

- [ 7. Сирович Л. Кинетическое моделирование газовых смесей // Некоторые вопросы кинетической теории газов/Под ред. В. П. Шидловского.— М.: Мир, 1965.
8. Коган М. Н. Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967.
9. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.— М.: Мир, 1978.
10. Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Тиганов И. И. Аналитические аппроксимации сечений рассеяния и частот столкновений для модельных потенциалов.— Л., 1984.— (Препр./ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР; № 893).
11. Горбачев Ю. Е. Расчет частот столкновений в гетерогенных средах на основе потенциала Кихары // ЖТФ.— 1980.— Т. 50, вып. 2.
12. Колесниченко Е. Г. О методике вывода гидродинамических уравнений для сложных систем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 3.
13. Hanson F. B., Morse T. F. Kinetic models for a gas with internal structure // Phys. Fluids.— 1967.— V. 10, N 2.

г. Ленинград

Поступила 6/1 1987 г.,  
в окончательном варианте — 20/VI 1988 г.

УДК 532.72

В. И. Найденов, Ю. В. Отрашевский

### О ВОЗНИКНОВЕНИИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В НЕПОДВИЖНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Неустойчивость Марангони в неподвижном слое жидкости постоянной вязкости исследовалась в [1—3]. В химико-технологических процессах (например, при неизотермической хемосорбции газов жидкими пленками) часто используются вязкие жидкости с большими числами Прандтля [4]. Динамическая вязкость таких жидкостей сильно уменьшается с ростом температуры, и этот эффект, по-видимому, должен существенно влиять на критические числа Марангони, определяющие условия возникновения термокапиллярной конвекции. Учет переменности физических свойств жидкости актуален и при исследовании процессов гидромеханики и теплообмена при выращивании кристаллов [5—8].

Ниже решена задача об устойчивости неподвижного слоя вязкой жидкости, контактирующего с газом, с учетом зависимости поверхностного натяжения и коэффициента динамической вязкости от температур. Аналитически построена кривая нейтральной устойчивости, связывающая критическое число Марангони, градиент вязкости по толщине слоя и волновое число трехмерных возмущений.

Рассмотрим неподвижный слой жидкости, на свободной поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Уравнение Навье — Стокса и конвективного теплообмена примем в виде

$$(1) \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\partial T / \partial t + (\mathbf{v} \nabla T) = a \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$  — скорость жидкости;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $a$  — плотность, динамический коэффициент вязкости и коэффициент температуропроводности;  $a = \lambda / \rho c_p$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $c_p$  — удельная теплоемкость.

Допустим, что вязкость жидкости экспоненциально зависит от температуры, а коэффициент поверхностного натяжения — линейно:

$$(2) \quad \mu = \mu_w e^{-\beta(T-T_w)}, \quad \sigma = \sigma_w - \varepsilon(T - T_w)$$

( $\beta$ ,  $\varepsilon$  — аппроксимирующие параметры,  $T_w$  — температура стенки). Зависимости (2) справедливы для широкого класса несжимаемых жидкостей [9 — 11].

Пусть состояние равновесия описывается стационарным решением (1), соответствующим режиму теплопроводности:

$$(3) \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} = 0, \quad \bar{T}(0) = T_w, \quad \lambda \frac{d\bar{T}}{dy}(h) = \alpha [T(h) - T_0].$$

Здесь  $h$  — толщина слоя;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена;  $T_0$  — температура газа.

Решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (3) имеет вид

$$(4) \quad \widehat{T} - T_w = - \frac{\text{Bi}(T_w - T_0)}{1 + \text{Bi}} \frac{y}{h}, \quad \frac{d\widehat{T}}{dy} = - \frac{\text{Bi}(T_w - T_0)}{(1 + \text{Bi})h}$$

( $\text{Bi} = \alpha h / \lambda$  — критерий Био). В дальнейшем будем считать, что температура стенки больше температуры газа, а температурный градиент отрицателен ( $dT/dy < 0$ ). В случае задания на стенке теплового потока первое граничное условие (3) примет вид  $\lambda \frac{dT}{dy}(0) = -q_w$  ( $q_w > 0$ ).

Исследуем на устойчивость стационарное состояние (4) методом малых возмущений. Пусть  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ,  $T = \widehat{T}(y) + T'(x, y, z, \tau)$  ( $\mathbf{w}$ ,  $T'$  — возмущения скорости и температуры). Введем безразмерные величины

$$y = y/h, \quad x = x/h, \quad z = z/h, \quad \tau = t\mu_w/(\rho h^2), \quad \text{Pr}_w = \gamma_w/a, \quad \gamma_w = \mu_w/\rho,$$

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0} \left( \frac{(T - T_0)\lambda}{q_w h} \right), \quad \text{Ma} = \frac{\varepsilon(T_w - T_0)h}{\mu_n a} \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} \left( \frac{\varepsilon q_w h^2}{\lambda \mu_n a} \right),$$

$$N = -\beta \frac{d\widehat{T}}{dy} \frac{h}{\lambda} - \frac{\beta(T_w - T_0)\text{Bi}}{1 + \text{Bi}}, \quad \omega = \frac{\mathbf{w}}{\gamma_w/h^2}$$

( $\mu_n = \mu_w e^{-N}$  — вязкость жидкости при температуре поверхности).

Двукратным применением операции вихря к уравнению Навье — Стокса исключим давление и получим скалярное уравнение для нормальной компоненты скорости  $\omega_y = \omega$ . Это уравнение и уравнение конвективного теплообмена линеаризуем в окрестности стационарного решения (3), (4). В результате имеем

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \omega = f \Delta \omega + f'' \Delta \omega + 2f' \frac{\partial}{\partial y} \Delta \omega + 2f'' \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \text{Pr}_w \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \omega = \Delta \Theta,$$

где  $f = e^{Ny}$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа; штрих означает производную по  $y$ .

Далее предположим, что свободная поверхность жидкости недеформируема (параметр искривленности мал), а влияние капиллярных сил сводится к возникновению градиентов поверхностного натяжения, которые уравновешиваются касательными напряжениями. Для возмущения температуры примем обычные краевые условия, учитывающие теплообмен на свободной поверхности и твердой стенке:

$$(6) \quad \omega(0) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}(0) = 0, \quad \omega(1) = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(1) = \text{Ma} \Delta_1 \Theta|_{y=1},$$

$$\Theta(0) = 0 \text{ (или } \Theta'(0) = 0), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y}(1) = -\text{Bi} \Theta(1) \left( \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Первое и второе граничные условия (6) следуют из гипотезы прилипания и уравнения неразрывности.

Отметим, что при постоянной вязкости  $N = 0$ ,  $f = 1$  и получается известная задача Пирсона [1] о возникновении термокапиллярной конвекции в неподвижном слое жидкости.

Следуя широко распространенной гипотезе Пелью и Саутвелла [11], решение (5) с краевыми условиями (6) ищем в виде

$$(7) \quad \omega(x, y, z, \tau) = -F(x, z)\omega(y)e^{\sigma\tau}, \quad \Theta(x, y, z, \tau) = F(x, z)\Theta(y)e^{\sigma\tau}$$

( $F(x, z)$  — функции горизонтальной структуры, удовлетворяющие уравнению  $\Delta_1 F = -\alpha^2 F$ ). Используя (5) — (7), получим спектральную задачу

$$(8) \quad \sigma(\omega'' - \alpha^2 \omega) = f(y)[\omega^{IV} - 2\alpha^2 \omega'' + \alpha^4 \omega - N^2(\omega'' - \alpha^2 \omega) +$$

$$+ 2N(\omega''' - \alpha^2 \omega')] + 2N^2 \omega''],$$

$$\text{Pr}_w \sigma + \omega = \Theta'' - \alpha^2 \Theta,$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 0, \quad \omega(1) = 0, \quad \omega''(1) = \text{Ma} \alpha^2 \Theta(1),$$

$$\Theta(0) = 0 \text{ (или } \Theta'(0) = 0), \quad \Theta'(1) = -\text{Bi} \Theta(1).$$

Рассмотрим нейтральное возмущение  $\sigma = 0$ . В этом случае получают уравнения с постоянными коэффициентами

$$(9) \quad \omega^{IV} - 2\alpha^2\omega'' + \alpha^4\omega - N^2(\omega'' - \alpha^2\omega) + 2N(\omega''' - \alpha^2\omega') + 2N^2\omega'' = 0, \quad \Theta'' - \alpha^2\Theta = \omega$$

с краевыми условиями (8).

Построим функцию Грина оператора  $\Theta'' - \alpha^2\Theta = 0$  с краевыми условиями  $\Theta(0) = 0$ ,  $\Theta'(1) = -Bi \Theta(1)$  и вычислим ее значение на межфазной границе ( $y = 1$ ):

$$G(\xi, \alpha, Bi) = - \frac{(e^{\alpha\xi} - e^{-\alpha\xi})}{e^{-\alpha}(\alpha - Bi) + e^{\alpha}(\alpha + Bi)}.$$

Возмущение температуры свободной поверхности в этом случае

$$\Theta(1) = \frac{Bi}{1 + Bi} \int_0^1 G(\xi, \alpha, Bi) \omega(\xi) d\xi.$$

Кривая нейтральной устойчивости примет вид

$$(10) \quad Ma = \frac{\omega''(1, \alpha, N)}{\alpha^2 \int_0^1 G(\xi, \alpha, Bi) \omega(\xi) d\xi}$$

( $\omega$  — решение гидродинамического уравнения (9)). Из соотношения (10) следует  $Ma \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$ . Сравнительно нетрудно построить асимптоты (10). При  $\alpha \rightarrow \infty$  влияние параметра  $N$  несущественно и уравнение (10) имеет те же асимптоты, что и кривая нейтральной устойчивости в задаче Пирсона [1].

При  $\alpha \rightarrow 0$  гидродинамическое уравнение (9) упрощается:

$$(11) \quad \omega^{IV} + 2N\omega''' + N^2\omega'' = 0.$$

Уравнение (11) имеет фундаментальную систему решений  $\omega = \{1, \xi, \xi e^{-N\xi}, e^{-N\xi}\}$ . Используя эту систему, получим

$$Ma_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{1 + Bi}{\alpha^2} \varphi_1(N) \text{ — задана температура стенки,}$$

$$Ma_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{Bi}{\alpha^2} \varphi_2(N) \text{ — задан тепловой поток.}$$

Функции  $\varphi_1(N)$  и  $\varphi_2(N)$  находятся в результате решения гидродинамических уравнений

$$\varphi_1(N) = \frac{6N^4 e^{-N} (N^2 - 2N + 2 - 2e^{-N})}{(N^3 - 18N + 12) + (2N^4 + 5N^3 + 12N^2 + 12N - 24)e^{-N} + (6N^2 + 12)e^{-2N}},$$

$$\varphi_2(N) = \frac{2N^3 e^{-N} (N^2 - 2N + 2 - 2e^{-N})}{N^2 - 4N + 2 + (N^3 + N^2 + 4N - 4)e^{-N} + 2e^{-2N}}.$$

Можно проверить, что при  $N \rightarrow 0$   $\varphi_1 \rightarrow 80$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 48$ , т. е. получим нейтральную кривую Пирсона для слоя жидкости постоянной вязкости.

Введем функции  $\chi_1 = \varphi_1/80$ ,  $\chi_2 = \varphi_2/48$ , тогда

$$(12) \quad Ma/Ma(0) = \chi_1(N), \quad Ma/Ma(0) = \chi_2(N),$$

где  $Ma(0)$  — критические числа Марангони в случае постоянной вязкости, вычисленные при вязкости жидкости на поверхности пленки.

Соотношения (12) отражают влияние зависимости вязкости от температуры на критические условия возникновения термокапиллярной кон-

векции в неподвижном слое жидкости. Приведем численные выражения функций  $\chi_1, \chi_2$ :

$$\begin{aligned} N &= 0; 0,5; 1; 2; 3; \\ \chi_1 &= 1; 0,86; 0,65; 0,41; 0,26; \\ \chi_2 &= 1; 0,83; 0,62; 0,38; 0,23. \end{aligned}$$

Обращает на себя внимание сильное снижение критических чисел Марангони за счет уменьшения вязкости жидкости. Например, для глицерина при температурном перепаде  $15^\circ\text{C}$ ,  $\beta = 0,07 \text{ град}^{-1}$ ,  $N = 1$  числа Марангони уменьшаются примерно в 1,5 раза. Построим кривую нейтральной устойчивости во всем диапазоне волновых чисел  $0 < \alpha < \infty$ . Для этого необходимо решить гидродинамическое уравнение (9). Решение (9) ищем в виде  $\omega(y) = e^{\beta n y}$ ; подставляя это выражение в (9), получим для определения  $\beta_n$  алгебраическое уравнение

$$(13) \quad \beta_n^{IV} - 2\alpha^2 \beta_n^{\ddot{z}} + \alpha^4 - N^2[\beta_n^2 - \alpha^2] + 2N(\beta_n^{\ddot{z}} - \alpha^2 \beta_n) + 2N^2 \beta_n^2 = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Нетрудно найти корни (13):

$$\beta_n = z_n - N/2, \quad z_n^2 = \alpha^2 + N^2/4 \pm N\alpha i.$$

Здесь  $z$  определяется корнем квадратного уравнения;  $i$  — мнимая единица. Пусть  $\text{tg } \varphi_0 = N\alpha/(N^2/4 + \alpha^2)$ ,  $k = \sqrt[4]{(N^2/4 + \alpha^2) + N^2\alpha^2}$ . Тогда корни (13) будут следующими:

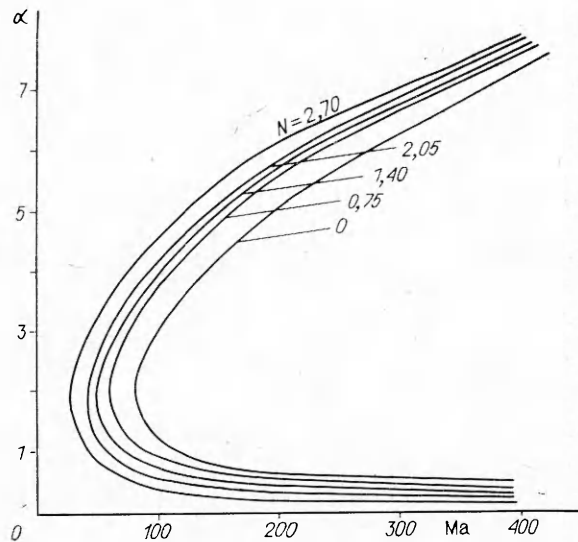
$$\begin{aligned} \beta_1 &= k \left[ \cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] - \frac{N}{2}, \quad \beta_2 = k \left[ \cos \frac{\varphi_0}{2} - i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] - \frac{N}{2}, \\ \beta_3 &= -k \left[ \cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] - \frac{N}{2}, \quad \beta_4 = -k \left[ \cos \frac{\varphi_0}{2} - i \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] - \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, фундаментальная система решений (9) имеет вид

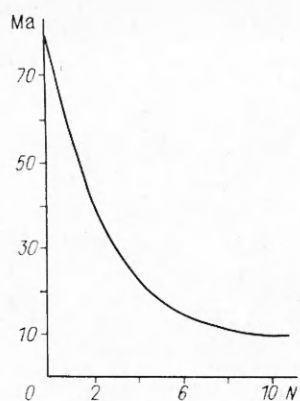
$$\omega(\xi) = \{ e^{k_1 \xi} \cos k_2 \xi, e^{k_1 \xi} \sin k_2 \xi, e^{k_3 \xi} \cos k_2 \xi, e^{k_3 \xi} \sin k_2 \xi \},$$

где  $k_1 = k \cos \frac{\varphi_0}{2} - \frac{N}{2}$ ;  $k_2 = k \sin \frac{\varphi_0}{2}$ ;  $k_3 = -k \cos \frac{\varphi_0}{2} - \frac{N}{2}$ . Используя эту систему, вычисляя сопутствующие интегралы, можно рассчитать кривую нейтральной устойчивости, минимальные критические числа Марангони, критические волновые числа (рис. 1, 2,  $Bi = 0,01$ ).

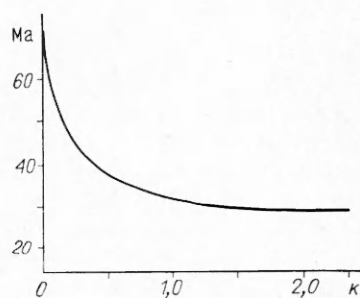
Так как полученное решение не учитывает зависимость плотности от температуры, то оно справедливо при малых числах Рэлея, т. е. для достаточно тонких слоев жидкости. В связи с этим сделаем следующее замечание. Как хорошо известно [6, 11], существует критическая толщина пленки  $h_*$  такая, что при  $h \gg h_*$  преобладает естественная конвекция, а при  $h \ll h_*$  существует термокапиллярный механизм потери устойчивости. В промежуточной области действуют оба механизма потери устойчивости жидкого слоя, подог-



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

реваемого снизу. Интересно оценить критические значения толщины пленки  $h_{**}$ , при которых существенно влияние зависимости вязкости от температуры.

Введем безразмерный параметр  $K = Ne^N/Ma = \mu_w \beta a / \epsilon h$ , характеризующий соотношение двух дестабилизирующих эффектов: зависимости вязкости и поверхностного натяжения от температуры. Используя расчеты критических чисел Марангони, построим зависимость  $Ma^*(K)$  (рис. 3), анализ которой показывает, что уже при  $K = 0,05$  происходит существенное понижение (до 30 %) критических чисел Марангони. Этой области изменения  $K$  отвечают толщины пленки порядка  $h_{**} = \mu_w \beta a / \epsilon K$ , откуда следует, что с увеличением вязкости жидкости и параметра  $\beta$ , пропорционального энергии активации вязкого течения, критические толщины пленки возрастают. Поэтому существенное понижение минимальных чисел Марангони за счет уменьшения вязкости с ростом температуры характерно для жидкостей с большими числами Прандтля. Например, для глицерина  $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 12490$ ,  $h_{**} = 4,8$  мм, для масла МС-20  $T = 30^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 7300$ ,  $h_{**} = 1,7$  мм, для метанола  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 6$ ,  $h_{**} = 0,28 \cdot 10^{-3}$  мм, для толуола  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 9$ ,  $h_{**} = 0,16 \cdot 10^{-3}$  мм, для воды  $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 6$ ,  $h_{**} = 0,3 \cdot 10^{-3}$  мм. Величина  $h_{**}$  имеет порядок 1—5 мм, поэтому для земных условий механизм понижения устойчивости за счет уменьшения вязкости действует всегда для жидкостей с большими числами Прандтля ( $Pr > 100$ ), для жидкостей с умеренными числами Прандтля (органические жидкости, вода) дестабилизирующий эффект переменной вязкости незначителен.

Близкая задача о влиянии на конвекцию Марангони изменения вязкости от температуры рассматривалась в [12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 4, N 5.
2. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 19, N 3.
3. Дильман В. В., Найденов В. И., Олевский В. В. Неизотермическая неустойчивость Марангони в стекающей пленке жидкости // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 3.
4. Найденов В. И., Полянин А. Д. О некоторых нелинейных конвективно-тепловых эффектах в теории фильтрации и гидродинамике // ДАН СССР.— 1984.— Т. 279, № 3.
5. Авдусевский В. С., Ишлинский А. Ю., Полежаев В. И. Гидромеханика и тепломассообмен при получении материалов // Вестн. АН СССР.— 1987.— № 6.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена.— М.: Атомиздат, 1979.
7. Гидродинамика межфазных поверхностей/Под ред. Ю. А. Бувевича, Л. М. Рабиновича.— М.: Мир, 1984.
8. Wilke H., Loser W. Numerical calculation of Marangoni convection in a rectangular open boat // Crystal Res. Technol.— 1983.— V. 18.— P. 825.

9. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей.— Л.: Химия, 1982.
10. Дильман В. В., Найденов В. И. О межфазной неустойчивости и влиянии градиента поверхностного натяжения на скорость хемосорбции при гравитационном течении жидкой пленки // Теор. основы хим. технологии.— 1986.— Т. 20, № 3.
11. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.
12. Lam T. T., Bayazitoglu Y. Effects of internal heat generation and variable viscosity on Marangoni convection // Numer. Heat Transfer.— 1987.— V. 11, N 2.

г. Москва

Поступила 4/IV 1988 г.,  
в окончательном варианте — 30/VI 1988 г.

УДК 532.526

А. Н. Кудряцев, А. С. Соловьев

### УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ СДВИГА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

При смешении двух параллельных потоков вязкого газа, движущихся с различными скоростями, вблизи границы раздела образуется течение, называемое обычно свободным слоем сдвига. Подобные течения на практике встречаются в пограничном слое струи, истекающей в затопленное пространство, в следе за несимметрично обтекаемым телом и т. п. Свободные сдвиговые течения весьма неустойчивы по отношению к малым возмущениям — слой сдвига несжимаемого газа, например, неустойчив при всех числах Рейнольдса  $Re$  [1]. Устойчивость сжимаемого слоя сдвига при конечных  $Re$ , по-видимому, ранее не исследовалась. Без учета вязкости эта задача решалась в [2—4], причем был сделан ряд дополнительных упрощений: температура во всем течении считалась постоянной, динамический профиль задавался функцией  $U(y) = th y$ .

В данной работе при исследовании устойчивости сжимаемого слоя сдвига газ считается вязким и теплопроводным, профили скорости и температуры рассчитываются из соответствующих уравнений пограничного слоя [5]. Приближения несжимаемого или невязкого газа получаются отсюда как предельные случаи, когда число Маха  $M \rightarrow 0$  или  $Re \rightarrow \infty$ . Расчеты проведены численно методом ортогонализации [6]. Показано, что при  $M \lesssim 1$  устойчивость течения определяется волновыми возмущениями с фазовой скоростью  $c_r = 0$  и нулевым критическим числом Рейнольдса  $Re_*$ . С увеличением  $M$  область неустойчивых волновых чисел сужается. При  $M \gtrsim 1$ , как и в невязкой задаче [3], устойчивость определяется бегущими волнами с  $c_r \neq 0$  (вторая мода возмущений). Обнаружено, что для второй моды  $Re_*$  отлично от нуля и уменьшается с ростом  $M$ . Построены кривые нейтральной устойчивости, собственные функции, изучена зависимость характеристик устойчивости от  $M$  при  $0 \leq M \leq 2$ .

1. Рассмотрим плоское течение в слое сдвига сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Предположим, что газ идеальный, с постоянными теплоемкостями  $c_V$  и  $c_p = \gamma c_V$ , вязкость  $\mu$  и теплопроводность  $k$  прямо пропорциональны температуре, так что число Прандтля  $Pr = \mu c_p / k$  постоянно, вторая вязкость равна нулю. Уравнения Навье — Стокса, записанные в безразмерной форме, в этом случае имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

$$\rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + (\gamma - 1) \rho \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \frac{\gamma(\gamma - 1) M^2}{Re} \sigma_{ij} e_{ij},$$

$$\mu(\theta) = \theta, \quad p = \rho \theta / \gamma M^2,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3} \mu e_{kk} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j, k = 1, 2,$$

$$M = U_* / \sqrt{\gamma R T_*}, \quad Re = \rho_* U_* \delta / \mu_*, \quad \delta = (\pi \mu X / \rho_* U_*)^{1/2}.$$

Здесь  $u_1 \equiv u$  и  $u_2 \equiv v$  — продольная и поперечная компоненты скорости в направлении осей  $x_1 \equiv x$  и  $x_2 \equiv y$  соответственно;  $\rho$ ,  $p$ ,  $\theta$  — плотность, давление и температура газа;  $R$  — газовая постоянная. Областью изменения независимых переменных  $x$  и  $y$  является вся плоскость  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ . В качестве масштаба длины взята толщина пограничного слоя между потоками  $\delta$ ,  $X$  — размерная продольная коор-