

РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПУТЕМ РАЗБИЕНИЯ НА УПРУГО СВЯЗАННЫЕ НЕДЕФОРМИРУЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Л. М. Минкевич

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Предлагается и обосновывается математическая модель тонкой пластины в виде системы упруго связанных недеформируемых прямоугольных элементов. Основные положения метода с необходимыми дополнениями могут быть распространены на случай толстой пластины.

Введение. Математическая модель тонкой пластины в виде системы упруго связанных недеформируемых прямоугольных элементов привлекает простотой и выраженным физическим смыслом. Такой подход нашел применение при расчете стержней [1]. Что касается пластин, то можно сослаться на [2], однако описанную в этой статье методику следует считать лишь первым приближением, поскольку не был решен ряд принципиальных вопросов, в том числе вопрос о точности. Теперь все основные проблемы удалось разрешить. В настоящей статье предлагаются новые результаты, подходы и представление метода в целом.

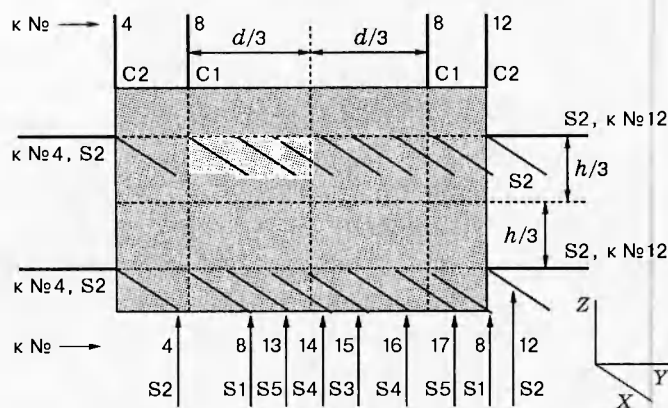
1. Основные положения. Рассматривается тонкая пластина постоянной толщины; способ крепления любой; к пластине могут быть жестко присоединены точечные массы; возможна ортотропная анизотропия. Пластина может иметь произвольную форму, допустимы разрезы, вырезы. Для простоты будем рассматривать случай, когда участки контура и разрезы являются отрезками прямых, параллельных тому или другому из двух взаимно перпендикулярных направлений.

Пластина разбивается на N одинаковых прямоугольных элементов со сторонами dx и dy , соединенных между собой и с основанием пружинами двух типов: горизонтального и вертикального действия (плоскость пластины принимается горизонтальной).

Жесткость пружин вертикального действия обозначим C , горизонтального — S . Пружины обоих типов имеют несколько разновидностей (рис. 1 и 2). На рис. 1 изображена часть пластины с номерами элементов и обобщенных координат, на рис. 2 — правая грань одного из элементов. Пружины, соединяющие прилегающие друг к другу стороны соседних элементов, имеют жесткости $C1$ и $S1$. Жесткости пружин, соединяющих углы элементов, соприкасающихся друг с другом только углами, — $C2$ и $S2$ (при этом пружин типа $S2$ — две, одна из них действует в направлении X , другая — в направлении Y). Жесткости пружин, соединяющих сторону элемента с параллельными ей сторонами пяти «соседей ее соседей», считая за «соседей» и элементы, соприкасающиеся углами, — $S3$, $S4$, $S5$. Пружины горизонтального действия расположены в два слоя, отстоящих от верхней и нижней плоскостей пластины на $1/6$ ее толщины. Для симметрии пружины одного слоя дублируют пружины другого; точки крепления каждой пары пружин S могут быть выбраны в известной мере произвольно. Точки крепления пружин вертикального действия показаны на рис. 2.

19	20	21	22	17
55, 56, 57	58, 59, 60	61, 62, 63	64, 65, 66	49, 50, 51
9	10	11	12	16
25, 26, 27	28, 29, 30	31, 32, 33	34, 35, 36	46, 47, 48
5	6	7	8	15
13, 14, 15	16, 17, 18	19, 20, 21	22, 23, 24	43, 44, 45
1	2	3	4	14
1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	40, 41, 42
18	23	24	25	13
52, 53, 54	67, 68, 69	70, 71, 72	73, 74, 75	37, 38, 39

Рис. 1. Часть пластины (номера элементов (сверху), координат (снизу))

Рис. 2. Пружины на правой грани элемента 7: цифры — номера элементов, к которым «крепятся» вторые концы пружин; h — толщина пластины; d — длина стороны квадратного элемента

Жесткости пружин горизонтального действия (способ их определения описан ниже в п. 3):

$$S1 = 1,28333 KD, \quad S2 = -K'D, \quad S3 = 0,10833KD,$$

$$S4 = -0,16666KD, \quad S5 = 0,09375KD,$$

где $K = (3 - a^2)/(ah^2)$; $K' = (1,45 - 1,2833a^2)/(ah^2)$; $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$; $a = b/s$ — отношение длины элемента к его ширине (под шириной понимается размер стороны элемента, к которой крепится данная пружина); E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина.

Жесткости пружин вертикального действия:

$$C1 = 2(3 - a^2)(s/b^3)D, \quad C2 = (2/sb)D.$$

Обращает внимание возможность отрицательных значений, но сумма жесткостей пружин одного и того же класса: $C1 + C2 = 6Ds/b^3$, $S1 + S2 = 2,4D/(ah^2)$.

На границе $C1$ и $C2$ умножаются на коэффициент $G2$; $S1$ и $S2$ — на коэффициент $G1$; $S3, S4, S5$ — на коэффициенты $G3, G4$. Методика расчета жесткостей и коэффициентов G описана ниже. Элементы, на которые разбита пластина, нумеруются от 1 до N , нумерация непрерывная. Обобщенными координатами являются: смещения центров элементов $q(1), q(4), q(7), \dots$; повороты вокруг оси X $q(2), q(5), q(8), \dots$; вокруг оси Y $q(3), q(6), q(9), \dots$. Пример: для элемента номер L координаты q имеют номера $3(L - 1) + 1, 3(L - 1) + 2, 3(L - 1) + 3$.

2. Матрицы потенциальной энергии и кинетической энергии. Частотное уравнение. Для построения матрицы потенциальной энергии B достаточно иметь значения жесткостей пружин и координаты точек их крепления. Пусть, например, требуется получить выражение для компоненты $B(1, 1)$. Придаем системе виртуальное перемещение $q(1) = 1$, остальные $q(i) = 0$. Затем приравниваем два выражения потенциальной энергии для этого виртуального перемещения

$$\Pi = 1/2 \sum B(i, k)q(i)q(k), \quad \Pi = 1/2 \sum C(p, m)g^2(p, m),$$

где $C(p, m)$ — жесткость пружины, соединяющей точки p и m ; $g(p, m)$ — разность смещений точек p, m в направлении действия пружины. Отсюда находим $B(1, 1)$. Очевидно, $B(1 + 3(i - 1), 1 + 3(i - 1)) = B(1, 1)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, за исключением i , являющихся номерами граничных элементов. Для граничных элементов компоненты $B(i, k)$ находятся самостоятельно. Примеры значений компонент для квадратного элемента со стороной d (см. рис. 1):

$$B(19, 28) = B(19, 34) = B(19, 10) = B(19, 4) = B(4, 52) = \dots = -C_2,$$

$$B(19, 19) = B(16, 16) = \dots = 8 \cdot C_1 + 4 \cdot C_2,$$

$$B(21, 21) = (8/9)h^2 \cdot S_1 + (13/9)C_1 \cdot d^2 + C_2 \cdot d^2 + (8/9)h^2 \cdot S_2 + (4/9)h^2(S_3 + 2 \cdot S_4 + 2 \cdot S_5) \dots$$

Значительно проще составить матрицу кинетической энергии. При отсутствии закрепленных точечных масс она диагональная, компонентами являются массы и моменты инерции элементов. Например, для элемента 5 компонентами будут $A(13, 13) = M$, $A(14, 14) = I_x$, $A(15, 15) = I_y$. Если в какой-либо точке этого элемента помещается точечный груз, то в подпрограмму матрицы A добавляется несколько строчек, указывающих его массу и моменты инерции.

Имея матрицы A и B , получаем возможность решения частотного уравнения

$$BQ = \omega^2 AQ, \quad (2.1)$$

где ω — собственная частота, Q — матрица формы колебаний.

3. Методика определения жесткостей пружин. В п. 1 приведены жесткости пружин, моделирующих упругость системы. Для расчета жесткостей исходным является требование, чтобы частотное уравнение (2.1) в пределе (при стремлении к нулю размеров элемента) совпадало с уравнением сплошной пластины

$$\Delta \Delta W = \rho \omega^2 h W / D, \quad (3.1)$$

где $W(x, y)$ — вертикальные смещения точек пластины; ρ — плотность материала пластины. Отметим, что точно такое же уравнение имеет место для производных от W по x и y ; в последующем, говоря о формуле (3.1), будем иметь это в виду.

Расчет выполняется следующим образом. Записываем уравнение (2.1) для конкретного элемента, пусть это будет элемент 7 (рис. 1), точечных масс элемент не несет:

$$\sum B(19, k)q(k) = \omega^2 A(19, 19)q(19); \quad (3.2)$$

$$\sum B(20, k)q(k) = \omega^2 A(20, 20)q(20); \quad (3.3)$$

$$\sum B(21, k)q(k) = \omega^2 A(21, 21)q(21). \quad (3.4)$$

Пусть имеется общая для пластины система координат x, y , оси параллельны сторонам элементов. Пусть координаты центра элемента 7 будут x, y ; тогда координаты центра элемента 4 — $(x + dx, y - dy)$; элемента 13 — $(x + 2dx, y - 2dy)$ и т. д. Обозначим $q(19) = W(x, y)$, $q(20) = U(x, y)$, $q(21) = V(x, y)$, $q(22) = W(x + dx)$, $q(35) = U(x + dx, y + dy)$ и т. д. и представим все обобщенные координаты, кроме $q(19)$, $q(20)$, $q(21)$, в виде степенного ряда

по степеням dx , dy (учитывая в последующем, что $V = -\partial W/\partial x$, $U = \partial W/\partial y$): например $q(34) = W + W_x dx + W_y dy + 1/2(W_{xx} dx^2 + 2W_{xy} dx dy + W_{yy} dy^2) + 1/6(W_{xxx} dx^3 + 3W_{xxy} dx^2 dy + \dots) + \dots$. Эти представления и значения $B(i, k)$, выраженные через неизвестные пока $C1 \dots S5$, подставляем в (3.2)–(3.4). При этом полагаем $C1$ и $S1$ пропорциональными ширине элемента и обратно пропорциональными соответственно кубу длины и длине элемента (согласно физическому смыслу этих жесткостей, моделирующих соответственно перерезывающую силу и касательное напряжение); относительно других жесткостей предварительных предположений не делается. В уравнениях, получившихся в результате этих подстановок, потребуем обращения в нуль коэффициентов при 0–3-й степенях dx , dy в (3.2) и при 0–4-й степенях в (3.3) и (3.4); потребуем, чтобы в (3.2) коэффициенты при $W_{4,0}$ и $W_{0,4}$ равнялись единице, коэффициент при $W_{2,2}$ равнялся двум, а коэффициенты при остальных четвертых производных равнялись нулю; накладываем аналогичные требования на коэффициенты при пятых производных в уравнениях (3.3) и (3.4). После соответствующих расчетов получаем приведенные в п. 1 значения жесткостей, причем уравнение (3.2) для квадратного элемента со стороной d принимает вид [3]

$$\Delta\Delta W + M_6(d/\lambda)^2 + M_8(d/\lambda)^4 + M_{10}(d/\lambda)^6 + \dots = \rho\omega^2 hW/D, \quad (3.5)$$

уравнения (3.3) и (3.4) принимают вид

$$\Delta\Delta W_{1,0} + L_6(d/\lambda)^2 + L_8(d/\lambda)^4 + L_{10}(d/\lambda)^6 + \dots = \rho\omega^2 hW_{1,0}/D, \quad (3.6)$$

где λ — длина волны на частоте ω . Коэффициенты \bar{L}_k , \bar{M}_k стремятся к нулю как $1/(\lambda^4 k!)$. Таким образом, жесткости подобраны так, что при стремлении к нулю размеров элемента уравнения (2.1) принимают вид уравнения сплошной пластины (3.1). Причем отмеченное в п. 1 взаимодействие по углам элементов, а также «дальнодействие», т. е. взаимодействие с «соседями соседей», пришлось ввести по необходимости, чтобы получился переход (2.1) \implies (3.1).

ПРИМЕЧАНИЯ. 1. В уравнениях (3.3) и (3.4) элемент принимался квадратным, переход к прямоугольному осуществлялся экстраполяцией с учетом значений в «контрольных точках».

2. Характер расчета полностью такой же, как в следующем пункте.

4. Учет граничных условий. В принятой модели граничные условия проявляются в значениях жесткостей пружин на обращенной к границе стороне граничного элемента, так что для заданных граничных условий требуется найти коэффициенты G , на которые умножаются значения жесткостей пружин граничного элемента. Эту задачу решим, потребовав, чтобы на границе пластины уравнения (3.2)–(3.4) при стремлении размеров элемента к нулю принимали вид уравнения (3.1). Обозначим через $G2$ значение коэффициента для пружин $C1$, $C2$, через $G1$ — для пружин $S1$, $S2$, через $G3$, $G4$ — для пружин $S3$, $S4$, $S5$. Приведем пример расчета. Элемент принимается квадратным ($dx = dy = d$). Пусть элемент номер 7 граничный, граница справа. Представим уравнения (3.2)–(3.4) записанными для этого элемента, проведем некоторый предварительный анализ каждого уравнения в отдельности.

1. Уравнение (3.2) состоит из 14 слагаемых, содержащих координаты с номерами 28, 16, 4, 7, 31, 19, 18, 29, 5, 30, 6, 32, 8, 21, а это шесть смещений W элемента 7 и его соседей, четыре поворота U вокруг оси X и четыре поворота V вокруг Y (номер 21 появляется из-за различия пружин слева и справа элемента 7). Компоненты матрицы B уравнения (3.2) имеют значения:

$$B(19, 28) = B(19, 4) = -C2, \quad B(19, 7) = B(19, 31) = -2 \cdot C1, \quad B(19, 16) = -2 \cdot C1, \\ B(19, 32) = -B(19, 8) = C1 \cdot d, \quad B(19, 18) = C1 \cdot d, \quad B(19, 29) = -B(19, 5) = C2 \cdot d/2,$$

$$B(19, 30) = B(19, 6) = C2 \cdot d/2, \quad B(19, 19) = 6 \cdot C1 + 2 \cdot C2 + 2(C1 + C2) \cdot G2, \quad (4.1)$$

$$B(19, 21) = (1 - G2)(C1 + C2)d.$$

2. Уравнение (3.3) содержит 18 слагаемых с координатами 20, 32, 8, 62, 71, 29, 5, 17, 59, 68, 56, 53, 30, 6, 31, 7, 28, 4, из которых 12 — повороты вокруг X , 4 — смещения W (номера 31, 7, 28, 4), являющиеся следствием поворота элемента 7 вокруг оси X , и 2 (номера 6, 30) — повороты вокруг Y , являющиеся следствием поворота элемента 7 вокруг X . Компоненты матрицы B уравнения (3.3) имеют значения:

$$B(20, 32) = B(20, 8) = -4h^2 \cdot S1/9 + C1 \cdot d^2/2, \quad B(20, 31) = -B(20, 7) = -C1 \cdot d,$$

$$B(20, 62) = B(20, 71) = -2 \cdot S3 \cdot h^2/9, \quad B(20, 29) = C2 \cdot d^2/4 - 2 \cdot S2 \cdot h^2/9,$$

$$B(20, 28) = -B(20, 4) = -C2 \cdot d/2, \quad B(20, 5) = C2 \cdot d^2/4 - 2 \cdot S2 \cdot h^2/9, \quad (4.2)$$

$$B(20, 17) = -2 \cdot C1 \cdot d/9, \quad B(20, 59) = B(20, 68) = -2 \cdot S4 \cdot h^2/9,$$

$$B(20, 56) = B(20, 53) = -2 \cdot S5 \cdot h^2/9, \quad B(20, 30) = -B(20, 6) = C2 \cdot d^2/4,$$

$$B(20, 20) = C1 \cdot d^2 + 2 \cdot C1(1 + G2)d^2/9 + 8 \cdot S1 \cdot h^2/9 + C2(1 + G2)d^2/2 +$$

$$+ 4(1 + G1)S2 \cdot h^2/9 + 4(S3 + S4 + S5)h^2/9 + 4(S4 + S5)G4 \cdot h^2/9.$$

3. Уравнение (3.4) содержит 17 слагаемых с координатами 19, 33, 9, 18, 21, 30, 6, 15, 27, 3, 57, 54, 29, 5, 16, 4, 28, из которых 11 — повороты V вокруг оси Y , 4 — смещения W , 2 — повороты U вокруг оси X . Компоненты матрицы B уравнения (3.4) имеют значения:

$$B(21, 19) = -(G2 - 1)(C1 + C2)d, \quad B(21, 33) = B(21, 9) = (-2/9)C1 \cdot d^2,$$

$$B(21, 18) = -(4/9)h^2 \cdot S1 + (1/2)C1 \cdot d^2, \quad B(21, 30) = B(21, 6) = (C2/4)d^2 - 2 \cdot S2 \cdot h^2/9,$$

$$B(21, 15) = -2 \cdot S3 \cdot h^2/9, \quad B(21, 27) = B(21, 3) = -2 \cdot S4 \cdot h^2/9, \quad (4.3)$$

$$B(21, 57) = B(21, 54) = -2 \cdot S5 \cdot h^2/9, \quad B(21, 29) = -B(21, 5) = C2 \cdot d^2/4,$$

$$B(21, 16) = -C1 \cdot d, \quad B(21, 4) = B(21, 28) = -C2 \cdot d/2,$$

$$B(21, 21) = 2h^2(S3 + 2 \cdot S4 + 2 \cdot S5)(1 + G3)/9 + 4 \cdot S1(1 + G1)h^2/9 +$$

$$+ C1 \cdot d^2(1 + G2)/2 + 4 \cdot C1 \cdot d^2/9 + C2 \cdot d^2(1 + G2)/2 + 4 \cdot S2(1 + G1)h^2/9.$$

Пусть $d \rightarrow 0$; предстоит при помощи уравнений (3.2)–(3.4) найти жесткости граничных пружин. Обратимся к уравнению (3.2). Пусть координаты центра элемента 7 будут x, y , $q(19) = W(x, y)$, $q(20) = U(x, y) = W_y(x, y)$, $q(21) = V(x, y) = -W_x(x, y)$. Представим обобщенные координаты q окружающих элементов в виде рядов по степеням dx, dy (см. п. 3); компоненты $B(i, k)$ для этого случая приводятся в формулах (4.1). Тогда после упрощений уравнение примет вид

$$12 \cdot G2 \cdot W + 6 \cdot G2 \cdot W_{1,0}d - (W_{3,0} + W_{1,2})d^3 + \left(\frac{W_{4,0}}{2} + W_{2,2} + \frac{5}{6}W_{0,4} \right)d^4 = \rho\omega^2hd^4 \frac{W}{D}. \quad (4.4)$$

Таким же образом, подставляя в уравнение (3.3) значения (4.2) и представляя обобщенные координаты соседних с 7-м элементов в виде ряда, получаем

$$(22,6666 \cdot G2 - 0,7776 \cdot G4 - 0,888 \cdot G1)W_{0,1} + 10W_{1,1}d - 4W_{0,3}d^2 + (-1,3333W_{3,1} - 4W_{1,3})d^3 +$$

$$+ (0,14444W_{0,5} + 0,5W_{4,1} + W_{2,3})d^4 = \rho\omega^2hd^4W_{0,1}/D. \quad (4.5)$$

Аналогично уравнение (3.4) приводится к виду

$$-72 \cdot G2 \cdot W/d + W_{1,0}(-12,8 \cdot G1 - 36 \cdot G2 + 0,2 \cdot G3) - 12,4W_{2,0}d + 5,3333W_{1,2}d^2 + \\ + (1,1333W_{4,0} + 4,2222W_{2,2} + W_{0,4})d^3 + (-0,5W_{5,0} - W_{3,2} - 0,0555W_{1,4})d^4 = -\rho\omega^2hd^4W_{1,0}/D. \quad (4.6)$$

Напомним, что в формулах (4.4)–(4.6) W — смещение центра граничного элемента. Естественно, W и производные необходимо выразить через значение на границе пластины (отстоящей от центра элемента γ на расстояние $d/2$). Это опять делается при помощи степенного ряда. Граница справа от элемента γ при $x = r$. Обозначим $W(r, y) = W^0$. Для центра γ -го элемента (рис. 1) можно написать (с точностью, сопоставимой с правой частью уравнений)

$$W = W^0 - W_{1,0}^0d/2 + W_{2,0}^0d^2/8 - W_{3,0}^0d^3/48 + W_{4,0}^0d^4/(24 \cdot 16) - W_{5,0}^0d^5/(120 \cdot 32), \\ W_{1,0} = W_{1,0}^0 - W_{2,0}^0d/2 + W_{3,0}^0d^2/8 - W_{4,0}^0d^3/48 + W_{5,0}^0d^4/(24 \cdot 16), \quad (4.7) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ W_{4,1} = W_{4,1}^0, \quad W_{5,0} = W_{5,0}^0, \quad W_{3,2} = W_{3,2}^0, \dots$$

Рассмотрим случай свободно опертой пластины, имеющий точное решение [4, 5]. Предполагается «чистый» случай, когда реакции опоры не имеют составляющей в плоскости пластины. На границе $\tau_{xy} = 0$, откуда $W_{1,1}(r, y) = 0$. Обычно это равенство не используется в качестве граничного условия; в данном исследовании в процессе решения является его следствие, $W_{1,2} = 0$ (см. ниже, анализ результатов (4.10) и (4.14)). В дальнейшем используем граничные условия $W(r, y) = W_{2,0}(r, y) = 0$, а также их следствия $W_{0,1}(r, y) = W_{2,1}(r, y) = W_{2,2}(r, y) = \dots = 0$, поскольку $dW_{i,k}(r, y)/dy = (W_{i,k+1}(x, y))_{x=r}$. Начнем с формулы (4.6) как наиболее важной (эта формула относится к поворотам вокруг оси Y , которые у границы опертой пластины отличны от нуля; формулы (4.4) и (4.5) относятся к смещениям и поворотам вокруг X , у границы бесконечно малым). Учитывая граничные условия опертой пластины и их следствия $W^0 = W_{2,0}^0 = W_{0,1}^0 = W_{2,1}^0 = \dots = 0$, подставляем значения (4.7) в формулу (4.6), получим

$$(-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3)W_{1,0}^0 + [(-3 \cdot G2 + (-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3)/8 + 6,2)W_{3,0}^0 + 5,3333W_{1,2}^0]d^2 + \\ + [9 \cdot G2/16 - (-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3)/48 - 0,4167]W_{4,0}^0d^3 + \\ + [(-0,06458 \cdot G2 + (-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3)/384 - 0,8083)W_{5,0}^0 - 2,4444W_{3,2}^0 - \\ - 0,5555W_{1,4}^0]d^4 = -\rho\omega^2hd^4W_{1,0}^0/D. \quad (4.8)$$

Анализируем (4.8). Пусть $d \rightarrow 0$. Тогда, полагая отличными от нуля значения $W_{1,0}^0, W_{1,2}^0, W_{3,0}^0, W_{5,0}^0, W_{1,4}^0, W_{3,2}^0$, имеем

$$-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3 = 0; \quad (4.9)$$

$$(-3 \cdot G2 + (-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3)/8 + 6,2)W_{3,0}^0 + 5,3333W_{1,2}^0 = 0; \quad (4.10)$$

$$(-0,06458 \cdot G2 + (-12,8 \cdot G1 + 0,2 \cdot G3)/384 - 0,8083)W_{5,0}^0 - 2,4444W_{3,2}^0 - \\ - 0,5555W_{1,4}^0 = -\rho\omega^2hW_{1,0}^0/D; \quad (4.11)$$

$$W_{4,0}^0 = 0 \quad (4.12)$$

(как известно [4], значение (4.12) соответствует точному решению).

Значения первых 10 частот опертой квадратной пластины при различном количестве разбиений на упруго связанные элементы

N	ω									
	2 x 2	52,2689	50,6050	48,9105	48,5983	46,4398	45,4073	35,0027	30,2733	30,2716
3 x 3	121,2279	109,4774	106,5355	98,8394	79,9424	75,8424	67,7897	63,5578	44,9527	20,9561
4 x 4	139,3658	135,8520	127,1553	121,9488	116,7213	105,0009	85,3219	72,3561	47,2248	20,0488
5 x 5	183,0714	179,9596	160,5345	149,5438	139,3917	114,7380	90,4010	73,8870	47,6664	19,9033
6 x 6	208,2786	206,9270	173,8288	158,7100	147,9784	118,4440	92,4402	74,9737	48,0864	19,8417
7 x 7	220,8399	218,8231	179,8524	163,2577	152,9525	120,6529	93,9923	76,0880	48,3702	19,8408
8 x 8	228,7611	225,1277	183,3627	166,0366	156,0852	122,0888	95,0193	76,6779	48,5535	19,8100
9 x 9	234,1175	228,9915	185,8173	167,9686	158,2592	123,1168	95,7284	77,0773	48,6832	19,7865
10 x 10	237,9656	231,6515	187,6468	169,3859	159,8507	123,8830	96,2389	77,3630	48,7794	19,7706
Точное значение	256,6097	246,7401	197,3921	177,6529	167,7833	128,3048	98,6960	78,9568	49,3480	19,7392

Отсюда следует:

- 1) $G1 = G3 = 0$, что вполне естественно, поскольку на границе отсутствует изгибающий момент;
- 2) из формулы (4.10) вытекает $(-3 \cdot G2 + 6,2)W_{3,0}^0 + 5,3333W_{1,2}^0 = 0$. Учитывая независимые от этого последующие результаты (4.13) и (4.14), где выражение в скобках при d^3 должно равняться нулю, получаем $W_{3,0}^0 = W_{1,2}^0 = 0$, откуда $W_{3,2}^0 = 0$, $W_{1,4}^0 = 0$, эти значения используем в (4.11);
- 3) из формулы (4.11) с учетом предыдущего имеем $-(0,06458 \cdot G2 + 0,8083)W_{5,0}^0 = -\rho\omega^2 h W_{1,0}^0 / D$.

Чтобы получилось совпадение с (3.1), коэффициент при $W_{5,0}^0$ должен быть равен 1, в таком случае $G2 = 2,968$.

Подставляем значения (4.7), граничные условия и только что полученное значение $G2$ в уравнение (4.5). Поскольку при поворотах вокруг оси X граница ведет себя как жесткое защемление, $G1 = 2$. Уравнение примет вид

$$(-22,7493 + 0,3888 \cdot G4)W_{1,1}^0 d - ((1,4479 + 0,0162 \cdot G4)W_{3,1}^0 - 2W_{1,3}^0)d^3 + 0,1444W_{0,5}^0 d^4 = \rho\omega^2 h d^4 W_{0,1}^0 / D. \quad (4.13)$$

На границе $x = r$, $W_{0,5}^0 = W_{0,1}^0 = 0$. Очевидно необходимо обращение в нуль выражений в первых двух скобках. Равенство нулю первой скобки дает значение $G4 = 58,5116$. Равенство нулю второй скобки с учетом уравнения (4.10) и замечания о производных по y на границе дает $W_{3,1}^0 = W_{1,3}^0 = 0$.

Таким образом, искомые коэффициенты определены. Остается анализ уравнения (4.4). Подставив (4.7) в (4.4) и принимая во внимание граничные условия, получаем

$$((G2 - 1)W_{3,0}^0 - W_{1,2}^0)d^3 + (1 - 3 \cdot G2/32)W_{4,0}^0 d^4 = \rho\omega^2 h d^4 W^0 / D. \quad (4.14)$$

Учитывая предыдущие результаты, видим, что уравнение удовлетворяется. Намеченное исследование выполнено. Среди полученных результатов обращает внимание $W_{3,0}^0(r, y) = 0$. Это означает, что поперечная сила на границе равна нулю. По-видимому, это допустимо, поскольку поперечные силы «...будучи приложены к краю, лежащему на опоре, окажут некоторое влияние только на величину опорных реакций пластинки и на распределение напряжений в ней вблизи этого края» [4, с. 305].

Полученные значения G1–G4 введены в программу. О точности расчета и сходимости решения можно судить по таблице, где приводятся результаты расчета безразмерных частот $\bar{\omega} = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$ для опертой квадратной пластины со стороной a при различных разбиениях пластины на элементы и результаты теоретического расчета [6].

В случае защемленной границы использовался тот же метод. Подход, когда расчетный контур пластины отстоял от реального контура защемления на расстояние в половину длины элемента, оказался точнее. Для этого случая G1 = G2 = 1, G3 = 2, G4 = 2,2874. Точность такая же, как и при расчете опертой пластины. Проведено сопоставление с расчетом в пакете COSMOS, при разбиении в обоих случаях 10×10 . Рассматриваемый подход на низших частотах дает несколько более высокую точность.

Случай свободной границы наиболее прост, на границе «пружин» нет. Решение получается более точным, если граница разбиения на элементы продолжена за пределы пластины на расстояние в половину длины элемента.

Проведен эксперимент [7] и расчет на ЭВМ частот и амплитудно-частотных характеристик прямоугольной стеклотекстолитовой пластины, закрепленной в четырех и шести точках. Совпадение результатов вполне удовлетворительное.

5. К вопросу классификации и значения. Рассматриваемый подход (РП) имеет общие черты с методами конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ), но не является вариантом того или другого. Попробуем это обосновать. Прежде всего одно соображение принципиального характера. Как известно, в принятой теории тонких пластин при выводе дифференциального уравнения движения пластины компоненты тензора напряжений τ_{xz} и τ_{yz} игнорируются, и это вполне естественно ввиду принятого выражения компонент тензора деформаций через смещение W . Игнорирование получается путем выражения этих компонент через другие в двух из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2 h} \end{aligned}$$

и подстановки в третье, так что получается одно дифференциальное уравнение (в МКР это уравнение рождает систему алгебраических уравнений конечных разностей). В РП такое невозможно. В РП компонентам тензора напряжений соответствуют пружины, которые должны быть представлены явным образом — через их жесткости и точки крепления. Но при решении этого вопроса естественно возникло отклонение от принятой теории, которой в полной мере руководствуются МКР и МКЭ. Пришлось по необходимости ввести взаимодействие по углам элементов и «дальнодействие», т. е. на определенном этапе РП отходит от принятой теории и идет своим путем. Но затем пути РП и принятой теории сходятся, уравнения РП принимают вид (каждое из трех) дифференциального уравнения пластины (напомним, что это получается в пределе при неограниченном увеличении числа элементов в процессе определения жесткостей пружин).

Выше было сказано о формальной необходимости введения «дальнодействия», без чего не получалось сведение (в пределе) алгебраических уравнений к дифференциальному уравнению сплошной пластины. Однако этот прием имеет и определенный физический смысл. В самом деле, «пружины» моделируют общую упругость данного элемента (скажем, элемента 7 на рис. 1) и его окружения. Представляется совершенно естественным эту упругость моделировать методом последовательных уточнений: вначале принять в качестве окружения данного элемента четырех его соседей, соприкасающихся с ним сторонами (первое приближение); затем в это окружение включить дополнительно элементы, соприкасающиеся с элементом 7 только углами (второе приближение); далее включить в окружение внешнее кольцо рис. 1 (третье приближение). Возможно включение в окружение

следующего кольца, обрамляющего предыдущее (четвертое приближение); это проявится путем введения соответствующих пружин; жесткости этих пружин будут найдены из требования, чтобы в уравнениях (3.5) и (3.6) обратились в нуль вторые слагаемые левой части. И так можно продолжать неограниченно, расширяя область, формирующую упругое взаимодействие данного элемента с окружающим его материалом пластины.

Продолжим сравнение с известными методами.

1. Общим с МКЭ является разбиение на элементы. Однако в МКЭ элементы деформируемые, требуется сопряжение на границах элементов; в РП элементы жесткие, соединяются между собой и с границей при помощи пружин, сопряжения с соседними элементами не требуется. Отсюда совершенно различное развитие той и другой математической модели.

2. Сходство с МКР заключается в использовании рядов Тейлора и в том, что конечные разности в МКР и приращения перемещений W соседних элементов в РП — фактически одно и то же. Но на этих чисто внешних признаках сходство и кончается. В главном же методы различаются. Действительно, МКР исходит из уравнения (3.1), при разбиении на N элементов получается система N алгебраических уравнений для определения перемещений N узлов. В случае РП исходной является система $3N$ линейно независимых уравнений (2.1) для определения $3N$ неизвестных — перемещений и поворотов N элементов. При этом жесткости пружин находятся из условия, чтобы каждое из трех уравнений (2.1) в пределе совпадало с (3.1). Трудно представить, каким образом можно формально свести одну задачу к другой, МКР к РП (учитывая, что $3N$ уравнений (2.1) независимы, в то время как уравнение (3.1) для W и соответствующие два уравнения для W_x и W_y свести к $3N$ независимым алгебраическим уравнениям если и можно, то с большой натяжкой). Что касается включения в РП в число неизвестных W_x и W_y , то это существенно для исследования напряженного состояния и, надо полагать, повышает точность расчета. Далее, РП может обойтись без второго кольца окружения: если убрать соответствующие пружины S_3, S_4, S_5 , то получится вполне приемлемое по точности второе приближение РП; в то время как МКР обойтись без этого кольца никак не может. И еще один пример. Рассмотрим граничные условия в РП и МКР в случае свободной границы. В МКР граничные условия не только требуют выхода во второе кольцо окружения граничного элемента, но и выражаются довольно сложным образом, в то время как в РП пружины на свободной границе граничного элемента просто отбрасываются, их жесткости приравниваются нулю.

3. Существенным отличием РП от МКР и МКЭ является выраженный физический смысл.

4. Имеется различие и в возможностях. РП позволяет помещать точечную массу не только в центре элемента, но и в любой его точке, и делается это путем добавления трех строчек в матрицу A . «Жесткие» граничные условия обычных стандартов в реальных задачах часто должны быть «смягчены». При данном подходе это делается достаточно просто — путем изменения коэффициентов G на нужном участке границы.

Рассматриваемый подход распространяется на случай больших прогибов. Для этого требуется вернуть элементам «отнятые» у них степени свободы — смещения вдоль X и Y (для ряда задач и повороты в плоскости XY). Пружины остаются те же, но их наклон придется учесть, поэтому компоненты матрицы B будут зависеть от смещения и поворотов элемента. Метод можно распространить и на случай толстой пластины. Для этого необходимо:

1) представить толстую пластину как набор тонких пластин, разбитых на упруго связанные недеформируемые элементы, упругая связь вводится также между элементами различных пластин;

2) каждому элементу сообщить три дополнительных степени свободы;

3) дополнительно вводимые (по сравнению с одинарной тонкой пластиной) связи вполне достаточно учитывать во втором приближении РП.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965.
2. **Минкевич Л. М.** К расчету на ЭВМ частот, форм колебаний и резонансных амплитуд тонкой пластины с закрепленными точками // Прикл. механика. 1991. № 12. С. 67–71.
3. **Минкевич Л. М.** К обоснованию способа расчета колебаний тонкой пластины путем разбиения на упруго связанные прямоугольники // Динамика механических систем. Новосибирск: НГТУ, 1994. С. 37–44.
4. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
5. **Гонткевич В. С.** Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наук. думка, 1964.
6. **Прочность, устойчивость, колебания:** Справочник. Т. 3 / Под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
7. **Минкевич Л. М., Морозов Б. П., Шаталов А. П.** Исследование вибрации плат с закрепленными массами при помощи численного и натурного эксперимента // Вопросы динамики механических систем. Новосибирск: НЭТИ, 1991. С. 55–60.

Поступила в редакцию 22/1 1997 г.
