

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ГОРНЫХ ПОРОД В ИНСТИТУТЕ ГОРНОГО ДЕЛА СО РАН

С. В. Лавриков

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,

E-mail: lvk64@mail.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Настоящая статья посвящена отмеченному 8 февраля 2024 г. двойному юбилею — 300-летию Российской академии наук и 80-летию Института горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук. Приводится краткий обзор работ и научных результатов, полученных сотрудниками ИГД СО РАН за последние 10–15 лет в области математического моделирования и численного решения актуальных задач геомеханики.

Горная порода, выработка, математическая модель, численный алгоритм, краевая задача, программный комплекс, распределение напряжений

DOI: 10.15372/FTPRPI20240401

EDN: FSJQRG

Для Института горного дела им. Н. А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук (далее ИГД СО РАН или Институт) 8 февраля 2024 г. — особенная дата, ознаменованная двойным юбилеем.

Как известно, 8 февраля 1724 г. объявлен указ императора Петра I об учреждении Академии наук и художеств с приложением “Проекта учреждения Академии с назначением на содержание оной доходов”. В настоящее время 8 февраля считается Днем Российской науки, а в 2024 г. отмечается 300-летие Российской академии наук.

Другая дата не столь известна, но для Института она не менее значима. В 1943 г. 21 октября Советом Народных Комиссаров СССР было принято решение о создании Горно-геологического института (ГГИ) Западно-Сибирского филиала (ЗСФ) академии наук СССР. На заседании Президиума АН СССР 8 февраля 1944 г. первым директором ГГИ ЗСФ АН СССР

Раздел “Нелокальные математические модели и анализ концентрации напряжений в приконтурной зоне породных массивов” в части численного решения задачи о перераспределении опорного давления при подвигании фронта очистного забоя выполнен в рамках проекта НИР (№ гос. рег. 121052500138-4).

утвержден доктор технических наук, профессор Николай Андреевич Чинакал. Эта дата считается днем рождения Института. Таким образом, наряду с 300-летием Российской академии наук именно 8 февраля 2024 г. Институт горного дела СО РАН отмечает свое 80-летие!

В 1943 г. большая часть территории страны, содержащая разведанные ресурсы, находилась под оккупацией врага. Необходимо было в кратчайшие сроки обеспечить увеличение добычи полезных ископаемых, прежде всего угля и руд черных и цветных металлов в Сибирском регионе. Можно с уверенностью сказать, что с поставленной задачей Институт справился. Под руководством Н. А. Чинакала была разработана и внедрена новая щитовая технология добычи угля, которая позволила увеличить производительность добычи в Кузбасском угольном бассейне в несколько раз!

В последующие годы, наряду с разработкой новых технологий добычи полезных ископаемых, в Институте проводились исследования по проблемам теоретического описания процессов деформирования и разрушения горных пород и их массивов, проблемам постановки и проведения экспериментов по измерению горного давления, проблемам горного и строительного машиностроения, механохимии, обогащения полезных ископаемых и др.

К настоящему времени в Институте сформировано три магистральные научные направления, по которым проводятся исследования:

- современные геодинамические поля и процессы, вызванные техногенной деятельностью; геомеханика горных пород и их массивов;
- теория разработки месторождений полезных ископаемых и комплексная переработка минерального сырья на основе ресурсо- и энергосберегающих экологически безопасных технологий;
- горное и строительное машиноведение.

В данном обзоре невозможно охватить все направления и все этапы развития Института. Для этого понадобился бы объем материала, существенно превышающий размеры одной статьи. Ограничимся только первым из указанных направлений, причем, как заявлено в заголовке статьи, только в части развития методов математического моделирования и решения на этой основе прикладных задач геомеханики.

Создание школы геомеханики в ИГД СО РАН связано с именем члена-корреспондента академии наук СССР Тимофея Федоровича Горбачева. Он считал, что в основе научных исследований должны лежать фундаментальные вопросы оценки горного давления, взаимодействия крепей подземных выработок с массивом горных пород, устойчивости выработок и управления горным давлением. Под его руководством создана лаборатория горного давления, главным направлением деятельности которой стало развитие экспериментальной базы по измерению горного давления и оценке напряженного состояния массива вблизи выработок.

Значительный импульс в своем развитии геомеханическое направление получило с приходом в 1970 году в ИГД СО РАН академика Евгения Ивановича Шемякина. По образному выражению академика М. А. Садовского, Евгений Иванович придал Институту академическую огранку. Е. И. Шемякин имел классическое университетское образование (Ленинградский государственный университет), отлично разбирался в вопросах математической физики, в теории систем уравнений в частных производных и в построении и анализе математических моделей, владел современными методами решения краевых задач механики. Под его руководством в Институте сформировалась сильная научная школа геомеханики, учениками и последователями которой сегодня проводятся фундаментальные научные исследования и дается теоретическое описание процессов деформирования, устойчивости и разрушения породных массивов, разрабатываются новые математические модели горных пород с учетом их внутренней структуры, выполняется численное моделирование задач механики горных пород и обосновывается эффективность разрабатываемых технологий добычи полезных ископаемых.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

Швейцарский геолог Арнольд Гейм в 1878 г. выдвинул гипотезу о том, что давление пород представляет собой тяжесть земной толщи и в нетронутых массивах равно весу пород на данной глубине, причем действует одинаково по всем направлениям: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\gamma H$, где γ — удельный вес пород, H — глубина их залегания [1]. В 1925 г. советский ученый А. Н. Динник на основе упругой модели предложил другую гипотезу о напряженном состоянии нетронутого массива [2], согласно которой горизонтальное (тектоническое) напряжение не равно вертикальному (гравитационному) и составляет только часть последнего $\sigma_{zz} = -\gamma H$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \lambda \sigma_{zz}$, где $\lambda = \nu / (1 - \nu)$, ν — коэффициент Пуассона. Однако еще М. М. Протодяконов отмечал, что гипотеза Динника может быть использована только до того момента, пока в массиве не пройдена выработка. Расчет давлений на крепь не может опираться на распределение Динника, и здесь необходимы более точные модели. Применение данной теории было вызвано острой практической необходимостью решения сложных задач горного дела, связанных с разрушением крепи выработок и очистных забоев горным давлением, деформированием целиков и завалами в камерах, стрелянием пород и горными ударами. Следует отметить, что теория Динника и сегодня применяется в ряде практических расчетов.

В ИГД СО РАН вопрос об измерении напряженного состояния породного массива составлял основу исследований, проводимых в лаборатории Т. Ф. Горбачева. Именно по его инициативе в 1967 г. на регулярной основе был организован Всесоюзный семинар по измерению напряжений в массиве горных пород. Создано Бюро семинара, члены которого в перерывах между очными сессиями в тесном контакте со специалистами горных предприятий обсуждали насущные вопросы интенсификации исследований по выявлению природы напряженного состояния и структуры нетронутого массива, анализировали методологические подходы и принципы определения напряжений с учетом физических характеристик объекта исследования. Однако в 1990-е годы традиция заседаний Семинара была прервана. За период 1990–1999 гг. проведено только две очные сессии в 1994 и в 1996 гг., обе состоялись на базе Института горного дела УрО РАН. В 1999 г. по инициативе академика М. В. Курлени в ИГД СО РАН на регулярной основе начала работу Всероссийская научная конференция “Геодинамика и напряженное состояние недр Земли”, которая фактически продолжила деятельность Всесоюзного семинара по измерению напряжений в массиве горных пород. Отметим, что сегодня тематика конференции существенно расширена. Она включает множество различных аспектов механики горных пород, в том числе вопросы математического и численного моделирования поведения породных массивов под нагрузкой.

За прошедшие годы в Институте силами сразу нескольких лабораторий геомеханического и геотехнологического направлений выполнен большой объем экспериментальных исследований по анализу напряженного состояния породных массивов и предложены теоретические обоснования новых оригинальных методов его измерения: частичной и полной разгрузки скважин, параллельных скважин, измерительного гидроразрыва, фотоупругости [3–11]. Наряду с исследованием напряженного состояния породных массивов указанные методики применяются и для анализа напряжений в инженерных сооружениях. Так, метод параллельных скважин [12] используется для анализа напряженного состояния инженерных конструкций Саяно-Шушенской ГЭС.

Отметим, что при интерпретации результатов измерений в указанных методах активно применяется численное решение краевых задач теории упругости.

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА И МОДЕЛЕЙ ГОРНЫХ ПОРОД С УЧЕТОМ ИЕРАРХИИ СТРУКТУРНЫХ УРОВНЕЙ И СЛОЖНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Современное развитие механики горных пород следует по пути усложнения представлений о породном массиве, детально учитывается внутренняя структура массива. Понимание того, что породный массив обладает иерархией структурных уровней, достигнуто в результате работы ряда научных школ. Большой вклад внесен трудами академика Е. И. Шемякина и его научной школы [13–16], академика М. А. Садовского и его учеников [17–19]. В [17] есть отсылка на работы [14, 15], выполненные в ИГД СО РАН.

В настоящее время блочное строение и наличие иерархии масштабных уровней массива стало общепризнанным фактом. Накоплено огромное количество данных, указывающих на то обстоятельство, что именно блочно-зеренное строение массива определяет все его фундаментальные свойства — внутреннее трение, дилатансию, сцепление, анизотропию и др. В этот же ряд можно поставить свойство массива запасать упругую энергию. Такая энергия аккумулируется в виде внутренних самоуравновешенных напряжений и при определенных условиях может быть высвобождена [20–25]. Процесс ее высвобождения в зависимости от конкретных условий может носить как медленный релаксационный характер, так и сопровождаться динамическими проявлениями горного давления.

В лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред (зав. лаб. д. ф.-м. н. А. Ф. Ревуженко) предложен физический образец, моделирующий свойство аккумулировать энергию внешних воздействий [26]. Образец представляет собой пучок шероховатых стержней, стянутых упругой нитью (рис. 1).

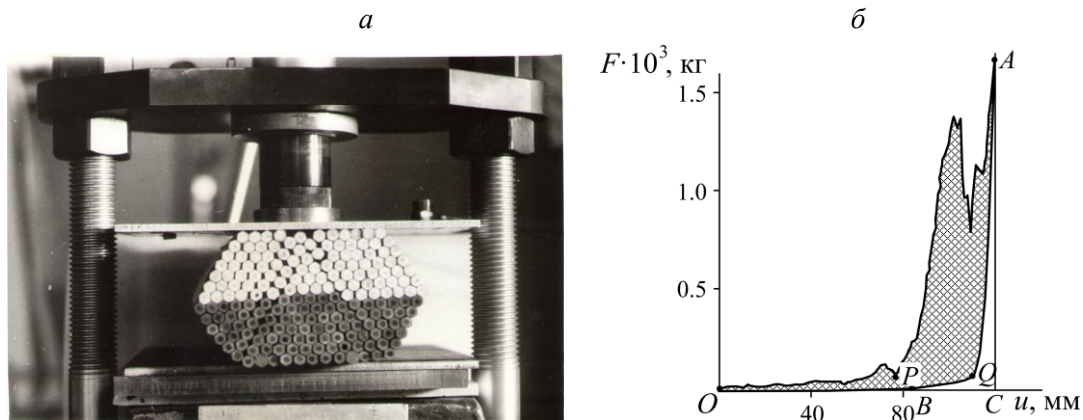


Рис. 1. Физический образец (вид с торца) (а); диаграмма сжатия (участок OA) и разгрузки (участок AB) (б) [26]

При сжатии образца (в боковом направлении) стержни переупаковываются, а упругая нить растягивается. За счет трения между стержнями образец может самозаклиниться и находиться в равновесном состоянии даже после снятия внешней нагрузки. Установлено, что образец способен запасать до 30 % энергии, затрачиваемой на его деформирование. Описанные представления легли в основу разработанной в ИГД СО РАН концепции горной породы как активной среды с внутренними источниками и стоками энергии [27]. В рамках данного подхода создан ряд новых математических моделей с внутренними переменными. С использованием метода конечных элементов реализованы оригинальные численные алго-

ритмы, в том числе алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) в массиве с учетом разупрочнения среды [28, 29], и выполнен ряд расчетов по моделированию процессов деформирования массива вблизи выработанного пространства [30, 31]. Показано, что в зависимости от свойств пород и условий нагружения возможна реализация как устойчивого, так и неустойчивого режима деформирования, включая динамическое неконтролируемое высвобождение накопленной энергии — модель горного удара (рис. 2).

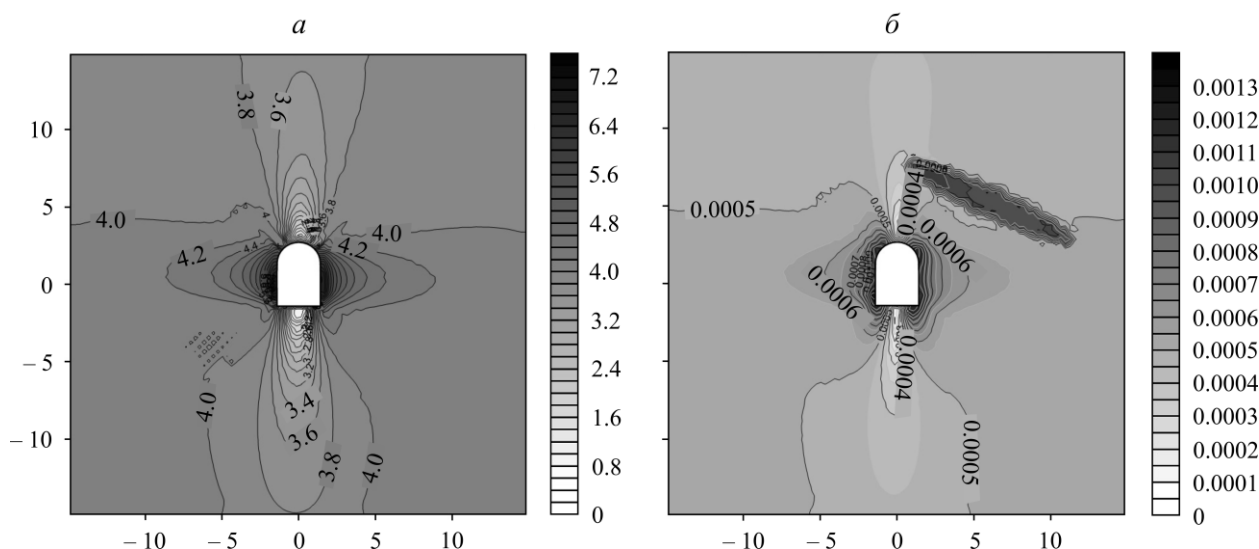


Рис. 2. Пример расчета НДС массива с учетом влияния зоны самоуравновешенных напряжений вблизи выработки: изолинии максимального касательного усилия (а); изолинии максимальных сдвигов (б) [31]. Напряжения приведены в долях от характерного давления на глубине залегания выработки γH , размеры области — в долях от среднего радиуса выработки

Последовательное развитие моделей с внутренними переменными привело к необходимости наделять структурой само пространство, в котором происходят процессы деформирования [32–34]. Построена неархимедова числовая система, обладающая иерархией масштабных уровней, рассмотрены операции дифференцирования и интегрирования, включая определенное интегрирование, вариационные принципы. Сделаны шаги для обобщения теории на плоский случай [35]. Показано, что ряд моделей с внутренними переменными эквивалентны моделям, сформулированным с применением неархимедового анализа. В [36] даны примеры численных расчетов по моделированию процессов деформирования породного массива, обладающего иерархией структурных уровней.

Известно, что большинство математических моделей неупругих сред, как правило, адекватно описывают реакцию среды на простые способы нагружения (одноосное сжатие, простой сдвиг). Один из ключевых вопросов при разработке моделей заключается в описании реакции на сложные способы нагружения, когда главные оси напряжений и деформаций меняют свои направления в процессе деформирования. В первую очередь актуальной становится задача постановки лабораторных экспериментов по сложному нагружению сред, обладающих внутренней структурой. Наиболее удобными для анализа являются эксперименты, где реализуется однородное распределение напряжений и деформаций. Для металлов такие методики хорошо известны — это растяжение и кручение тонкостенных трубчатых образцов; для геоматериалов (горные породы, грунты, сыпучие среды) они малоприменимы, поэтому необходима разработка новых способов их сложного нагружения.

В лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред разработана общая классификация [37] однородных способов нагружения геоматериалов и на ее основе предложены новые способы и лабораторные стенды по их однородному деформированию, включая различные способы сложного нагружения с непрерывным поворотом главных осей деформаций и нагружение с резкими изломами траектории деформирования. Проведенные лабораторные эксперименты привели к открытию эффекта направленного переноса масс среды (рис. 3). На его основе выдвинута гипотеза о возможном глобальном механизме направленного переноса внутренних масс Земли в результате ее суточного вращения в поле приливных сил, действующих со стороны Луны и Солнца [38].

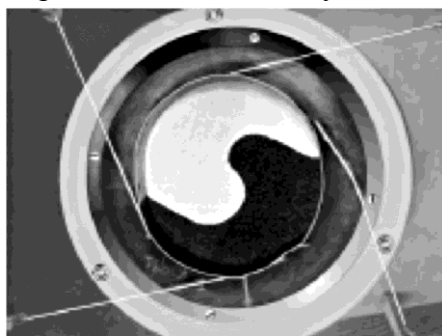


Рис. 3. Накопление деформаций в сухом кварцевом песке (в начале деформирования половина области была засыпана светлыми песчинками, другая половина — темными) [38]

В [38–42] дано математическое описание и проведено численное моделирование обнаруженного эффекта. С использованием моделей вязкой жидкости, нелинейных моделей гипопластических сред выполнены численные расчеты и дана качественная и количественная оценка эффекта переноса масс и дифференциального вращения твердого ядра, свободно помещенного в центре исследуемого образца (рис. 4).

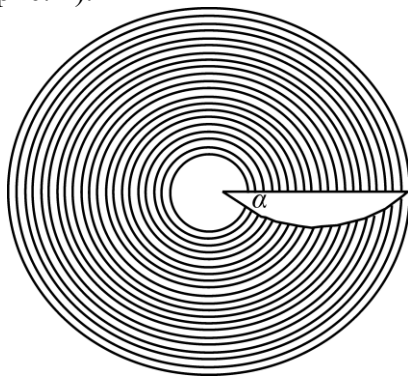


Рис. 4. Траектории движения материальных точек среды и дифференциальное вращение твердого ядра (угол α), рассчитанные на основе нелинейной гипопластической модели и метода конечных элементов [41]

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТАННОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящее время добыча полезных ископаемых подземным способом сопряжена с переходом на глубокие горизонты добычи. Опыт отработки запасов полезных ископаемых на больших глубинах показывает, что одной из основных технологий их разработки будет являться технология с использованием закладки выработанного пространства твердеющими смесями или сцементированными обрушенными породами. С механической точки зрения важ-

ная особенность применения закладочных смесей — последовательность заполнения очистных выработок, поскольку она существенно влияет на перераспределение напряжений в приконтурной зоне массива. В этой связи технологии с применением твердеющей закладки, с поэтапной проходкой и креплением выработок и камер больших размеров в условиях глубоких горизонтов требуют геомеханического обоснования для безопасности ведения горных работ.

На протяжении ряда лет в лаборатории механики горных пород (зав. лаб. к.ф.-м.н. А. А. Красновский) разрабатываются численные конечно-элементные алгоритмы и комплексы программ для ЭВМ по расчету изменения поля напряжений в породном массиве в зависимости от порядка отработки блоков рудного тела в условиях больших глубин (рис. 5). Сформулирована постановка и получено численное решение задачи о расчете напряженно-деформированного состояния крепи и приконтурных пород, учитывающие последовательность отработки блоков, особенно их контактного взаимодействия [43–46].

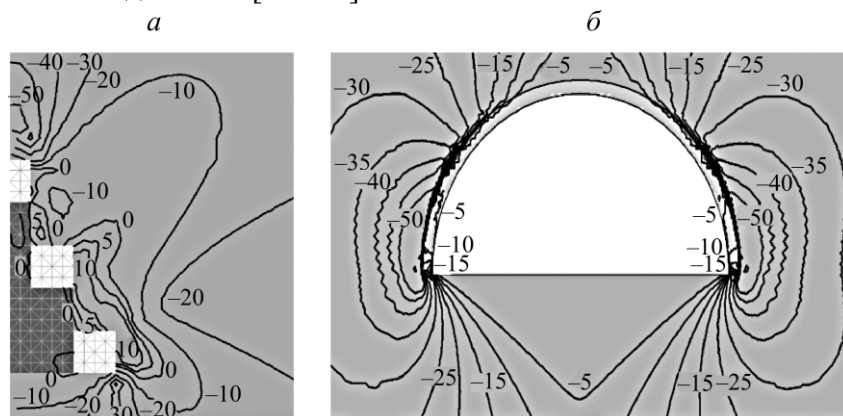


Рис. 5. Примеры расчета главных напряжений в приконтурной зоне массива в зависимости от порядка отработки блоков (а); особенностей контактного взаимодействия крепи и приконтурных пород (б) [44, 45]

Одна из проблем, возникающих при освоении глубоких горизонтов добычи, связана с существенным влиянием температуры. Согласно имеющимся данным, при удалении от земной поверхности вглубь массива на каждые 100 м температура повышается в среднем на 3 °С. Наряду со сложностью проветривания выработанных пространств повышение температуры приводит к изменению напряженного состояния пород в окрестности ведения горных работ. В [47, 48] сформулированы постановки задач и выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния породного массива с учетом температурных полей и их влияния на НДС массива в условиях больших глубин.

В последнее десятилетие на ряде месторождений твердых полезных ископаемых, разрабатываемых открытым способом, происходит переход на подземные технологии разработки подкарьерных массивов. Переход от открытой к подземной разработке требует геомеханического обоснования технических решений по оценке состояния подкарьерного массива и его изменений в процессе развития горных работ. Для обеспечения безопасности горных работ в сложных гидрологических и геомеханических условиях под дном карьера оставляется предохранительный целик (рудная потолочина), размеры которого зависят от особенностей формирования напряженно-деформированного состояния подкарьерного массива.

В лаборатории диагностики механического состояния массива горных пород (зав. лаб. к. т. н. В. Д. Барышников) для кимберлитовой трубки “Интернациональная” АК “АЛРОСА” проведен анализ состояния рудного массива при выемке подкарьерных запасов. Прямое численное моделирование напряженно-деформированного состояния подкарьерного массива выполнено при отра-

ботке разрезного слоя и формировании потолочины толщиной 20 м с последующей отработкой нижележащего блока (рис. 6) [49, 50]. Для решения задач по расчету НДС в процессе отработки использована модель неоднородной упругости и метод граничных интегральных уравнений.

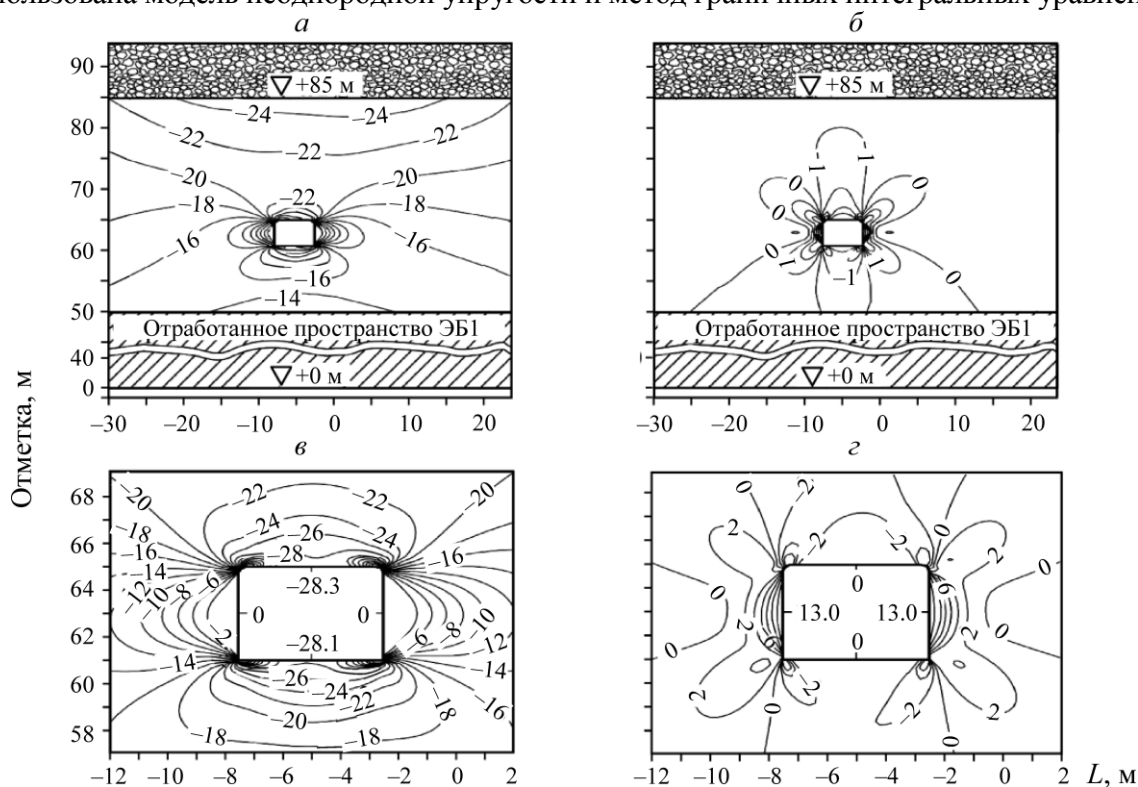


Рис. 6. Напряженное состояние (МПа) в окрестности выработки на отметке +61 ÷ +65 м после отработки блока: а, в — горизонтальные напряжения σ_x ; б, г — вертикальные напряжения σ_y [48]

В лаборатории горной информатики (зав. лаб. д. ф.-м. н. Л. А. Назаров) предложена методика статистического анализа по выявлению закономерностей пространственно-временного распределения параметров детерминированных и случайных процессов в породном массиве на стадии промышленной разработки месторождений полезных ископаемых. Суть методики заключается в получении длинных временных рядов, описывающих: эволюцию полей напряжений; количество и суммарную энергию сейсмических событий. Выявленная корреляция между рядами и статистически значимые связи используются для прогнозных оценок интегральных параметров сейсмического процесса. Предложенный подход применен для совместного пространственно-временного анализа природной сейсмичности и напряженного состояния Байкальской рифтовой зоны (БРЗ) [51].

В [52] сформулирована и решена обратная задача определения краевых условий на горизонтальных границах угольного пласта по данным томографии (распределение скорости продольных волн V) и эмпирической зависимости V от среднего напряжения σ (рис. 7а). Это позволило выполнить реконструкцию напряженно-деформированного состояния в угольном пласте и установить местонахождение слабых участков в его кровле и почве (рис. 7б). Результаты имеют значение для прогноза внезапных выбросов угля и газа за счет возможных откольных разрушений в призабойной зоне.

Для количественной оценки природного поля напряжений в окрестности геомеханического объекта предложен подход, основанный на решении граничной обратной задачи по данным акустического зондирования. С целью обеспечения разрешимости задачи установлена оптимальная схема расположения излучателя и приемников. Предельная относительная погреш-

ность измерений составляет не более 10 % [53]. Отметим, что с применением аппарата решения обратных задач рассмотрен широкий спектр вопросов механики горных пород по определению деформационных и реологических свойств пород, по анализу компонент природного поля напряжений и упругих свойств породных массивов, по определению фильтрационно-емкостных свойств коллекторов и ряд других [54, 55].

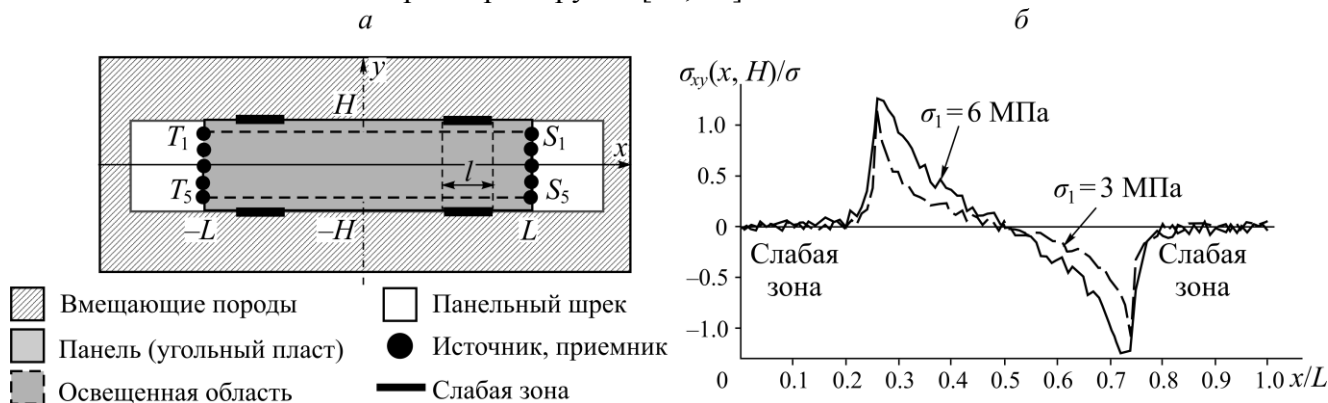


Рис. 7. Схема сейсмической томографии угольного пласта (а); характер рассчитанных зон ослабления на границе “угольный пласт – вмещающая порода” (б) [52]

В лаборатории подземной разработки рудных месторождений (зав. лаб. д. т. н. С. А. Неверов) значительная доля исследований посвящена вопросам численного моделирования и обоснования эффективности различных технологий добычи полезных ископаемых. В работе [56] исследуются процессы разубоживания в системе подэтажного обрушения с торцевым выпуском на основе численного моделирования методом дискретных элементов. В [57] с использованием метода конечных элементов и программного комплекса ANSYS дан расчет арочной податливой крепи и выявлены ее наиболее опасные узлы с точки зрения перехода элементов конструкции в предельное состояние. В [58] выполнен численный прогноз распределения напряжений в рудопородном массиве, нарушенном горными выработками, и представлено обоснование устойчивости межэтажного целика с учетом надработки и подработки. Установлены безопасные параметры и условия применения камерной и слоевой систем разработки с породной закладкой. В [59] показана необходимость учета трещиноватости пород при расчете НДС и оценке устойчивости породного массива. На основе численных расчетов и физического моделирования на фотоупругих материалах в работе [60] выполнена сопоставительная геомеханическая оценка конструктивных элементов сплошной камерной системы разработки (рис. 8).

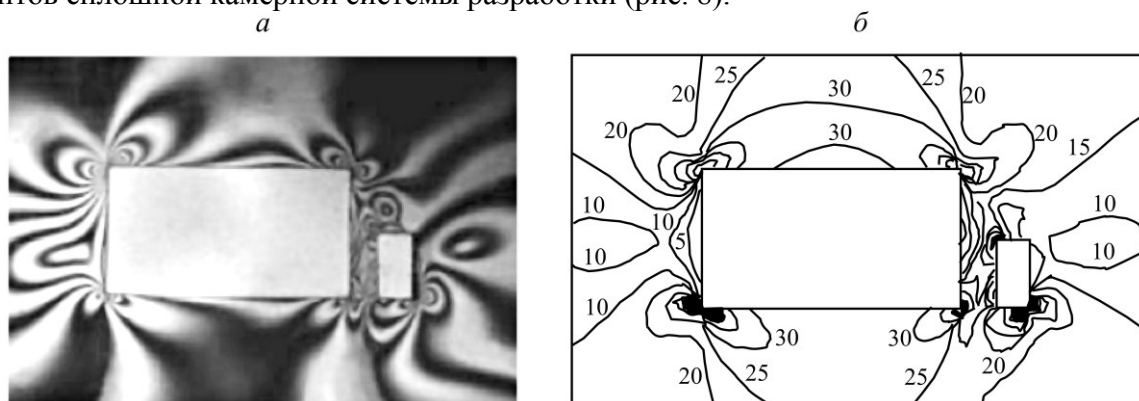


Рис. 8. Характер распределения максимальных касательных напряжений в элементах рассматриваемой геотехнологии: физическое моделирование поляризации-оптическим методом (а); численный расчет на основе МКЭ в мегапаскалях (б) [60]

НОВЫЕ КРИТЕРИИ ПЕРЕХОДА СРЕДЫ В ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

При формулировке различных критериев пластичности и разрушения большое значение имеет диаграмма Мора. На этой диаграмме в системе координат (σ_n, τ_n) изображается область S всех допустимых значений напряжений в зависимости от заданных главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Область S ограничена тремя полуокружностями, σ_n, τ_n — нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью \bar{n} . Известен результат В. В. Новожилова [61], где вычисляется интеграл по всем касательным напряжениям по сфере, выделенной в нагруженном напряжениями элементарном объеме. Главным является то обстоятельство, что учтены все площадки и, значит, всевозможные значения касательных напряжений. Но ведь и на диаграмме Мора представлены все напряжения и на всех площадках. Что даст их осреднение непосредственно по области S ? Ответу на этот вопрос посвящен цикл работ, выполненных в лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред [62, 63]. Получен ряд новых инвариантов, которые можно применять при формулировке критериев пластичности и разрушения, а также использовать для формулировки новых моделей ассоциированного и различных неассоциированных законов течения. Осреднение нормальных напряжений σ_n дало новый инвариант σ' , отличный от классического гидростатического давления $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, в виде $\sigma' = (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3)/4 = 0.5((\sigma_1 + \sigma_2)/2 + (\sigma_2 + \sigma_3)/2)$. Величина σ' тоже представляет собой среднее давление: сначала берутся средние между σ_1 и σ_2 , а также между σ_2 и σ_3 , затем — среднее от полученных средних.

В теории пластичности классическим и широко используемым является критерий Треска $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$. В качестве недостатка часто указывается на то, что здесь никак не учитывается промежуточное главное напряжение σ_2 . Осреднение по всем значениям касательного напряжения τ_n , каждое из которых определяется $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, дает неожиданный результат. Все значения промежуточного напряжения σ_2 взаимно уничтожаются и в итоге получается критерий Треска (без предположения об исключении роли промежуточного напряжения).

Внутреннее трение, как известно, относится к основному свойству геоматериалов. Его описание связано с анализом поведения отношения касательных напряжений к нормальным: $|\tau_n|/|\sigma_n|$. Осреднение по данному параметру привело к новым, логарифмическим инвариантам тензора напряжений, которые содержат $\ln(|\sigma_i|/|\sigma_j|)$, $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$. Осреднение по дугам окружностей диаграммы Мора также приводит к инвариантам относительно логарифмов с коэффициентами, равными параметру Лоде–Надаи. Отметим, что изначально этот параметр вводился как эмпирический для характеристики вида напряженного состояния. В описанной работе этот параметр получен в результате теоретического исследования.

Разработанные новые критерии могут быть использованы при формулировке условий предельного состояния породных массивов, грунтов, горной массы после дробления пород и включения этих критериев в численные расчеты по анализу устойчивости и разрушения массивов в окрестности выработанного пространства.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И РАЗРУШЕНИЙ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Во многих технологиях добычи твердых полезных ископаемых в качестве способов разрушения массивов горных пород применяются взрывные воздействия. В Институте силами лаборатории механики взрыва и разрушения горных пород (и. о. зав. лаб. д. ф.-м. н. Е. Н. Шер)

на протяжении ряда лет проводятся исследования формирования трещин при взрыве удлиненных шпуровых и скважинных зарядов в монолитной горной породе. Процесс трещинообразования происходит следующим образом. После детонации заряда вглубь породы от скважины распространяется упругая волна сжатия, а за ней — фронт волны дробления. После остановки волны дробления фиксируется радиальное смещение упругой среды на границе с раздробленной породой. Достигнутое на этом этапе взрыва расширение упругой среды в последующем сохраняется за счет сопротивления радиальному сжатию раздробленной породы вследствие трения на контактах блоков. В целом такое расширение приводит к развитию в упругой зоне массива системы трещин, близких к радиальным.

В пространственной постановке для оценки размеров и формы трещин разработано программное обеспечение. В численных алгоритмах использовался метод разрывных смещений, предложенный Краучем и Старфилдом для плоских задач теории упругости [64]. Для моделирования подрастания трещин применялся критерий Новожилова, в соответствии с которым развитие трещины происходит в областях, где осредненные растягивающие напряжения превышают прочность среды на растяжение. Показана связь этого критерия с критерием Ирвина. Здесь рост трещины связывается с достижением коэффициента интенсивности напряжений критического значения на кромке трещины.

Рассмотрены случаи взрыва одиночного удлиненного заряда и сближенных зарядов, расположенных на большой глубине и вблизи свободной поверхности [65, 66]. Определены параметры расположения зарядов, при которых площадь радиальных трещин максимальна. Проведена модификация разработанных алгоритмов и программ на случай, когда в массиве присутствуют слои с пониженной и повышенной прочностью [67, 68]. Расчеты показали, что для равномерного разрушения породы вдоль скважины необходимо корректировать погонное распределение заряда взрывчатого вещества в зависимости от прочности пород слоистого массива. На рис. 9 показаны примеры расчета форм трещин, образующихся при взрыве шпуровых зарядов.

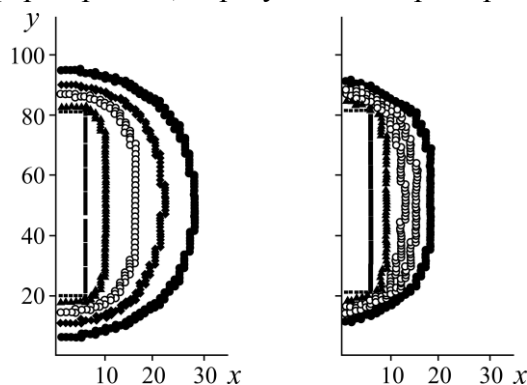


Рис. 9. Примеры расчетных форм трещин при взрыве шпуровых зарядов [66], в качестве единицы длины принят шаг расчетной сетки, равный 0.01 м

Уже отмечалось, что современные тенденции развития механики горных пород связаны в первую очередь с учетом блочности строения массива. Согласно концепции Садовского [17], массив горных пород можно представить в виде системы блоков различных масштабов. Пороговое пространство между блоками заполнено более слабыми трещиноватыми породами. Наличие прослоек с ослабленными прочностными свойствами приводит к тому, что деформирование блочного массива происходит в основном за счет их податливости. При динамическом воздействии за счет податливости прослоек в среде распространяются низкочастотные возмущения.

В лаборатории механики взрыва и разрушения горных пород выполнен ряд расчетов и получены численные решения задач о распространении возмущений в среде, представленной системой жестких блоков, связанных упругими демпферами (пружинами) [69, 70]. На рис. 10 приведены результаты расчета затухающих переходных низкочастотных волн в двумерных блочных решетках с упругими прослойками. Показано, что уравнения, характеризующие двумерное деформирование квадратной решетки, можно записать в виде двух линейно независимых волновых уравнений, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию. По аналогии с теорией упругости одно уравнение описывает распространение продольных волн, а другое — распространение поперечных волн в решетке.

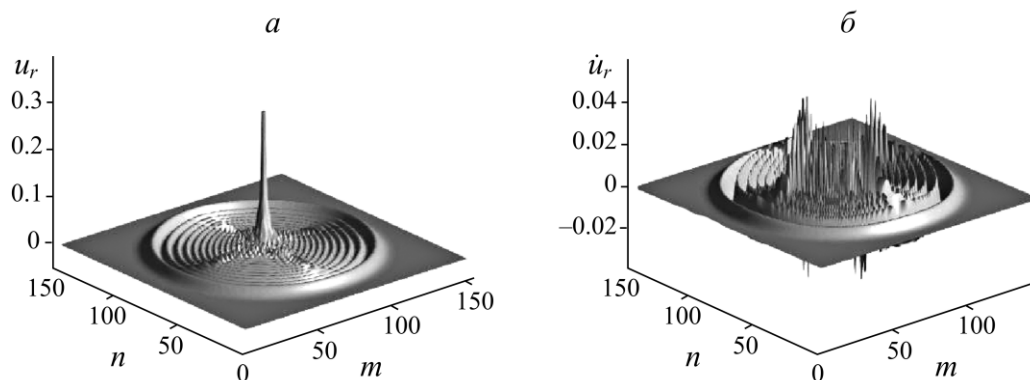


Рис. 10. Зависимость радиального перемещения (а) и радиальной скорости (б) от координат в некоторый фиксированный момент времени [70]. Координаты n, m — номера сосредоточенных масс решетки, соединенных пружинами единичной длины

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

Более половины мировых запасов разведанных углеводородов сосредоточены в месторождениях с низкопроницаемыми коллекторами, что требует разработки и применения специальных технологий для их добычи. Одним из наиболее эффективных методов интенсификации добычи углеводородного сырья является технология гидравлического разрыва пласта (ГРП). Технология ГРП заключается в создании высокопроницаемых трещин путем нагнетания в нефтели или газоносный пласт жидкости под избыточным давлением, достаточным для инициации и роста трещин. На первом этапе под высоким давлением производится закачка жидкости для инициации и формирования трещин, на следующем этапе в жидкость может добавляться проппант (гранулированный материал) с целью заполнения его частицами каналов трещин. После остановки закачки и сброса давления рабочей жидкости проппант выполняет функцию расклинивающего агента. С одной стороны, он препятствует смыканию берегов трещин под действием горного давления, с другой — за счет пористости упаковки обеспечивает фильтрацию нефти или газа. В настоящее время ГРП широко применяется как для повышения нефтеотдачи коллекторов [71–73], так и для дегазации угольных пластов [74, 75] с целью предотвращения внезапных выбросов угля и газа.

В ИГД СО РАН математическое и численное моделирование гидроразрыва пласта развивается по нескольким различным направлениям. В лаборатории физических методов воздействия на массив горных пород (зав. лаб. д. т. н. С. В. Сердюков) разработана модель и программное обеспечение, встраиваемое в программный комплекс ABAQUS, для численного моделирования гидроразрыва породного массива в пространственной постановке с использованием расширен-

ного метода конечных элементов (XFEM) [76–79]. Выполнены численные расчеты и исследованы закономерности развития трещин гидроразрыва в пороупругом неоднородно-напряженном массиве горных пород. Получены решения задач для ГРП с щелевым инициатором на забое скважины, с щелевым инициатором поперек оси скважины, ориентированной произвольно относительно главных напряжений, в окрестности горной выработки кругового поперечного сечения (рис. 11, 12).

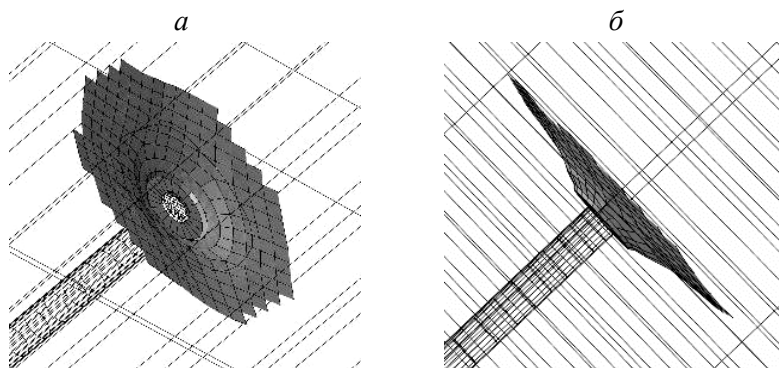


Рис. 11. Расчетная форма трещины гидроразрыва в изотропной упругой ненагруженной среде при торцевом расположении щелевого инициатора глубиной, равной радиусу скважины: *а* — изометрический вид; *б* — вид сбоку [78]

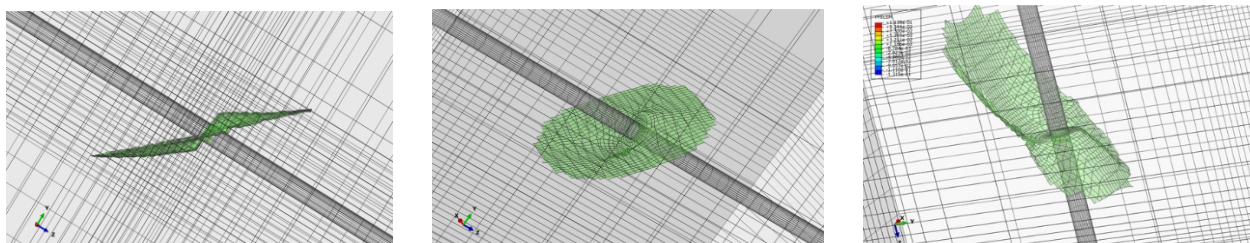


Рис. 12. Результаты моделирования развития гидроразрыва с поперечным щелевым инициатором при различных углах ориентации направлений главных напряжений относительно угла скважины [79]

Силами лаборатории механики взрыва и разрушения горных пород развивается подход, при котором в пласте за счет предварительно созданных зародышевых инициаторов последовательно формируется система параллельных трещин гидроразрыва на заданном конечном расстоянии друг от друга [80, 81]. Для численного моделирования поинтервального гидроразрыва разработано программное обеспечение с использованием метода разрывных смещений. Последовательное развитие трещин приводит к тому, что сформированные на начальной стадии трещины существенно изменяют напряженное состояние в окружающем массиве, оказывая влияние на формирование последующих трещин. В результате последующие трещины отклоняются от плоскости, ортогональной оси скважины. Даны расчеты траекторий развития трещин ГРП при различных значениях параметров массива и различных нагнетающих жидкостях.

В лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред исследована связь между двумя процессами: деформированием проппантного слоя под действием горного давления и изменением горного давления в окружающем массиве при сбросе давления нагнетающей жидкости [82]. При моделировании деформирования проппанта (задача механики сыпучих

сред) использован численный метод дискретных элементов, реализованный в среде Altair EDEM. Для моделирования перераспределения горного давления при сбросе давления жидкости (задача механики горных пород) применялись континуальная модель горной породы как среды с внутренними источниками и стоками энергии, численный метод конечных элементов и расчетный программный комплекс собственной разработки.

С помощью комплексного численного моделирования показано, что в зависимости от предварительной истории нагружения и свойств среды в породном массиве могут реализовываться как устойчивый, так и неустойчивый режимы деформирования. Для устойчивого режима рассчитано равновесное давление на контуре трещины гидроразрыва, дана оценка конечной пористости проппантного слоя при сбросе давления нагнетающей жидкости. Если реализуется неустойчивый режим деформирования, то статическое равновесное состояние при сбросе давления нагнетающей жидкости не достигается и в породном массиве наблюдаются динамические проявления горного давления (рис. 13).

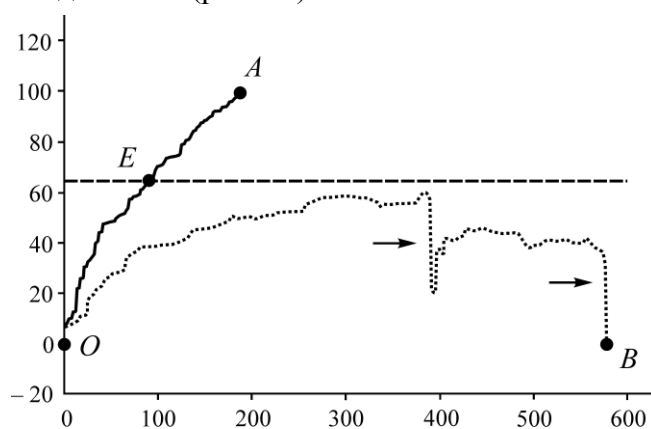


Рис. 13. Диаграмма разгрузки пласта полезного ископаемого: *OA* — устойчивое поведение; *OB* — неустойчивое поведение, стрелками показаны участки динамических скачков разупрочнения (неконтролируемое высвобождение накопленной в массиве упругой энергии). Пунктирная линия — уровень равновесного давления [82]

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ ПОРОД

Бурный рост вычислительных возможностей компьютерной техники за последние полвека наложил огромный отпечаток на развитие методов математического и численного моделирования в механике. Широко известный метод конечных элементов начал активно развиваться в мировой науке на рубеже 1950–1960 гг. При этом данный метод опирается на континуальные представления о массиве горных пород и, следовательно, требует использования соответствующей математической модели среды.

С конца 1970-х годов начал активно развиваться иной подход, основанный на использовании метода дискретных элементов (МДЭ). Здесь сплошная среда моделируется ансамблем дискретных недеформируемых частиц, а ее свойства определяются только формой частиц, их начальной упаковкой и заданием потенциалов взаимодействия между частицами. Моделирование процесса деформирования сводится к интегрированию уравнений движения частиц на основе сил, возникающих за счет перекрытий между частицами при их относительном движении [83–85].

МДЭ имеет ряд преимуществ перед континуальными методами механики сплошной среды. В нем в рамках единого подхода учитываются физическая нелинейность, большие (конечные) деформации, локализация сдвигов, разрушение. Наряду с очевидными преиму-

ществами, одним из существенных недостатков МДЭ является трудность интерпретации результатов расчетов. Дело в том, что, располагая только информацией о микросвойствах (форма частиц, их начальная упаковка и потенциалы взаимодействия), невозможно заранее предсказать, какие континуальные макросвойства будет иметь образец, составленный из множества дискретных частиц. Если при использовании континуальных моделей всегда есть гарантия, что любой макрообъем среды будет обладать набором свойств, заложенных в определяющих уравнениях для бесконечно малого элементарного объема, то при использовании МДЭ такой гарантии нет.

В ИГД СО РАН методы численного моделирования для тел, представленных набором дискретных частиц, начали развиваться во второй половине 1980-х годов. На первоначальном этапе это были стохастические модели клеточных автоматов, применяемые для моделирования смешения порошковых материалов, кинематики выпуска раздробленной горной массы из сходящихся каналов и камер, сдвижения частиц среды за подпорной стенкой [86–88]. Дальнейшее развитие моделей клеточных автоматов привело к необходимости использования метода дискретных элементов.

В настоящее время в Институте разработано два независимых программных комплекса, реализующих различные версии метода дискретных элементов, — в лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред (зав. лаб. д. ф.-м. н. А. Ф. Ревуженко) и в группе прикладной геомеханики (рук. группы д. т. н. С. Б. Стажевский), а также разработан ряд программных приложений: по генерации начальных упаковок частиц, или “цифровых образцов”, с заданной начальной плотностью и с различной формой частиц, включая несферическую форму; по реализации различных режимов нагружения образцов, в том числе сложные пути нагружения; по обработке результатов расчетов.

Один из предложенных алгоритмов генерации начальных упаковок основан на оригинальной идее использования механики Аристотеля [89]. Как известно, в механике Аристотеля постулируется, что сила, действующая на тело, определяет скорость его движения, а не ускорение. Здесь не возникает проблем с силами инерции и необходимостью введения искусственного механизма диссипации энергии (вязкости). Кроме того, понижается порядок дифференциальных уравнений со второго до первого. Главным является то обстоятельство, что уравнения для статической равновесной упаковки частиц являются одинаковыми как для ньютоновской, так и для аристотелевской механик — в обоих случаях сумма сил и моментов сил, действующих на каждую частицу, должны равняться нулю.

На базе разработанных алгоритмов генерации упаковок создано “цифровое зернохранилище” из нескольких десятков “цифровых образцов” с различными заданными свойствами и разработаны программные приложения по реализации способов нагружения при всестороннем сжатии, сдвиге, различных программах независимого трехосного сжатия, при сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей деформаций и сложном нагружении с резкими изломами траектории деформирования.

В последние годы с использованием МДЭ выполнен большой объем численных расчетов и дан анализ полученных результатов с позиций континуальной механики, решен ряд задач деформирования механики сыпучих сред и горных пород в различных постановках [90–103]. Показано, что модель МДЭ при соответствующем выборе параметров и траекторий нагружения согласуется с моделью линейно деформируемого тела, рядом моделей пластического деформирования, адекватно предсказывает переход среды в предельное состояние, описывает процесс локализации деформаций и разрушения (рис. 14, 15).

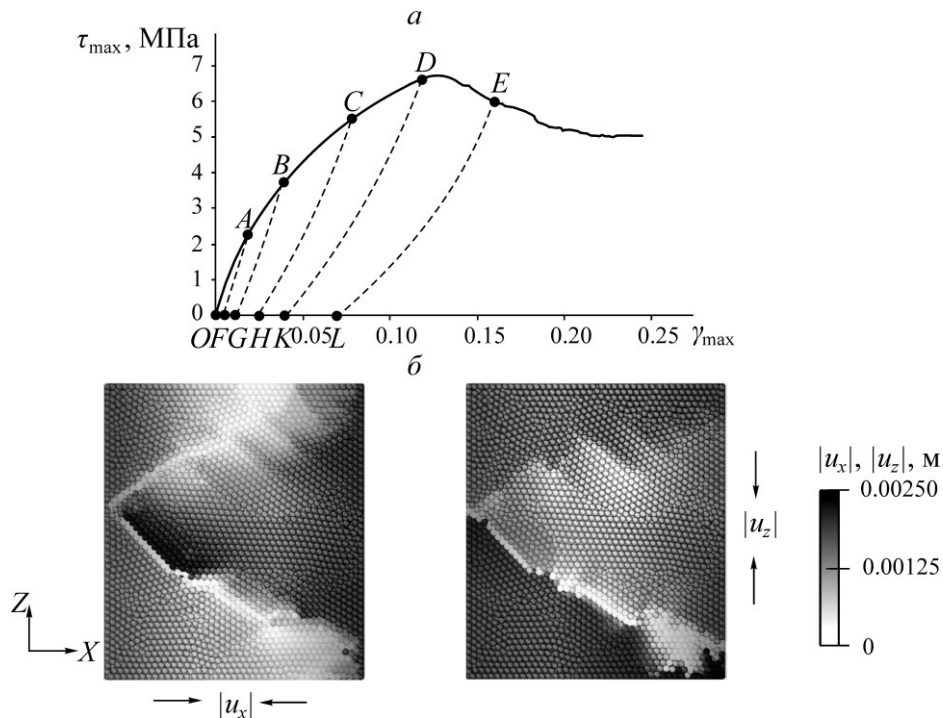


Рис. 14. Макродиаграмма нагружения образца сыпучей среды при неравнокомпонентном трехосном сжатии (а); профиль скоростей частиц в сечении образца плоскостью в момент потери устойчивости и перехода среды к локализованному режиму деформирования (точка D на диаграмме) (б) [94]

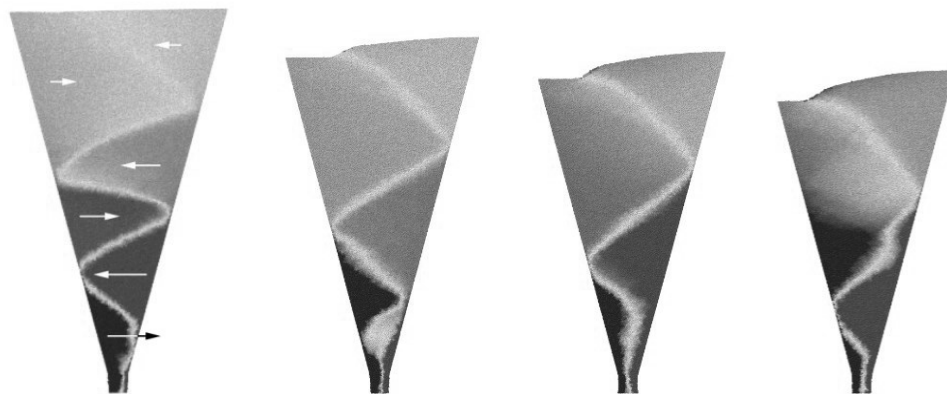


Рис. 15. МДЭ-моделирование гравитационного течения сыпучей среды в сходящемся радиальном канале в условиях локализации деформаций. Распределение горизонтальных смещений в частицах свидетельствует о разбиении материала на блоки, которые движутся практически как жесткие [98]

НЕЛОКАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРИКОНТУРНОЙ ЗОНЕ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ

Классический подход к построению моделей сплошных сред опирается на предположение о гладкости (локальной аффинности) поля смещений в пределах любого бесконечно малого элементарного объема — гипотеза о диффеоморфизме [104]. Кроме того, в литературе встречается понятие среды с микроструктурой [105–108]. В такой среде каждая бесконечно малая “точка” несет в себе информацию о структуре материала. По сравнению с классической

сплошной средой в “точках” среды с микроструктурой чаще всего вводятся дополнительные кинематические степени свободы, а при описании силового взаимодействия между элементами среды может использоваться не только вектор сил, но и вектор моментов сил.

Развитие подобного рода теорий берет начало с работ Фойгта [109] и братьев Коссера [110]. Позднее в рамках данного направления было выполнено большое число работ и построено много различных теорий, которые обобщенно можно охарактеризовать как теории нелокального типа. Классические континуальные теории образуют класс строго локальных теорий. В [111] сделан достаточно подробный обзор теорий нелокального типа.

Наряду с развитием собственно теорий нелокального типа, ряд авторов предложили решение ряда конкретных задач. Одна из них заслуживает особого внимания — концентрация напряжений вокруг кругового отверстия [112–114]. Установлено, что решение зависит от соотношения радиуса отверстия и характерного для нелокальной модели параметра длины. Когда размер отверстия становится сопоставим с характерной длиной, максимальная концентрация напряжений, рассчитанная по нелокальной теории, оказывается меньше значения, которое дает классическая теория.

В ИГД СО РАН в лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред разработана оригинальная математическая модель нелокального типа, в которой предположение о гладкости поля смещений существенно ослаблено [115–117]. Для описания кинематики вместо одного гладкого поля смещений вводится два (в плоском случае) или три (в пространственном случае) независимых гладких поля смещений. Обосновано, что введенные дополнительные степени свободы позволяют описать локальную неоднородность бесконечно малого объема (точки) среды — локальные изгибы. Как следствие, в модели появляется структурный параметр, содержащий размерность длины. В случае, когда структурный параметр равен нулю, модель переходит в классическую линейную теорию упругости. Исследован вклад локальных изгибов в деформации и повороты среды, рассмотрены кинематические условия совместности, даны формулировки корректных краевых задач, доказана теорема единственности решения. Разработаны обобщения модели на случай учета относительных проскальзываний между зернами среды как в касательном, так и в нормальном направлениях. Последнее позволяет описать основные свойства горной породы — упругопластическое поведение, сцепление, внутреннее трение, дилатансию.

Отметим, что, судя по данным литературных источников, модели нелокального типа применялись в основном для расчета концентрации напряжений в элементах конструкций и деталей машин. В ИГД СО РАН предложено подобные модели использовать для анализа концентрации напряжений в породных массивах вблизи выработанного пространства.

На основе разработанного подхода и созданных моделей нелокального типа предложена оригинальная разностная схема расчета, опирающаяся в зависимости от размерности пространства на две или на три вложенные друг в друга разностные сетки, разнесенные относительно друг друга по пространству с определенным шагом. В узлах каждой из сеток определяется только одно из двух (или из трех) независимых полей смещений и только часть компонент тензора напряжений. Даны примеры расчета краевых задач и продемонстрирована численная сходимость и устойчивость предложенной разностной схемы [118].

С использованием разработанных моделей нелокального типа и разностных схем выполнено численное моделирование и дан анализ концентрации напряжений в приконтурной зоне массива в задачах о деформировании целика горной породы [119], о деформировании массива вокруг выработки [120], о перераспределении опорного давления при подвигании фронта очистного забоя (рис. 16) [121]. Показана роль локальных изгибов и пластических сдвигов

в развитии процесса деформирования массива. Установлено, что увеличение значения структурного параметра приводит к определенному снижению максимальной концентрации напряжений в приконтурной зоне массива с одновременным более глубоким распространением зоны повышенной концентрации от контура выработанного пространства вглубь массива. Последнее происходит за счет формирования более длинных силовых цепочек, передающих нагрузку от контура выработки вглубь массива. Можно ожидать, что при наличии в массиве областей самоуравновешенных напряжений описанное явление способно спровоцировать их вывод из равновесного состояния и привести к динамическому высвобождению накопленной упругой энергии.

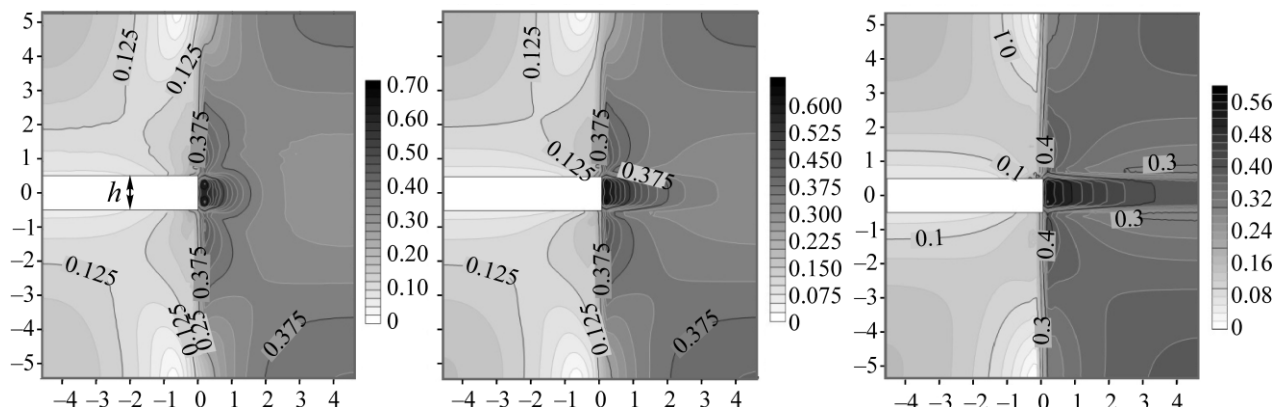


Рис. 16. Пример расчета области распространения высокой концентрации напряжений вглубь массива по мере увеличения значения структурного параметра [121]. Изолинии максимальных касательных напряжений показаны в долях от характерного давления на глубине залегания выработки γH , размеры области — в долях от мощности пласта полезного ископаемого (высоты выработки) h .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные направления развития методов математического и численного моделирования в ИГД СО РАН связаны с разработкой оригинальных математических моделей нового поколения с учетом внутренней структуры пород и с созданием на их основе численных алгоритмов и программных комплексов. Разрабатываются собственные программные средства для анализа НДС породных массивов в квазистатических и динамических задачах, а также отдельные подпрограммы для встраивания в коммерческие программные пакеты ANSYS, ABAQUS, COMSOL, EDEM, на которые в Институте имеются академические лицензии.

Результаты научных работ, проводимых в ИГД СО РАН, получили признание как у нас в стране, так и за рубежом. Большинство из них опубликовано в виде научных статей и отчетов по проектам Фундаментальных научных исследований, Федеральных целевых программ, Российского фонда фундаментальных исследований, Российского научного фонда. Итоги математического моделирования востребованы на ряде ведущих горнодобывающих предприятий России в качестве отчетов по хозяйственным договорам, где дается обоснование эффективности и безопасности применяемых на данных предприятиях геотехнологий (ПАО ГМК Норильский никель, ПАО АК Алроса, АО Апатит, АО СУЭК-Кузбасс, АО ЕВРАЗ ЗСМК и др.). Монография д. ф.-м. н., проф. А. Ф. Ревуженко “Механика сыпучих сред”, в которой приведены результаты лабораторных экспериментов и численных расчетов, переведена на английский язык и издана за рубежом в издательстве Springer [122]. Программа научных исследований

и инноваций по развитию национальной горно-металлургической промышленности Швеции на период до 2030 г. в части горной программы, посвященной изучению поведения раздробленной горной массы, опирается на работы группы прикладной геомеханики под руководством д. т. н. С. Б. Стажевского [123, 124]. Результаты по формированию регулярных диссипативных структур, полученные в лаборатории механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, вошли в концепцию современного естествознания [125].

Автор выражает благодарность к. т. н. А. В. Азарову, д. ф.-м. н. Н. И. Александровой, к. т. н. В. Д. Барышникову, к. ф.-м. н. Л. Н. Гаховой, Д. С. Журкиной, к. т. н. С. В. Клишину, к. т. н. В. П. Косых, к. ф.-м. н. А. А. Красновскому, д. т. н. А. В. Леонтьеву, к. ф.-м. н. О. А. Микениной, д. ф.-м. н. Л. А. Назарову, д. ф.-м. н. Л. А. Назаровой, д. т. н. А. А. Неверову, д. т. н. С. А. Неверову, д. ф.-м. н. А. Ф. Ревуженко, к. т. н. Е. П. Русину, д. т. н. С. В. Сердюкову, д. т. н. В. М. Серякову, д. т. н. С. Б. Стажевскому, к. ф.-м. н. Г. Н. Хану, д. ф.-м. н. Е. Н. Шеру за предоставленные материалы своих исследований и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Heim A.** Mechanismus der Gebirgsbildung im Anschluss an die geologische, Monographie der Toedti-Windgaellen-Gruppe, Bäle, 1878. — 368 p.
2. **Динник А. Н.** О давлении горных пород и расчет крепи круглой шахты // Инж. работник. — 1925. — № 7. — С. 1–12.
3. **Курленя М. В., Попов С. Н.** Теоретические основы определения напряжений в горных породах. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983. — 96 с.
4. **Курленя М. В., Гужова С. В., Кулаков Г. И.** Жесткие датчики напряжений для геомеханических измерений. — Новосибирск: Наука, 1990. — 55 с.
5. **Кулаков Г. И.** Использование фотоупругих датчиков в методе полной разгрузки // ФТПРПИ. — 1980. — № 5. — С. 116–120.
6. **Леонтьев А. В., Попов С. Н.** Опыт практического применения измерительного гидроразрыва // Горн. журн. — 2003. — № 3. — С. 37–43.
7. **Леонтьев А. В., Рубцова Е. В., Леконцев Ю. М., Качальский В. Г.** Измерительно-вычислительный комплекс “Гидроразрыв” // ФТПРПИ. — 2010. — № 1. — С. 104–110.
8. **Rubtsova E. V. and Skulkin A. A.** Hydraulic fracturing stress measurement in underground salt rock mines at Upper Kama Deposit, IOP Conference Series: Earth Environ. Sci., 2018, Vol. 134, Issue 1, 012049.
9. **Неверов С. А., Неверов А. А., Конурин А. И., Адылканова М. А., Орлов Д. В.** Применение нейронных сетей для определения изменения напряжений в массиве пород методом фотоупругости // ФТПРПИ. — 2023. — № 6. — С. 137–142.
10. **Сердюков С. В., Курленя М. В., Патутин А. В., Рыбалкин Л. А., Шилова Т. В.** Экспериментальная проверка способа направленного гидроразрыва горных пород // ФТПРПИ. — 2016. — № 4. — С. 3–11.
11. **Курленя М. В., Барышников В. Д., Барышников Д. В., Гахова Л. Н., Качальский В. Г., Хмелинин А. П.** Разработка и совершенствование скважинных методов оценки и контроля напряженно-деформированного состояния инженерных горных сооружений // ФТПРПИ. — 2019. — № 4. — С. 182–195.

12. Пат. RU 2699295 С1. Способ определения напряженно-деформированного состояния массива горных пород методом параллельных скважин / В. Д. Барышников, Д. В. Барышников, А. П. Хмелинин // Оpubл. в БИ. — 2019. — № 25. — 17 с.
13. Шемякин Е. И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений руды и угля // ФТПРПИ. — 1975. — № 6. — С. 29–45.
14. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 3. — С. 130–133.
15. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Кинематика деформирования сыпучей среды с невязким трением // ПМТФ. — 1974. — № 4. — С. 119–124.
16. Шемякин Е. И. О свободном разрушении твердых тел // ДАН СССР. — 1988. — Т. 300. — № 5. — С. 1090–1094.
17. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–831.
18. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. О свойстве дискретности горных пород // Известия АН СССР. Физика Земли. — 1982. — № 12. — С. 337–352.
19. Кочарян Г. Г., Спивак А. А. Динамика деформирования блочных массивов горных пород. — М.: ИКЦ “Академкнига”, 2003. — 422 с.
20. Мороз А. И. Самонапряженное состояние горных пород. — М.: МГТУ, 2004. — 288 с.
21. Пономарев В. С. Проблемы изучения энергетически активной геологической среды // Геотектоника. — 2011. — № 2. — С. 66–75.
22. Адушкин В. В., Кочарян Г. Г., Остапчук А. А. О параметрах, определяющих долю энергии, излучаемой при динамической разгрузке участка массива горных пород // ДАН. — Т. 467. — № 1. — 2016. — С. 86–90.
23. Ставрогин А. Н., Ширкес О. А. Явление последствия в горных породах, вызванное предшествующей необратимой деформацией // ФТПРПИ. — 1986. — № 4. — С. 16–27.
24. Адушкин А. А., Горнов В. В., Курленя М. В., Опарин В. Н., Ревуженко А. Ф., Спивак А. А. Знакопеременная реакция горной породы на динамическое воздействие // ДАН СССР. — Т. 323. — № 2. — 1992 — С. 263–269.
25. Kosykh V. P. Change in the elastic and rheological properties of structurally heterogeneous geomaterials under multiple weak impacts, IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2022, Vol. 991 — 010043.
26. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Об одной экспериментальной модели горной породы // ФТПРПИ. — 1991. — № 4. — С. 24–30.
27. Ревуженко А. Ф. Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск, НГУ, 2000. — 428 с.
28. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. О деформировании блочной среды вокруг выработки // ФТПРПИ. — 1990. — № 6. — С. 7–15.
29. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. О модели деформирования целиков с учетом эффектов аккумуляции энергии и разупрочнения материала // ФТПРПИ. — 1994. — № 6. — С. 12–23.
30. Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F. Mathematical modeling of deformation of self-stress rock mass surrounding a tunnel, Desiderata Geotechnica, Springer Nature Switzerland AG, W. Wu (ed.), 2019. — P. 79–85.

31. **Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Математическое моделирование неустойчивого режима деформирования породного массива с учетом внутренних самоуравновешенных напряжений // ФТПРПИ. — 2020. — № 6. — С. 12–29.
32. **Ревуженко А. Ф.** Математический анализ функций неархимедовой переменной: специализированный математический аппарат для описания структурных уровней геосреды. — Новосибирск: Наука, 2012. — 327 с.
33. **Ревуженко А. Ф.** О приложениях неархимедова анализа в механике блочно-иерархической геосреды // ФТПРПИ. — 2016. — № 5. — С. 14–22.
34. **Лавриков С. В., Микенина О. А., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой // Физическая мезомеханика. — 2008. — № 3. — Т. 11. — С. 45–60.
35. **Ревуженко А. Ф.** О многомасштабных математических моделях геосреды // ФТПРПИ. — 2022. — № 3. — С. 3–12.
36. **Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F.** A non-Archimedean number system to characterize the structurally inhomogeneous rock behavior nearby a tunnel, J. Rock Mech. Geotechnical Eng., 2011, Vol. 3, No. 2. — P. 153–160.
37. **Ревуженко А. Ф.** Однородная деформация сплошной среды // ПМТФ. — 1997. — Т. 38. — № 3. — С. 131–139.
38. **Ревуженко А. Ф.** Приливные волны и направленный перенос масс Земли. — Новосибирск: Наука, 2013. — 204 с.
39. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. Ph.** Complex loading of heterogeneous materials with redistribution of internal mass, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1998, Vol. 29. — P. 85–91.
40. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. Ph.** Hypoplastic simulation of complex loading path, Constitutive modelling of granular materials / D. Kolymbas (ed.), Berlin, Heidelberg, N.Y., Springer-Verlag, 2000. — P. 539–554.
41. **Лавриков С. В.** К расчету дифференциального вращения жесткого ядра при сложном нагружении гипопластических сред // ПМТФ. — 2002. — Т. 43. — № 6. — С. 75–83.
42. **Краус Е. И., Лавриков С. В., Медведев А. Е., Ревуженко А. Ф., Шабалин И. И.** Моделирование эффекта дифференциального вращения при сложном нагружении сыпучих сред // ПМТФ. — 2009. — Т. 50. — № 4. — С. 139–149.
43. **Серяков В. М.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния массива горных пород при применении технологии с закладкой выработанного пространства // ФТПРПИ. — 2014. — № 5. — С. 51–60.
44. **Серяков В. М.** Расчет напряженного состояния горных пород с учетом последовательности отработки и закладки рудных тел на больших глубинах // ФТПРПИ. — 2021. — № 6. — С. 18–26.
45. **Серяков В. М., Красновский А. А.** Напряженное состояние крепи и окрестности выработки при ведении подготовительных работ в неустойчивых горных породах // ФТПРПИ. — 2022. — № 6. — С. 43–52.
46. **Серяков В. М., Красновский А. А.** Оценка напряженно-деформированного состояния массива при заполнении вывалов пород в кровле выработки фенольными смолами // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2020. — Т. 7. — № 1. — С. 144–148.

47. **Серяков В. М.** Разработка алгоритмов решения задач теплопроводности для расчетов напряженного состояния массива с учетом последовательности ведения очистных и закладочных работ // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2022. — Т. 9. — № 3. — С. 54–59.
48. **Серяков В. М.** Расчет термонапряженного состояния массива горных пород в окрестности очистных выработок // *ФТПРПИ.* — 2023. — № 6. — С. 31–41.
49. **Барышников В. Д., Барышников Д. В., Гахова Л. Н.** Прогнозная оценка напряженного состояния подкарьерного массива и наблюдательной выработки в процессе развития очистных работ // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2020. — Т. 7. — № 1. — С. 18–22.
50. **Барышников В. Д., Гахова Л. Н.** Формирование напряженно-деформированного состояния массива в окрестности горных выработок при слоевой системе разработки крутопадающих рудных тел // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2017. — Т. 4. — № 2. — С. 32–36.
51. **Назаров Л. А., Назарова Л. А., Мирошниченко Н. А., Панов А. В., Дядьков П. Г., Цибизов Л. В.** Сезонные вариации уровня озера Байкал и слабая сейсмичность Байкальской рифтовой зоны // *ГИАБ.* — 2018. — № 2. — С. 140–147.
52. **Nazarova L. A. and Nazarov L. A.** Method for weak zones location at the coal-bed — host rock joint relative to the problem of sudden outbursts: theory and laboratory experiment, *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2023, Vol. 17, No. 63. — P. 13–25.
53. **Tcheverda V. A., Епов М. И., Nazarov L. A., Nazarova L. A., and Romenskii E. I.** Acoustic method for defining the stress state of a rock massif based on solution of the seismic inverse problem, *Doklady Earth Sci.*, 2016, Vol. 466 (2). — P. 210–213.
54. **Назарова Л. А., Назаров Л. А., Голиков Н. А.** Оценка реологических свойств пород-коллекторов пластов баженовской свиты по данным термобарических испытаний // *ФТПРПИ.* — 2017. — № 3. — С. 22–28.
55. **Назаров Л. А., Голиков Н. А., Скулкин А. А., Назарова Л. А.** Экспериментальное определение фильтрационных свойств трещиновато-пористых геоматериалов в рамках модели среды с двойной проницаемостью // *ФТПРПИ.* — 2023. — № 4. — С. 11–23.
56. **Васичев С. Ю., Конурин А. И., Неверов С. А., Неверов А. А.** Исследование показателей извлечения руды при системе подэтажного обрушения с торцовым выпуском на больших глубинах // *Горн. журн.* — 2023. — № 1. — С. 47–53.
57. **Неверов А. А., Конурин А. И., Неверов С. А., Кудря А. О.** Численное моделирование напряженно-деформированного состояния элементов арочной металлической трехзвенной податливой крепи // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2021. — Т. 8. — № 2. — С. 110–117.
58. **Неверов С. А., Неверов А. А., Щукин С. А., Шапошник Ю. Н., Никольский А. М.** Обоснование отработки подкарьерных запасов золотосодержащего месторождения восходящей выемкой с породной закладкой // *ФТПРПИ.* — 2020. — № 4. — С. 79–93.
59. **Конурин А. И., Неверов С. А., Неверов А. А., Щукин С. А.** К проблеме численного моделирования напряженно-деформированного состояния и устойчивости трещиноватого массива // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2019. — Т. 6. — № 2. — С. 144–150.
60. **Неверов А. А., Неверов С. А., Васичев С. Ю.** Сравнительный анализ численного и физического моделирования напряженно-деформированного состояния массива горных пород // *Вестн. КузГТУ.* — 2013. — Т. 98. — № 4. — С. 14–22.

61. **Новожилов В. В.** К основам теории равновесных трещин в хрупких телах // Прикладная математика и механика. — 1969. — Т. 33. — № 5. — С. 797–812.
62. **Ревуженко А. Ф.** О критериях разрушения горных пород, основанных на новой системе инвариантов тензора напряжений // ФТПРПИ. — 2014. — № 3. — С. 33–39.
63. **Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Критерии предельного состояния идеально связных и сыпучих тел // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2014. — № 1. — Т. 1. — С. 280–284.
64. **Crouch S. L. and Starfield A. M.** Boundary element methods in solid mechanics, London, 1983. — 322 p.
65. **Шер Е. Н.** Форма и размеры радиальных трещин, образующихся при взрыве двух сближенных скважинных зарядов // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2016. — Т. 1. — № 3. — С. 250–255.
66. **Шер Е. Н.** Развитие системы плоских радиальных трещин при взрыве удлиненных шпуровых и скважинных зарядов // ПМТФ. — 2017. — Т. 58. — № 5. — С. 201–207.
67. **Шер Е. Н.** Определение формы и размеров радиальных трещин в слоистом породном массиве, образующихся при взрыве скважинных зарядов и гидроразрыве // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 266–270.
68. **Шер Е. Н.** Моделирование развития трещин в слоистом породном массиве при взрыве скважинных зарядов и гидроразрыве // ФТПРПИ. — 2020. — № 6. — С. 42–53.
69. **Александрова Н. И.** Волны маятникового типа на поверхности блочного породного массива при динамическом воздействии // ФТПРПИ. — 2017. — № 1. — С. 64–69.
70. **Aleksandrova N. I.** The propagation of transient waves in two-dimensional square lattices, Int. J. Solids Structur, 2022, Vol. 234–235. — 111194.
71. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отдел техн. наук. — 1955. — № 5. — С. 3–41.
72. **Perkins T. K. and Kern L. R.** Widths of hydraulic fractures, J. Petroleum Technol., 1961, Vol. 13, No. 9. — P. 937–949.
73. **Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С.** Методы моделирования зарождения и распространения трещин. — Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2016. — 312 с.
74. **Леконцев Ю. М., Сажин П. В.** Технология направленного гидроразрыва пород для управления труднообрушающимися кровлями в очистных забоях и дегазации угольных пластов // ФТПРПИ. — 2014. — № 5. — С. 137–142.
75. **Chen J., Li X., Cao H., and Huang L.** Experimental investigation on the influence of pulsating hydraulic fracturing on pre-existing fractures propagation in coal, J. Pet. Sci. Eng., 2020, Vol. 189. — 107040.
76. **Азаров А. В., Курленя М. В., Сердюков С. В.** Программный комплекс для моделирования гидравлического разрыва пласта при добыче твердых полезных ископаемых // ФТПРПИ. — 2020. — № 5. — С. 206–216.
77. **Azarov A., Patutin A., and Serdyukov S.** Mathematical modeling of hydraulic fracture propagation in poroelastic medium, Int. Multidisciplinary Sci. Geo Conf. SGEM, 2019, Vol. 19. — P. 401–406.
78. **Азаров А. В., Сердюков С. В.** Трехмерное моделирование гидроразрыва изотропной упругой среды с щелевым инициатором на забое скважины // ФТПРПИ. — 2021. — № 6. — С. 61–71.
79. **Азаров А. В., Сердюков С. В.** Моделирование гидроразрыва вблизи выработки круглого сечения в условиях трехосного сжатия // ФТПРПИ. — 2023. — № 5. — С. 55–69.

80. Колыхалов И. В., Мартынюк П. А., Шер Е. Н. Моделирование развития трещин при последовательном поинтервальном гидроразрыве пласта вязкой жидкостью // ФТПРПИ. — 2016. — № 4. — С. 63–47.
81. Шер Е. Н., Колыхалов И. В. Определение форм трещин при поинтервальном гидроразрыве продуктивного пласта // ФТПРПИ. — 2014. — № 6. — С. 70–78.
82. Журкина Д. С., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Об одной модели совместного деформирования проппанта и породного массива при гидроразрыве пласта // ФТПРПИ. — 2023. — № 5. — С. 12–23.
83. Cundall P. A. and Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, 1979, Vol. 29, No. 6. — P. 47–65.
84. Psakhie S. G., Shilko E. V., Grigoriev A. S., Astafurov S. V., Dimaki A. V., and Smolin A. Yu. A mathematical model of particle-particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic-plastic materials, *Eng. Fract. Mech.*, 2014, Vol. 130. — P. 96–115.
85. Zhao J. D. and Guo N. Bridging the micro and macro for granular media: A computational multi-scale paradigm, *Geomechanics from Micro to Macro* (ed. by Soga et al.), London, Taylor & Francis Group, 2015 — P. 747–752.
86. Ревуженко А. Ф. Принципы создания идеальных смесителей порошковых материалов // Порошковая металлургия. — 1989. — № 4.
87. Осинцов В. А. Модель дискретной стохастической среды в задачах деформирования и течения сыпучих материалов // ФТПРПИ. — 1992. — № 5. — С. 44–53.
88. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Стохастические модели в задачах локализованного деформирования сыпучих сред в радиальных каналах // ФТПРПИ. — 2000. — № 1. — С. 12–20.
89. Klishin S. and Mikenina O. DEM generation of particle packs in the Aristotelian mechanics, *AIP Conf. Proc.*, 2021, Vol. 2448. — 020011.
90. Хан Г. Н. О несимметричном режиме разрушения массива горных пород в окрестности полости // Физическая мезомеханика. — 2008. — Т. 11. — № 1. — С. 109–114.
91. Стажевский С. Б., Хан Г. Н. О связи повышенных тектонических напряжений с эндогенными кольцевыми структурами // ФТПРПИ. — 2017. — № 6. — С. 50–60.
92. Стажевский С. Б., Хан Г. Н. Об изменениях напряженно-деформированного состояния месторождений полезных ископаемых // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2017. — Т. 2. — № 2. — С. 157–162.
93. Клишин С. В. Дискретно-элементное моделирование локализации деформаций в сыпучей среде при пассивном давлении на подпорную стенку // ФТПРПИ. — 2021. — № 5. — С. 35–45.
94. Журкина Д. С., Клишин С. В., Лавриков С. В., Леонов М. Г. Моделирование локализации сдвигов и перехода геосреды к неустойчивым режимам деформирования на основе метода дискретных элементов // ФТПРПИ. — 2022. — № 3. — С. 13–22.
95. Клишин С. В. Моделирование площадного выпуска сыпучих сред из камер методом дискретных элементов с учетом несферической формы частиц // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2019. — Т. 6. — № 2. — С. 118–123.

96. **Klishin S. V., Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F.** Discrete element method modification for the transition to a linearly elastic body model, *IOP Conf. Series: J. Phys.*, 2018, Vol. 973. — 012008.
97. **Klishin S. V., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Numerical simulation of abutment pressure redistribution during face advance, *AIP Conf. Proc.*, 2017, Vol. 1909. — 020086.
98. **Клишин С. В., Ревуженко А. Ф.** Локализация сдвигов и образование структуры при течении сыпучей среды в радиальном канале // *ФТПРПИ*. — 2023. — № 1. — С. 22–34.
99. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F.** Modeling accumulation and release of energy in a geo-medium under the influence of tidal forces, In book: *Trigger effects in geosystems*, ed. by G. Kocharyan and A. Lyakhov, *Springer Proc. Earth Environ. Sci.*, Springer Nature Switzerland AG, 2019. — P. 105–113.
100. **Zhurkina D. S. and Lavrikov S. V.** Problem of simple shear in granular medium: Comparison of DEM modeling results and laboratory testing data, *AIP Conf. Proc.*, 2021, Vol. 2448. — 020027.
101. **Косых В. П., Микенина О. А.** Формирование кластеров при двухосном сжатии сыпучей среды // *ФТПРПИ*. — 2022. — № 4. — С. 11–17.
102. **Косых В. П., Микенина О. А.** Формирование временных структур в процессе циклических сдвигов сыпучей среды: численное моделирование и эксперимент // *ФТПРПИ*. — 2023. — № 5. — С. 32–39.
103. **Журкина Д. С., Лавриков С. В.** К вопросу определения макросвойств образцов геоматериалов при простом сдвиге в зависимости от микропараметров метода дискретных элементов // *Динамические процессы в геосферах*. — 2023. — Т. 15. — № 1. — С. 1–10.
104. **Трусов П. В.** Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // *Математическое моделирование систем и процессов*. — 2009. — Т. 17. — С. 85–95.
105. **Миндлин Р. Д.** Микроструктура в линейной упругости // *Механика*. — 1964. — Т. 86. — № 4. — С. 129–160.
106. **Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 416 с.
107. **Эринген А. К.** Теория микрополярной упругости. — М.: Мир, 1975. — Т. 2. — С. 646–752.
108. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. — М.: МГУ, 1999. — 328 с.
109. **Voigt W.** Theoretische studien uber die elastizitatsverhaltnisse der kristalle, *Abh. Koniglichen Gesellschaft Wiss. Gottingen*, 1887. — 34 с.
110. **Cosserat E. and Cosserat F.** *Theorie des corps deformables*, Paris, A. Hermann et fils, 1909. — 226 p.
111. **Смолин И. Ю.** Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // *Моделирование систем и процессов*. — 2006. — № 14. — С. 189–205.
112. **Миндлин Р. Д.** Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // *Механика*. — 1964. — Т. 86. — № 4. — С. 115–128.
113. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наук. думка, 1968. — 887 с.
114. **Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н.** Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // *ПМТФ*. — 2001. — Т. 42. — № 4. — С. 145–154.
115. **Ревуженко А. Ф.** Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // *ПМТФ*. — 2016. — № 5. — С. 45–52.

116. Ревуженко А. Ф. Трехмерная модель линейно упругого тела со структурой // Физ. мезомеханика. — 2021. — Т. 24. — № 3. — С. 26–35.
117. Ревуженко А. Ф., Микенина О. А. Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. — 2018. — № 2. — С. 167–176.
118. Ревуженко А. Ф., Лавриков С. В., Микенина О. А. Об одной альтернативной разностной схеме численного решения упругих задач определения напряженно-деформированного состояния горного массива // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2020. — Т. 7. — № 1. — С. 131–137.
119. Алтухов В. И., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Анализ концентрации напряжений в целиках горной породы в рамках нелокальной упругой модели со структурным параметром // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. — 2019. — Т. 1. — № 6. — С. 39–45.
120. Lavrikov S. V. and Mikenina O. A. Stress concentration analysis in rock mass with regard to elastoplastic shears and local bends, AIP Conf. Proc., 2023, Vol. 2899. — 020088.
121. Журкина Д. С., Лавриков С. В. К расчету концентрации напряжений в зоне влияния очистного забоя в рамках упругопластической модели градиентного типа // ФТПРПИ. — 2024. — № 3. — С. 24–36.
122. Revuzhenko A. F. Mechanics of granular media, Ed. by academician E. I. Shemyakin and prof. D. Kolymbas, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2006. — 308 p.
123. Björkman B., Bäckblom G., Greberg J., and Weihed P. Strategic research and innovation agenda for the Swedish mining and metal producing industry (STRIM), 2013, Lulea, Sweden, Rock Tech. Centre. — P. 44.
124. Lindqvist P.-A. Sustainable mining and innovation for the future, Research, development and innovation program (SMIFU), 2012, Lulea, Sweden, Rock Tech. Centre. — P. 51.
125. Дубнищева Т. Я. Концепции современного естествознания. — М.: ИЦ “Академия”, 2003. — 608 с.

Поступила в редакцию 22/V 2024

После доработки 25/VI 2024

Принята к публикации 27/VI 2024