{-3}$ мм/с, $f = 0,05$; 2 — $v = 8,3 \cdot 10^{-2}$ мм/с, $f = 0,07$; 3 — $v = 8,3 \cdot 10^{-1}$ мм/с, $f = 0,10$; линии — расчет, точки — эксперимент

Установлено, что при скоростях перемещения подвижного бойка $v = 8,3 \cdot 10^{-1}$, $8,3 \cdot 10^{-2}$, $8,3 \cdot 10^{-3}$ мм/с и значениях коэффициента трения $f = 0,05$; $0,07$; $0,10$ соответственно различие между теоретическими и экспериментальными зависимостями $P(\Delta h)$ не превышает 10 % (рис. 2). (Указанные значения коэффициента трения известны в теории и технологии ОМД.)

Заключение. На основе объединения основополагающих микро- и макропредставлений, методов микро- и макроописания пластической деформации металлов предложена физико-математическая модель пластичности, позволяющая, в отличие от классической теории, учесть историю нагружения в широком диапазоне температур и скоростей деформаций и упростить алгоритм расчетов технологических операций и процессов обработки металлов давлением с использованием метода конечных элементов. Кроме того, при решении технологических задач модель позволяет определять накопленную плотность дислокаций и, следовательно, прогнозировать структуру и свойства в различных объемах полуфабрикатов, полученных методами обработки металлов давлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Урал. гос. техн. ун-т: Урал. политехн. ин-т, 2001.
2. Мохель А. Н., Салганик Р. Л., Христианович С. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов. Определяющие уравнения и расчеты по ним // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 4. С. 119–141.
3. Лихачев В. А. Структурно-аналитическая теория прочности / В. А. Лихачев, В. Г. Малинин. СПб.: Наука. С.-Петербург. отд-ние, 1993.
4. Ишлинский А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
5. Штремель М. А. Прочность сплавов. Ч. 2. Деформация. М.: Моск. ин-т стали и сплавов, 1997.
6. Батдорф С. Б., Будянский Б. А. Математическая теория пластичности на основе концепции скольжения // Механика: Сб. пер. иностр. ст. М.: Мир, 1962. № 1. С. 135–155.

7. **Кнетс И. В.** Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига: Зинатне, 1971.
8. **Гриняев Ю. В., Панин В. Е.** Полевая теория дефектов на мезоуровне // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 37–39.
9. **Киселев С. П.** Модель упругопластического деформирования материалов на основе калибровочной теории дефектов с учетом диссипации энергии // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 177–187.
10. **Румер Ю. Б.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. М.: Наука, 1977.
11. **Грешнов В. М., Боткин А. В., Напалков А. В.** Применение теории пластичности изотропного материала с анизотропным упрочнением при математическом моделировании операций формообразования // Изв. вузов. Чер. металлургия. 2000. № 1. С. 27–30.
12. **Грешнов В. М., Боткин А. В., Напалков А. В., Лавриненко Ю. А.** Математическое моделирование многопереходных процессов холодной объемной штамповки на основе физико-математической теории пластического формообразования металлов. Ч. 1. Расчет напряженно-деформированного состояния // Кузнеч.-штамп. пр-во. 2001. № 8. С. 33–37.
13. **Грешнов В. М., Сафин Ф. Ф., Грешнов М. В.** Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. 1. Постановка задачи и вывод общего уравнения // Пробл. прочности. 2002. № 6. С. 107–115.
14. **Грешнов В. М., Сафин Ф. Ф., Грешнов М. В.** Физико-феноменологическая модель сопротивления металлов пластической деформации для расчета технологических процессов обработки металлов давлением. 2. Частные случаи модели и ее экспериментальная проверка // Пробл. прочности. 2003. № 1. С. 87–97.
15. **Киселев С. П.** Дислокационная структура полос сдвига в монокристаллах // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 102–113.
16. **Грешнов В. М.** Модель вязкопластического тела с учетом истории нагружения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 117–125.
17. **Можаровский Н. С.** Методы и алгоритмы решения краевых задач / Н. С. Можаровский, Н. Е. Качаловская. Киев: Выща шк., 1991.

*Поступила в редакцию 4/X 2006 г.,
в окончательном варианте — 21/IX 2007 г.*
