

УДК 534.1; 537.9

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТУР ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНОЙ КОНУСООБРАЗНОЙ КОНСОЛИ АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА С УЧЕТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ КОНТАКТА

А. Садехи

Дамавандский филиал Исламского университета Азад, Дамаванд, Иран  
E-mail: a\_sadeghi@damavandiau.ac.ir

С использованием теории балок Тимошенко исследуются резонансные изгибные колебания двойной конусообразной консоли атомно-силового микроскопа. Изучается влияние различных параметров на частоту колебаний консоли атомно-силового микроскопа. Для решения нелинейных уравнений движения используется метод дифференциальных квадратур. Из результатов решения следует, что с увеличением параметра балки Тимошенко (с увеличением толщины консоли) резонансные частоты уменьшаются, причем наиболее существенно для мод высшего порядка. Влияние параметра балки Тимошенко на первую частоту является значительным только при малой контактной жесткости, в то время как его влияние на высшие моды существенно в широком диапазоне значений контактной жесткости. С увеличением высоты зонда влияние нормальной контактной жесткости на моды колебаний существенно в ограниченном диапазоне значений. С увеличением коэффициента, характеризующего изменение ширины консоли, частоты увеличиваются. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием метода дифференциальных квадратур, с точным решением для консоли в форме параллелепипеда.

Ключевые слова: консоль атомно-силового микроскопа, конусообразная балка Тимошенко, резонансные частоты.

**Введение.** Атомно-силовой микроскоп (АСМ) создан в 1986 г. для исследования топографии поверхности на наномасштабном уровне [1]. При сканировании поверхности консоль АСМ колеблется в резонансном диапазоне. Резонанс зависит от положения точки контакта, формы консоли, высоты зонда и толщины балки. В АСМ используются консоли различной формы, как правило, прямоугольной и V-образной. Помимо того что АСМ обеспечивает высокое разрешение топографического изображения поверхности образца, он может быть использован в качестве режущего инструмента и мощного манипулятора в микро- и нанoeлектромеханических системах. Для этих целей можно использовать АСМ с конусообразными консолями. Поэтому представляет интерес исследование динамического поведения таких АСМ.

В последнее время проведено большое количество исследований динамического поведения консолей АСМ [2–9]. В [2] изучено влияние жесткости исследуемой поверхности на моды колебаний консоли АСМ в форме параллелепипеда и получены выражения в замкнутой форме. Предполагалось, что консоль параллельна исследуемой поверхности и зонд

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Дамавандского филиала Исламского университета Азад в рамках программы “Исследования модели колебаний составной конусообразной консоли атомно-силового микроскопа с учетом затухания колебаний в воздухе”.

размещен точно на конце консоли. В действительности зонд располагается на некотором расстоянии от конца консоли, которая образует угол с исследуемой поверхностью. В [3] с помощью АСМ проводилась высокочастотная механическая спектроскопия. При этом учитывались положение зонда при контакте, угол между консолью и поверхностью, нормальная и поперечная контактные жесткости, масса зонда. Использовалась теория балки Эйлера — Бернулли, в которой пренебрегается инерцией вращения и деформацией сдвига, несмотря на то что эти эффекты существенно влияют на высшие моды колебаний балок достаточно большой толщины. В [4] исследовалось аналитическое решение задачи о колебаниях конусообразной консоли АСМ. Предполагалось, что консоль расположена параллельно исследуемой поверхности, и пренебрегалось размерами и массой зонда, а также поперечной жесткостью контакта. В [5] изучено влияние длины зонда, нормальной и поперечной жесткостей контакта на изгибные колебания консоли АСМ, но при этом не учитывались положение точки контакта и наличие угла между консолью и поверхностью. В [6] с использованием степенных рядов исследовалась динамика клинообразной консоли АСМ, при этом влияние угла между консолью и рассматриваемой поверхностью не учитывалось. В [7] изучались изгибные колебания V-образной консоли АСМ с учетом угла между консолью и поверхностью, но не учитывался размер зонда и предполагалось, что зонд расположен на конце консоли. Во всех указанных выше работах использовалась теория балок Эйлера — Бернулли, в которой не учитываются инерция вращения и поперечный сдвиг. В [8] динамика АСМ изучалась с помощью трехмерных конечных элементов в предположении линейного и нелинейного законов контактной жесткости с учетом размера зонда, угла между консолью и поверхностью, но без учета положения зонда при контакте. В [9] в предположении, что консоль параллельна исследуемой поверхности и зонд расположен на конце консоли, с использованием теории балок Тимошенко изучалось затухание колебаний в сканирующем оптическом микроскопе. Размер зонда не учитывался.

В настоящей работе колебания составной конусообразной консоли исследуются с использованием теории балок Тимошенко, в которой учитываются инерция вращения и поперечный сдвиг. Выведены уравнения и краевые условия задачи. Изучается влияние положения точки контакта, высоты зонда, изменения толщины и ширины балки по ее длине, угла между зондом и поверхностью на различные моды колебаний. Для решения дифференциальных уравнений движения используется метод дифференциальных квадратур (МДК), ранее применявшийся при решении нелинейных дифференциальных уравнений [10].

**1. Теоретическая модель.** Схема конусообразной консоли АСМ представлена на рис. 1. Конический зонд помещен вблизи конца консоли. Толщина балки изменяется по линейному закону от  $h_0$  до  $h_1$  и затем от  $h_1$  до  $h_2$ , ширина балки изменяется по линейному закону от  $b_0$  до  $b_1$  и затем от  $b_1$  до  $b_2$ . Угол между консолью и исследуемой поверхностью равен  $\alpha$ , зонд имеет массу  $m_{tip}$ . Взаимодействие зонда с поверхностью в поперечном и нормальном направлениях моделируется двумя линейными пружинами с жесткостями  $k_l$  и  $k_n$  соответственно.

С использованием теории балок Тимошенко в пренебрежении осевой силой уравнения движения для левой и правой частей консоли можно записать в следующем виде [11]:

$$\begin{aligned}
 \rho A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGA_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right] &= 0, & -L_1 \leq x \leq 0, \\
 \rho I_{y1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI_{y1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] - kGA_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) &= 0, \\
 \rho A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGA_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi \right) \right] &= 0, & 0 \leq x \leq L_2, \\
 \rho I_{y2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI_{y2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] - kGA_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

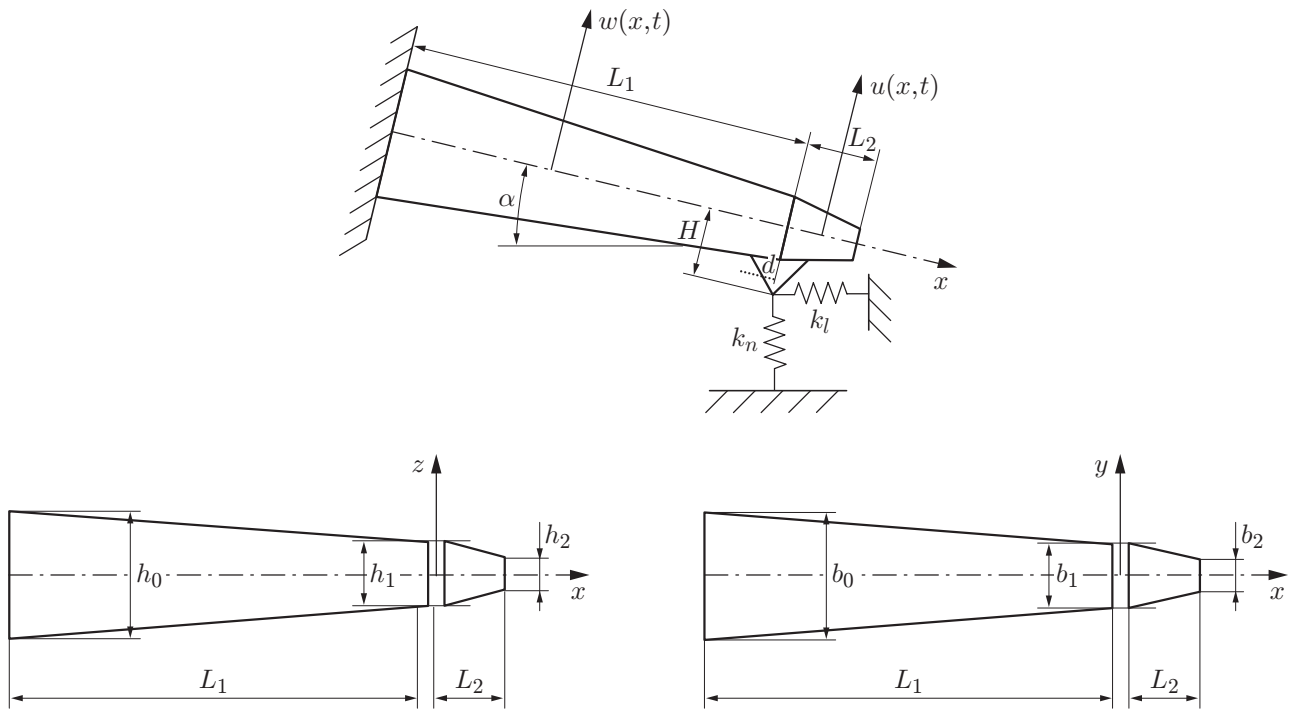


Рис. 1. Схема составной конусообразной консоли АСМ

Здесь  $u$ ,  $\varphi$  и  $w$ ,  $\phi$  — поперечное смещение и угол поворота сечения балки для правой и левой частей консоли соответственно;  $\rho$  — плотность;  $E$  — модуль Юнга;  $G$  — модуль сдвига;  $A$  — площадь поперечного сечения;  $I_y$  — момент инерции поперечного сечения относительно оси  $y$ ;  $k$  — коэффициент сдвига; индекс 1 соответствует левой части консоли, 2 — правой части консоли.

Для составной конусообразной балки (см. рис. 1) приняты следующие предположения:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1), & I_{y1} &= I_{y0}(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)^3, \\ A_2 &= A_0(1 - C_b)(1 - C_h)(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2), & & \\ I_{y2} &= I_{y0}(1 - C_b)(1 - C_h)^3(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)^3. & & \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$C_b = 1 - b_1/b_0, \quad C_h = 1 - h_1/h_0, \quad D_b = 1 - b_2/b_1, \quad D_h = 1 - h_2/h_1. \quad (3)$$

Волновое решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w(x) \exp(i\omega t), & \phi(x, t) &= \phi(x) \exp(i\omega t), \\ u(x, t) &= u(x) \exp(i\omega t), & \varphi(x, t) &= \varphi(x) \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega$  — собственная частота. Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \frac{\rho A_0 L^4}{EI_{y0}} \omega^2, & r &= \frac{I_{y0}}{A_0 L^2}, & s &= \frac{EI_{y0}}{k A_0 G L^2}, & \lambda_1^4 &= \frac{\rho A_0 L_1^4}{EI_{y0}} \omega^2 = \lambda^4 \left(\frac{L_1}{L}\right)^4, \\ \lambda_2^4 &= \frac{\rho A_0 (1 - C_b)(1 - C_h) L_2^4}{EI_{y0} (1 - C_b)(1 - C_h)^3} \omega^2 = \frac{1}{(1 - C_h)^2} \lambda^4 \left(\frac{L_2}{L}\right)^4, & r_1 &= \frac{I_{y0}}{A_0 L_1^2} = r \left(\frac{L}{L_1}\right)^2, \\ s_1 &= \frac{EI_{y0}}{k A_0 G L_1^2} = s \left(\frac{L}{L_1}\right)^2, & r_2 &= \frac{I_{y0} (1 - C_b)(1 - C_h)^3}{A_0 (1 - C_b)(1 - C_h) L_2^2} = (1 - C_h)^2 r \left(\frac{L}{L_2}\right)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$s_2 = \frac{EI_{y0}(1 - C_b)(1 - C_h)^3}{kA_0(1 - C_b)(1 - C_h)GL_2^2} = (1 - C_h)^2 s \left(\frac{L}{L_2}\right)^2, \quad x_1 = x + L_1, \quad -L_1 \leq x \leq 0,$$

$$\xi_1 = \frac{x_1}{L_1}, \quad \xi_2 = \frac{x}{L_2}, \quad 0 \leq x \leq L_2, \quad \bar{w} = \frac{w}{L_1}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L_2},$$

где  $L = L_1 + L_2$ ;  $L_2/L_1$  — величина, характеризующая положение зонда;  $\Lambda_n = k_n/k_c$  — отношение нормальной контактной жесткости к жесткости консоли.

С учетом (2)–(5) уравнения движения (1) можно записать в виде [11]

$$\lambda_1^4(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)\bar{w} + \frac{1}{s_1} \frac{d}{d\xi_1} \left[ (1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1) \left( \frac{d\bar{w}}{d\xi_1} - \phi \right) \right] = 0, \quad -L_1 \leq x \leq 0,$$

$$\frac{d}{d\xi_1} \left[ (1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)^3 \frac{d\phi}{d\xi_1} \right] + r_1 \lambda_1^4(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)^3 \phi +$$

$$+ \frac{(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)}{s_1} \left( \frac{d\bar{w}}{d\xi_1} - \phi \right) = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_2^4(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)\bar{u} + \frac{1}{s_2} \frac{d}{d\xi_2} \left[ (1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2) \left( \frac{d\bar{u}}{d\xi_2} - \varphi \right) \right] = 0, \quad 0 \leq x \leq L_2,$$

$$\frac{d}{d\xi_2} \left[ (1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)^3 \frac{d\varphi}{d\xi_2} \right] + r_2 \lambda_2^4(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)^3 \varphi +$$

$$+ \frac{(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)}{s_2} \left( \frac{d\bar{u}}{d\xi_2} - \varphi \right) = 0.$$

В предположении, что консоль не параллельна исследуемой поверхности и зонд расположен на некотором расстоянии от конца консоли, краевые условия записываются в виде

$$w(-L_1, t) = 0, \quad \phi(-L_1, t) = 0, \quad u(0, t) = w(0, t), \quad \phi(0, t) = \varphi(0, t),$$

$$EI_{y0}(1 - C_b)(1 - C_h)^3 \frac{\partial \phi(0, t)}{\partial x} - EI_{y0}(1 - C_b)(1 - C_h)^3 \frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x} =$$

$$= \frac{H}{2} (k_n - k_l)w(0, t) \sin(2\alpha) - H^2(k_n \sin^2(\alpha) + k_l \cos^2(\alpha))\phi(0, t) - m_{tip}d^2 \frac{\partial^2 \phi(0, t)}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$kGA_0(1 - C_b)(1 - C_h) \left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \varphi(0, t) \right) -$$

$$- kGA_0(1 - C_b)(1 - C_h) \left( \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} - \phi(0, t) \right) =$$

$$= \frac{H}{2} (k_l - k_n)\phi(0, t) \sin(2\alpha) + m_{tip} \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} + (k_n \cos^2(\alpha) + k_l \sin^2(\alpha))w(0, t),$$

$$\frac{\partial \varphi(L_2, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(L_2, t)}{\partial x} - \varphi(L_2, t) = 0,$$

где  $H$  — высота зонда.

В безразмерных переменных уравнения (7) принимают следующий вид:

$$\bar{w}(\xi_1) = 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0, \quad \phi(\xi_1) = 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0,$$

$$L_2\bar{u}(\xi_2) = L_1\bar{w}(\xi_1) \quad \text{при} \quad \xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \quad \varphi(\xi_2) = \phi(\xi_1) \quad \text{при} \quad \xi_1 = 1, \xi_2 = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_{y0}(1-C_b)(1-C_h)^3}{L_1} \frac{\partial \phi(\xi_1)}{\partial \xi_1} - \frac{EI_{y0}(1-C_b)(1-C_h)^3}{L_2} \frac{\partial \varphi(\xi_2)}{\partial \xi_2} = \\ & = \frac{H}{2} (k_n - k_l) L_1 \bar{w}(\xi_1) \sin(2\alpha) - H^2 (k_n \sin^2(\alpha) + k_l \cos^2(\alpha)) \phi(\xi_1) + m_{tip} \omega^2 d^2 \phi(\xi_1) \\ & \quad \text{при } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \\ & \frac{EI_{y0}}{sL^2} (1-C_b)(1-C_h) \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}(\xi_2)}{\partial \xi_2} - \varphi(\xi_2) \right) - \left( \frac{\partial \bar{w}(\xi_1)}{\partial \xi_1} - \phi(\xi_1) \right) \right] = \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{H}{2} (k_l - k_n) \phi(\xi_1) \sin(2\alpha) - m_{tip} \omega^2 L_1 \bar{w}(\xi_1) + (k_n \cos^2(\alpha) + k_l \sin^2(\alpha)) L_1 \bar{w}(\xi_1) \\ & \quad \text{при } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(\xi_2)}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{при } \xi_2 = 1, \quad \frac{\partial \bar{u}(\xi_2)}{\partial \xi_2} - \varphi(\xi_2, t) = 0 \quad \text{при } \xi_2 = 1. \quad (10)$$

Определим константу  $k_c = 3EI_{y0}/L_1^3$  — контактную жесткость консоли. Тогда уравнения (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{k_c}{3} (1-C_b)(1-C_h)^3 \frac{\partial \phi(\xi_1)}{\partial \xi_1} - \frac{k_c}{3} (1-C_b)(1-C_h)^3 \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial \varphi(\xi_2)}{\partial \xi_2} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{H}{L} \frac{L}{L_1} (k_n - k_l) \bar{w}(\xi_1) \sin(2\alpha) - \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 (k_n \sin^2(\alpha) + k_l \cos^2(\alpha)) \phi(\xi_1) + \\ & \quad + \frac{m_{tip} \omega^2 d^2 \phi(\xi_1)}{L_1^2} \quad \text{при } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \\ & \frac{k_c}{3} \left( \frac{L_1}{L} \right)^3 \frac{(1-C_b)(1-C_h)}{s} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}(\xi_2)}{\partial \xi_2} - \varphi(\xi_2) \right) - \left( \frac{\partial \bar{w}(\xi_1)}{\partial \xi_1} - \phi(\xi_1) \right) \right] = \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} \frac{H}{L} (k_l - k_n) \phi(\xi_1) \sin(2\alpha) - m_{tip} \omega^2 \frac{L_1}{L} \bar{w}(\xi_1) + (k_n \cos^2(\alpha) + k_l \sin^2(\alpha)) \frac{L_1}{L} \bar{w}(\xi_1) \\ & \quad \text{при } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0. \end{aligned}$$

Константы, характеризующие контактные жесткости в нормальном и поперечном направлениях, зависят от жесткости зонда и исследуемой поверхности. Фактически эти константы не являются независимыми, зависимость между ними исследовалась в [12, 13].

В [12] показано, что соотношение между нормальной и поперечной контактными жесткостями зависит от геометрии, коэффициента Пуассона, толщины кончика консоли, но не зависит от ее жесткости. В [12] для различных форм консоли АСМ получено точное соотношение между этими константами в случае линейного взаимодействия.

В случае нелинейного взаимодействия с использованием модели упругого контакта Держагина — Мюллера — Торопова выражение для силы нормального взаимодействия записывается в следующем виде [8, 14]:

$$f_n = \begin{cases} -HR/(6d_n^2), & d_n \geq a_0, \\ -HR/(6a_0^2) + (4/3)E^* \sqrt{R} (a_0 - d_n)^{3/2}, & d_n \leq a_0. \end{cases}$$

С использованием теории Герца выражение для силы поперечного взаимодействия записывается в виде [8]

$$f_t = \begin{cases} 0, & d_n \geq a_0, \\ -8G^*(3Rf_c/(4E^*))^{1/3} \delta_l, & d_n \leq a_0, \end{cases}$$

где

$$f_c = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} (a_0 - d_n)^{3/2}, \quad E^* = \left[ \frac{1 - \nu_t^2}{E_t} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \right]^{-1}, \quad G^* = \left[ \frac{2 - \nu_t}{G_t} + \frac{2 - \nu_s}{G_s} \right]^{-1}.$$

Тогда

$$k_n = - \frac{\partial f_n}{\partial d_n} \Big|_{d_n=D} = \begin{cases} -HR/(3D^3), & d_n \geq a_0, \\ 2E^* \sqrt{R} (a_0 - D)^{1/2}, & d_n \leq a_0, \end{cases}$$

$$k_l = - \frac{\partial f_l}{\partial \delta_l} = \begin{cases} 0, & d_n \geq a_0, \\ 8G^* (3Rf_c/(4E^*))^{1/3}, & d_n \leq a_0. \end{cases}$$

Здесь  $d_n$  — динамическое расстояние между зондом и поверхностью;  $R$  — радиус зонда;  $a_0$  — межмолекулярное расстояние;  $D$  — статическое расстояние между зондом и поверхностью;  $E^*$  — эффективный упругий модуль;  $E_t, E_s, \nu_t, \nu_s$  — упругие модули и коэффициенты Пуассона зонда и поверхности соответственно;  $G_t, G_s$  — модули сдвига зонда и поверхности;  $\delta_l$  — смещение зонда относительно поверхности в поперечном направлении. Как в линейном, так и в нелинейном случае коэффициенты нормального и поперечного взаимодействия не являются независимыми. В данной работе предполагается, что поперечная контактная жесткость является функцией нормальной контактной жесткости.

**2. Метод дифференциальных квадратур.** Метод дифференциальных квадратур (МДК) является эффективным методом решения нелинейных дифференциальных уравнений. В этом методе производная функции в заданной точке аппроксимируется взвешенной линейной суммой значений функции во всех точках дискретизированной области. Рассмотрим функцию  $F(x)$  в области  $D$ . Производная порядка  $n$  функции  $F(x)$  в точке  $x_i$  аппроксимируется следующим образом [10, 15]:

$$\frac{d^n F(x_i)}{dx^n} = \sum_{j=1}^N k_{ij}^{(n)} F(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Здесь  $N$  — число всех точек дискретной сетки; весовые коэффициенты определяются по формулам

$$k_{ij}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_j)\Pi(x_j)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad j \neq i,$$

$$k_{ij}^{(r)} = r \left( k_{ii}^{(r-1)} k_{ij}^{(1)} - \frac{k_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right), \quad 2 \leq r \leq N-1,$$

$$k_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N k_{ij}^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\Pi(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j).$$

Косинусоидальное распределение точек является эффективным способом расположения точек в расчетной области:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x_1 = 0, \quad x_N = 1.$$

С помощью МДК уравнения (6) приводятся к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1^4(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)\bar{w}_i + \frac{1}{s_1} \left[ (-C_b)(1 - C_h\xi_1) \left( \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \bar{w}_j - \phi_i \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (-C_h)(1 - C_b\xi_1) \left( \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \bar{w}_j - \phi_i \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1) \left( \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 \bar{w}_j - \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \phi_j \right) \right] = 0, \\
 & \left[ (-C_b)(1 - C_h\xi_1)^3 \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \phi_j + 3(-C_h)(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)^2 \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \phi_j + \right. \\
 & \quad \left. + (1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)^3 \sum_{j=1}^N C_{ij}^2 \phi_j + \right. \\
 & \quad \left. + r_1 \lambda_1^4 (1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)^3 \phi_i + \frac{(1 - C_b\xi_1)(1 - C_h\xi_1)}{s_1} \left( \sum_{j=1}^N C_{ij}^1 \bar{w}_j - \phi_i \right) \right] = 0, \\
 & \lambda_2^4(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)\bar{u}_i + \frac{1}{s_2} \left[ (-D_b)(1 - D_h\xi_2) \left( \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 \bar{u}_j - \varphi_i \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (-D_h)(1 - D_b\xi_2) \left( \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 \bar{u}_j - \varphi_i \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2) \left( \sum_{j=1}^N D_{ij}^2 \bar{u}_j - \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 \varphi_j \right) \right] = 0, \\
 & \left[ (-D_b)(1 - D_h\xi_2)^3 \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 \varphi_j + 3(-D_h)(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)^2 \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 \varphi_j + \right. \\
 & \quad \left. + (1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)^3 \sum_{j=1}^N D_{ij}^2 \varphi_j + \right. \\
 & \quad \left. + r_2 \lambda_2^4 (1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)^3 \varphi_i + \frac{(1 - D_b\xi_2)(1 - D_h\xi_2)}{s_2} \left( \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 \bar{u}_j - \varphi_i \right) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{ij}^1 &= \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_j)\Pi(x_j)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad j \neq i, \\
 C_{ij}^2 &= 2 \left( C_{ii}^1 C_{ij}^1 - \frac{C_{ij}^1}{x_i - x_j} \right), \quad C_{ii}^1 = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^1, \quad \Pi(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_i &= \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) + 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x_N = 0, \quad x_1 = 1, \\
 D_{ij}^1 &= \frac{\Pi(y_i)}{(y_i - y_j)\Pi(y_j)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad j \neq i, \\
 D_{ij}^2 &= 2 \left( D_{ii}^1 D_{ij}^1 - \frac{D_{ij}^1}{y_i - y_j} \right), \quad D_{ii}^1 = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^1, \quad \Pi(y_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (y_i - y_j), \\
 y_i &= \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad y_1 = 0, \quad y_N = 1.
 \end{aligned} \tag{13}$$

С использованием МДК краевые условия (8)–(11) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_N &= 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0, \quad \phi_N = 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0, \\
 \bar{u}_1 &= (L_1/L_2)\bar{w}_1 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \phi_1 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \\
 \frac{k_c}{3} (1 - C_b)(1 - C_h)^3 \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 \phi_j - \frac{k_c}{3} (1 - C_b)(1 - C_h)^3 \frac{L_1}{L_2} \sum_{j=1}^N D_{1j}^1 \varphi_j &= \\
 &= \frac{1}{2} \frac{H}{L} \frac{L}{L_1} (k_n - k_l) \bar{w}_1 \sin(2\alpha) - \left( \frac{H}{L} \right)^2 \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 (k_n \sin^2(\alpha) + k_l \cos^2(\alpha)) \phi_1 + \\
 &\quad + \frac{m_{tip} \omega^2 d^2 \phi_1}{L_1^2} \quad \text{при} \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{k_c}{3} \left( \frac{L_1}{L} \right)^3 \frac{(1 - C_b)(1 - C_h)}{s} \left( \left( \sum_{j=1}^N D_{1j}^1 \bar{u}_j - \varphi_1 \right) - \left( \sum_{j=1}^N C_{1j}^1 \bar{w}_j - \phi_1 \right) \right) &= \\
 &= \frac{1}{2} \frac{H}{L} (k_l - k_n) \phi_1 \sin(2\alpha) - m_{tip} \omega^2 \frac{L_1}{L} \bar{w}_1 + (k_n \cos^2(\alpha) + k_l \sin^2(\alpha)) \frac{L_1}{L} \bar{w}_1 \\
 &\quad \text{при} \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N D_{Nj}^1 \varphi_j = 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 = 1, \quad \sum_{j=1}^N D_{Nj}^1 \bar{u}_j - \varphi_N = 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 = 1.$$

Подставляя (13) в уравнения (12), (14) и используя уравнения (5), методом дифференциальных квадратур найдем резонансную частоту системы  $\lambda$ .

**3. Обсуждение МДК. Оптимальное число всех точек сетки.** В данном пункте обсуждаются обоснованность применения МДК при решении данной задачи и выбор оптимального числа точек сетки. Ниже проведено сравнение результатов, полученных МДК, с точным решением для консоли АСМ в форме параллелепипеда. При  $C_b = C_h = D_b = D_h = 0$  конусообразная консоль переходит в параллелепипед. В [9] для такой консоли с использованием теории балок Тимошенко получено точное решение при  $r = 0,003$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $H/L = L_2/L_1 = k_l/k_n = 0$ .

На рис. 2 приведены результаты численного и аналитического решений для трех мод. Для первой и второй мод имеет место хорошее соответствие результатов. Для первой моды максимальное различие составляет менее 0,15 %, для второй моды — менее 0,5 %, для третьей моды — приблизительно 0,7 %. В расчете общее число точек сетки равно  $N = 7$ , что соответствует оптимальному числу точек для этого частного случая.



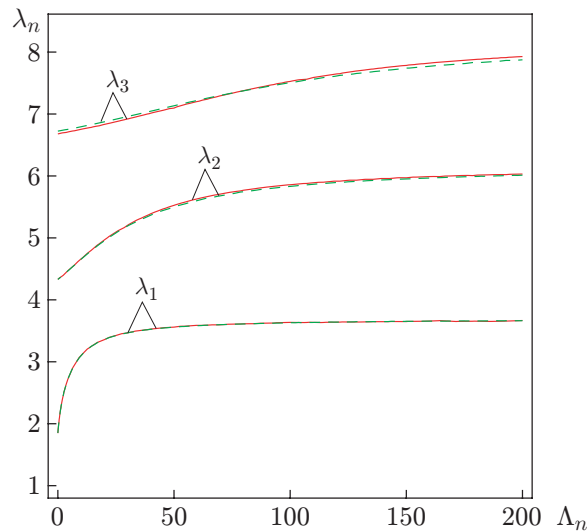


Рис. 2. Результаты решения, полученные МДК (сплошные линии), и результаты аналитического решения (штриховые линии) для консоли в форме параллелепипеда при  $r = 0,003$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $H/L = L_2/L_1 = k_l/k_n = 0$ ,  $N = 7$

Определение оптимального числа точек сетки  $N$  является важной задачей любых численных сеточных методов. При оптимальном числе  $N$  минимизируется численная ошибка. Ниже обсуждается процедура выбора оптимального числа  $N$  и на примере рассмотренной выше консоли путем сравнения с аналитическим решением оценивается численная ошибка, возникающая в случае использования МДК при различных значениях  $N$ .

Из результатов численного анализа следует, что с увеличением  $N$  до оптимального числа ошибка при вычислении резонансных частот уменьшается. Для рассмотренного выше примера оптимальное число  $N = 7$ . В таблице приведены относительные погрешности  $\varepsilon$  решения, полученного МДК, по сравнению с аналитическим решением при различных значениях  $N$ .

Из таблицы следует, что с увеличением числа  $N$  относительная погрешность между точным решением и решением, полученным МДК, уменьшается. При  $N = 7$  максимальная ошибка меньше 0,7 %, а для первой моды — меньше 0,15 %. При  $N > 7$  погрешность увеличивается. Для большинства примеров, рассматриваемых в данной работе, оптимальное число  $N$  равно 7 или 8. Из таблицы также следует, что при  $N = 5$  резонансная частота для третьей моды не может быть получена. Следовательно, так же как и другие численные методы, МДК имеет границы применимости.

**4. Сравнение результатов, полученных с использованием теорий балок Эйлера — Бернулли и Тимошенко.** Рассматривается консоль в форме параллелепипеда со следующими параметрами [16]:  $L_1 = 100$  мкм,  $L_2 = 2$  мкм,  $b = 0,6$  мкм,  $h = 10$  мкм,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $k_l/k_n = 0,9$ ,  $H = 3,3$  мкм. Из рис. 3 следует, что различие результатов расчетов зависит от толщины пластины, причем для высших мод это различие более существенное.

**5. Результаты исследования и их обсуждение.** В данном пункте с помощью МДК на основе теории балок Тимошенко исследуется динамика составной конусообразной консоли АСМ. В частности, рассматривается влияние на динамику различных параметров: изменения ширины и толщины консоли по ее длине, высоты зонда, толщины балки, отношения длин правой и левой частей консоли, а также угла между консолью и исследуемой поверхностью. Во всех рассмотренных случаях, за исключением случая, рассмотренного в подп. 5.5, массой зонда пренебрегается. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,28$ .

Относительная погрешность решения, полученного МДК,  
по сравнению с аналитическим решением задачи для консоли в форме параллелепипеда  
при  $r = 0,003$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $H/L = L_2/L_1 = k_l/k_n = 0$  и различных значениях  $N$

| $\lambda_n$ | $\Lambda_n$ | Решение методом МДК |          |          | Аналитическое решение [8] | $\varepsilon$ , % |          |          |
|-------------|-------------|---------------------|----------|----------|---------------------------|-------------------|----------|----------|
|             |             | $N = 5$             | $N = 6$  | $N = 7$  |                           | $N = 5$           | $N = 6$  | $N = 7$  |
| $\lambda_1$ | 0           | 1,805537            | 1,839068 | 1,848309 | 1,850396                  | 2,424292          | 0,612193 | 0,112781 |
| $\lambda_2$ |             | 4,206643            | 4,259827 | 4,326152 | 4,330587                  | 2,862060          | 1,633963 | 0,102409 |
| $\lambda_3$ |             | —                   | 6,609027 | 6,677937 | 6,723743                  | —                 | 1,706133 | 0,681251 |
| $\lambda_1$ | 25          | 3,424188            | 3,432521 | 3,426194 | 3,424321                  | 0,003893          | 0,239464 | 0,054702 |
| $\lambda_2$ |             | 4,927864            | 5,025064 | 5,096177 | 5,089447                  | 3,174856          | 1,265029 | 0,132234 |
| $\lambda_3$ |             | —                   | 6,747829 | 6,872772 | 6,921333                  | —                 | 2,506800 | 0,701613 |
| $\lambda_1$ | 50          | 3,563901            | 3,562210 | 3,560291 | 3,561156                  | 0,077089          | 0,029597 | 0,024290 |
| $\lambda_2$ |             | 5,466744            | 5,487488 | 5,511430 | 5,510266                  | 0,789840          | 0,413374 | 0,021117 |
| $\lambda_3$ |             | —                   | 6,952176 | 7,104594 | 7,136534                  | —                 | 2,583299 | 0,447563 |
| $\lambda_1$ | 100         | 3,633365            | 3,632663 | 3,630374 | 3,630984                  | 0,065575          | 0,046241 | 0,016803 |
| $\lambda_2$ |             | 6,085107            | 5,897359 | 5,858617 | 5,831941                  | 4,341019          | 1,121719 | 0,457407 |
| $\lambda_3$ |             | —                   | 7,426093 | 7,522730 | 7,507048                  | —                 | 1,078387 | 0,208897 |
| $\lambda_1$ | 150         | 3,649694            | 3,655621 | 3,651717 | 3,653593                  | 0,106723          | 0,055507 | 0,051355 |
| $\lambda_2$ |             | 6,418190            | 5,988330 | 5,975845 | 5,954877                  | 7,780404          | 0,561775 | 0,352115 |
| $\lambda_3$ |             | —                   | 7,812164 | 7,787287 | 7,737165                  | —                 | 0,969334 | 0,647812 |
| $\lambda_1$ | 200         | 3,659929            | 3,672538 | 3,664337 | 3,664151                  | 0,115219          | 0,228896 | 0,005076 |
| $\lambda_2$ |             | 6,642630            | 6,045892 | 6,031571 | 6,011539                  | 10,498001         | 0,571451 | 0,333224 |
| $\lambda_3$ |             | —                   | 8,115302 | 7,925260 | 7,874612                  | —                 | 3,056532 | 0,643181 |

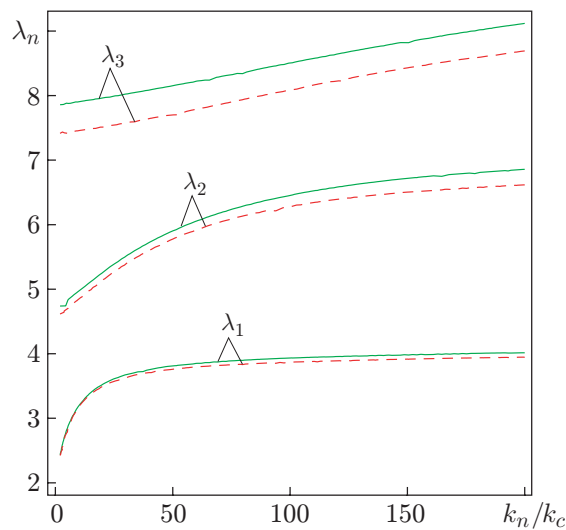


Рис. 3. Результаты расчетов, полученные с использованием теорий балок Эйлера — Бернулли (сплошные линии) и Тимошенко (штриховые линии)

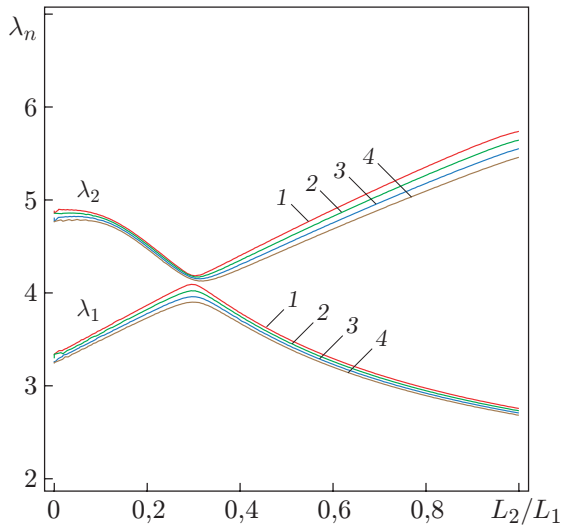


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость частот первой и второй мод колебаний от отношения  $L_2/L_1$  при  $\Lambda_n = 30$ ,  $H/L = 0$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $k_l/k_n = 0$ ,  $D_h = C_h = D_b = C_b = 0,1$  и различных значениях параметра балки Тимошенко  $r$ :

1 —  $r = 0,006$ , 2 —  $r = 0,007$ , 3 —  $r = 0,008$ , 4 —  $r = 0,009$

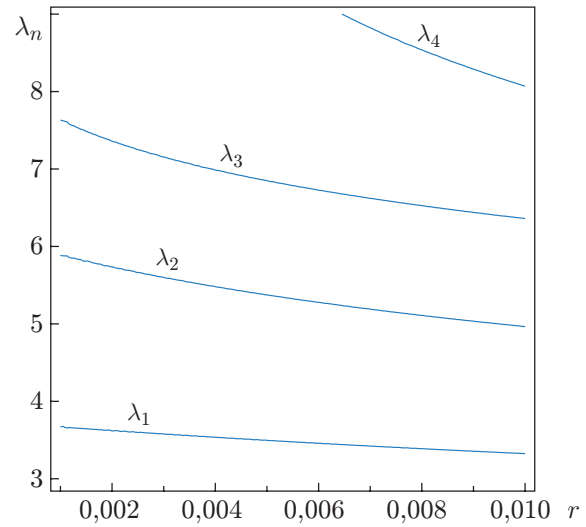


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость частоты от параметра балки Тимошенко  $r$  при  $\Lambda_n = 30$ ,  $k_l/k_n = 0,8$ ,  $H/L = 20/300$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $L_2/L_1 = 0,03$ ,  $C_b = D_b = 0,3$ ,  $C_h = D_h = 0,4$

5.1. *Влияние положения зонда при контакте на резонансную частоту.* На рис. 4 показано влияние параметра положения зонда при контакте  $l_c = L_2/L_1$  на моды колебания при различных значениях параметра  $r$  в теории балок Тимошенко, характеризующего инерцию вращения. Приведены результаты для первой и второй мод колебаний как наиболее существенных для данного процесса. При  $l_c < 0,3$  скорость изменения частот первой и второй мод колебаний больше, чем при  $l_c > 0,3$ .

Из приведенных результатов следует, что частота зависит от параметра  $l_c$ , поэтому данный параметр можно использовать для контроля резонансной частоты. При проектировании консоли АСМ нельзя пренебрегать влиянием этого параметра на частоту. Из рис. 4 следует, что с увеличением параметра  $r$  резонансная частота уменьшается. Фактически резонансная частота зависит от толщины балки.

5.2. *Влияние параметра  $r$  балки Тимошенко на резонансную частоту.* На рис. 5 приведены зависимости частот первых четырех мод колебаний от параметра  $r$ . Видно, что с увеличением параметра  $r$  частота уменьшается. Этот параметр, а следовательно, и деформации сдвига и инерции вращения оказывают более значительное влияние на высшие моды колебаний.

5.3. *Влияние контактной жесткости на резонансную частоту.* На рис. 6 приведены зависимости частоты от контактной жесткости  $\Lambda_n$  при различных значениях параметра  $r$ . Видно, что вторая и третья моды колебаний зависят от контактной жесткости при всех ее значениях. Первая мода зависит от контактной жесткости только при  $\Lambda_n < 40$ . Это значение будем называть критическим значением нормальной контактной жесткости. При переходе через это значение качественно меняется зависимость частоты от нормальной контактной жесткости.

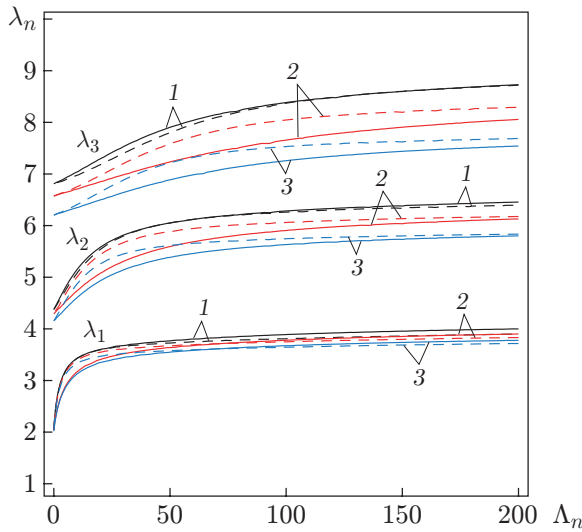


Рис. 6

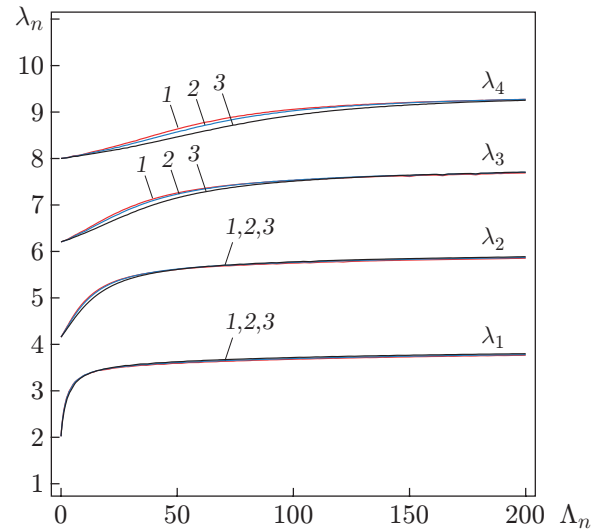


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость частоты первых трех мод колебаний составной конусообразной консоли АСМ от контактной жесткости  $\Lambda_n$  при  $H/L = 12/200$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $L_2/L_1 = 0,03$ ,  $C_b = D_b = 0,3$ ,  $C_h = D_h = 0,4$ :

сплошные линии —  $k_l/k_n = 0,9$ , штриховые —  $k_l/k_n = 0,1$ ; 1 —  $r = 0,001$ , 2 —  $r = 0,002$ , 3 —  $r = 0,004$

Рис. 7. Зависимость частоты от контактной жесткости при  $H/L = 20/300$ ,  $L_2/L_1 = 0,03$ ,  $r = 0,004$ ,  $k_l/k_n = 0,5$ ,  $C_b = D_b = 0,3$ ,  $C_h = D_h = 0,4$  и различных значениях угла  $\alpha$ :

1 —  $\alpha = 5^\circ$ ; 2 —  $\alpha = 15^\circ$ ; 3 —  $\alpha = 30^\circ$

С увеличением поперечной контактной жесткости увеличивается влияние нормальной контактной жесткости при ее значениях, больших критических, причем это влияние является более существенным для первой моды. Однако при значениях контактной жесткости, меньших критического, с увеличением поперечной контактной жесткости влияние нормальной контактной жесткости уменьшается. Более того, с увеличением параметра  $r$  частота быстро уменьшается.

5.4. *Влияние угла  $\alpha$  между консолью и исследуемой поверхностью на резонансную частоту.* На рис. 7 приведены зависимости частоты первых четырех мод колебаний консоли в форме параллелепипеда от нормальной контактной жесткости  $\Lambda_n$  при различных значениях угла  $\alpha$ .

Частоты всех мод колебаний зависят от угла  $\alpha$ , но их зависимость от нормальной контактной жесткости слабо меняется с изменением этого угла. С увеличением угла безразмерная частота уменьшается. Таким образом, частоту можно контролировать, изменяя угол  $\alpha$ . Очевидно, что с увеличением угла  $\alpha$  его влияние на моды колебаний уменьшается.

5.5. *Влияние высоты зонда  $H$  на резонансную частоту.* На рис. 8 приведены зависимости резонансных частот от контактной жесткости при различных значениях высоты зонда. При получении этих зависимостей учитывалась масса зонда. Были выбраны следующие параметры АСМ [5]:  $E = 170$  ГПа,  $\rho = 2330$  кг/м<sup>3</sup>,  $L_1 = 300$  мкм,  $L_2/L_1 = 0,03$ ,  $a = 50$  мкм,  $b = 2$  мкм,  $h = 10$  мкм,  $d = 3$  мкм,  $m_{tip} = 2 \cdot 10^{-13}$  кг,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $k_l/k_n = 0,9$ ,  $C_b = D_b = 0,3$ ,  $C_h = D_h = 0,4$ .

Частота увеличивается с увеличением высоты зонда  $H$ . Влияние высоты зонда на первую моду более существенно при контактной жесткости  $\Lambda_n > 20$ , на вторую моду —

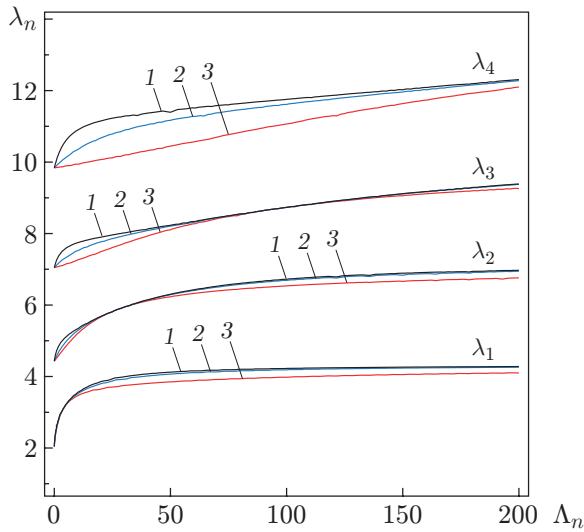


Рис. 8

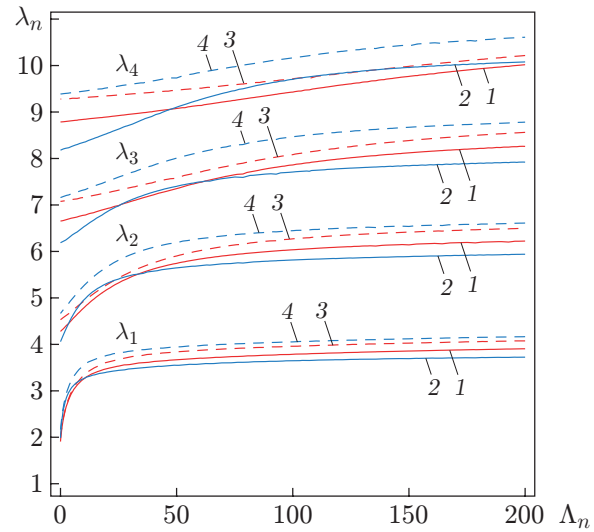


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость частоты первых четырех мод колебаний от контактной жесткости при  $\alpha = 15^\circ$ ,  $L_2/L_1 = 0,03$ ,  $r = 0,003$ ,  $k_l/k_n = 0,9$  и различных значениях высоты зонда:

1 —  $H/L = 120/300$ ; 2 —  $H/L = 60/300$ ; 3 —  $H/L = 20/300$

Рис. 9. Зависимость частоты от контактной жесткости для первых четырех мод колебаний конусообразной консоли при различных значениях коэффициентов  $C_h$ ,  $C_b$ ,  $D_h$ ,  $D_b$  при  $\alpha = 15^\circ$ ,  $H/L = 12/200$ ,  $L_2/L_1 = 0,03$ ,  $r = 0,002$ ,  $k_l/k_n = 0,9$ : 1, 2 —  $C_b = D_b = 0$  (1 —  $C_h = D_h = 0,3$ , 2 —  $C_h = D_h = 0,6$ ); 3, 4 —  $C_h = D_h = 0$  (3 —  $C_b = D_b = 0,3$ , 4 —  $C_b = D_b = 0,6$ )

при  $\Lambda_n < 30$ , на третью моду — при  $\Lambda_n < 70$ . Влияние высоты зонда на четвертую моду существенно при всех значениях жесткости. Таким образом, при конструировании консолей для АСМ необходимо учитывать влияние высоты зонда на их динамику.

5.6. *Влияние коэффициентов  $C_h$ ,  $C_b$ ,  $D_h$ ,  $D_b$  на резонансную частоту.* На рис. 9 приведены зависимости частот колебаний от контактной жесткости при различных значениях коэффициентов  $C_h$ ,  $C_b$ ,  $D_h$ ,  $D_b$ , характеризующих закон изменения толщины и ширины консоли. Для всех мод колебаний с увеличением коэффициентов  $C_b$ ,  $D_b$  резонансная частота увеличивается, а критическое значение контактной жесткости уменьшается. Влияние коэффициентов  $C_b$ ,  $D_b$  на контактную жесткость уменьшается, если она превышает критическое значение. Если контактная жесткость меньше критического значения, то влияние этих коэффициентов на нее увеличивается. Если контактная жесткость меньше критической, то с увеличением коэффициентов  $C_h$ ,  $D_h$  увеличиваются резонансная частота и влияние нормальной контактной жесткости на моды колебаний. Если контактная жесткость больше критической, то с увеличением коэффициентов  $C_h$ ,  $D_h$  резонансная частота и влияние нормальной контактной жесткости на моды колебаний уменьшаются.

**Заключение.** В работе для конусообразной консоли АСМ с использованием теории балок Тимошенко изучено влияние положения зонда при контакте, контактной жесткости, высоты зонда, толщины балки, законов изменения ширины и толщины консоли по ее длине, угла между консолью и исследуемой поверхностью на частоту различных мод колебаний. Для решения дифференциальных уравнений движения использован метод дифференциальных квадратур. Из результатов решений следует, что с увеличением числа

точек сетки ошибка численного решения уменьшается до тех пор, пока это число меньше оптимального. При дальнейшем увеличении числа точек погрешность увеличивается. Влияние контактной жесткости на частоту первой моды существенно только при малых значениях контактной жесткости. Контактная жесткость оказывает влияние на частоты высших мод в достаточно большом интервале ее изменения.

С увеличением поперечной контактной жесткости ее влияние на моды колебаний увеличивается, если она больше критического значения. Для первой моды это влияние более существенное. Все моды колебаний зависят от толщины балки Тимошенко, причем для высших мод эта зависимость более сильная.

При учете поперечного сдвига и инерции вращения поперечного сечения необходимо использовать уравнения балки Тимошенко. Если в уравнениях балки Тимошенко параметры  $r$  и  $s$  положить равными нулю, то эти уравнения перейдут в уравнения балки Эйлера — Бернулли.

Поскольку частота зависит от положения зонда при контакте, ее необходимо учитывать при проектировании консолей АСМ. Все моды колебаний зависят от угла между консолью и исследуемой поверхностью  $\alpha$ , но с увеличением угла  $\alpha$  их зависимость от контактной жесткости меняется незначительно.

С увеличением коэффициентов  $C_b$ ,  $D_b$  резонансная частота увеличивается, критическое значение контактной жесткости уменьшается, а влияние контактной жесткости на резонансную частоту уменьшается, если контактная жесткость больше критического значения, и увеличивается, если она меньше критического значения.

С увеличением коэффициентов  $C_h$ ,  $D_h$  критическое значение контактной жесткости уменьшается, а резонансная частота и влияние контактной жесткости на моды колебаний уменьшаются, если контактная жесткость больше критического значения, и увеличиваются, если она меньше критического значения. С увеличением высоты зонда  $H$  частота увеличивается. При увеличении высоты зонда влияние контактной жесткости на моды колебаний существенно в ограниченном диапазоне значений нормальной контактной жесткости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Binning G., Quate C. F., Gerber C.** Atomic force microscope // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 930–933.
2. **Turner J. A., Wiehn J. S.** Sensitivity of flexural and torsional vibration modes of atomic force microscope cantilevers to surface stiffness variations // *Nanotechnol.* 2001. V. 12. P. 322–330.
3. **Dupas E., Gremaud G., Kulik A.** High-frequency mechanical spectroscopy with an atomic force microscope // *Rev. Sci. Instrum.* 2001. V. 72, N 10. P. 3891–3897.
4. **Chang W. J., Chu S.** Analytical solution of flexural vibration responses on taped atomic force microscope cantilevers // *Phys. Lett. A.* 2003. V. 309. P. 133–137.
5. **Wu T. S., Chang W. J., Hsu J. C.** Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers // *Microelectron. Engng.* 2004. V. 71. P. 15–20.
6. **Shen K., Hurley D. C., Turner J. A.** Dynamic behavior of dagger-shaped cantilevers for atomic force microscopy // *Nanotechnol.* 2004. V. 15. P. 1582–1589.
7. **Lee H. L., Chang W. J., Yang Y. C.** Flexural sensitivity of a V shaped cantilever of an atomic force microscope // *Materials Chem. Phys.* 2005. V. 92. P. 438–442.
8. **Song Y., Bhushan B.** Simulation of dynamic modes of atomic force microscopy using a 3D finite element model // *Ultramicroscopy.* 2006. V. 106. P. 847–873.

9. **Chen T. Y., Lee H. L.** Damping vibration of scanning near-field optical microscope probe using the Timoshenko beam model // *Microelectron. J.* 2009. V. 40. P. 53–57.
10. **Shu C.** *Differential quadrature and its application in engineering.* Singapore: Springer, 1999.
11. **Ozgumus O. O., Kaya M. O.** Energy expressions and free vibration analysis of a rotating double tapered Timoshenko beam featuring bending-torsion coupling // *Intern. J. Engng Sci.* 2007. V. 45. P. 562–586.
12. **Sader J. E.** Susceptibility of atomic force microscope cantilevers to lateral forces // *Rev. Sci. Instrum.* 2003. V. 74, N 4. P. 2438–2443.
13. **Yeh M. K., Tai N. H., Chen B. Y.** Influence of Poisson's ratio variation on lateral spring constant of atomic force microscopy cantilevers // *Ultramicroscopy.* 2008. V. 108. P. 1025–1029.
14. **Song Y., Bhushan B.** Finite-element vibration analysis of tapping-mode atomic force microscopy in liquid // *Ultramicroscopy.* 2007. V. 107. P. 1095–1104.
15. **Zhong H., Guo Q.** Nonlinear vibration analysis of Timoshenko beam using the differential quadrature method // *J. Nonlinear Dynamics.* 2003. V. 32. P. 223–234.
16. **Bhushan B.** *Handbook of nanotechnology.* S. l.: Springer, 2001.

*Поступила в редакцию 12/XII 2011 г.*

---