

УДК 539.374

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ПОСЛЕДУЮЩАЯ РАЗГРУЗКА СФЕРИЧЕСКОГО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Л. В. Ковтанюк

Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Приведены аналитические решения ряда одномерных квазистатических задач, описывающих процессы упругого деформирования материала полого шара, а также зарождения и развития пластического течения в нем при увеличении давления на его внешней границе. Исследован процесс разгрузки при медленном снятии нагружающего давления. Определены поля напряжений, упругих и пластических деформаций в материале сферического слоя, закономерность движения упругопластической границы и остаточные напряжения. Показано, что в отличие от случая идеальной пластичности учет вязких свойств материала при его пластическом течении исключает возможность возникновения пластического течения при разгрузке.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, остаточные напряжения.

В работе [1] изучалась динамика одиночной цилиндрической полости в упругопластической среде под действием всестороннего сжатия, а также проведен расчет распределения остаточных напряжений в ее окрестности как при малых, так и при больших деформациях. В [2, 3] рассматривались задачи со сферической симметрией, в случае когда неоднородность являлась включением в основной материал, а также вычислялись остаточные напряжения. Важным фактором, оказывающим влияние на формирование поля остаточных напряжений, является возникновение повторного пластического течения [2, 4] в процессе разгрузки, обусловленное достаточно высоким уровнем растягивающих напряжений в приграничной области поры, который имеет место вследствие неизменности необратимых деформаций при разгрузке. Наличие необратимых деформаций приводит к увеличению обратимых деформаций, в результате чего вычисляемые по ним напряжения выходят на предельную поверхность, становясь при этом растягивающими.

Целью настоящей работы является исследование данного эффекта в случае учета вязких свойств среды в условиях ее пластического течения, а также проверка возможности его возникновения при разгрузке. Такая задача допускает аналитическое решение.

1. Исходные модельные зависимости. В качестве математической модели деформируемой среды будем использовать модель упруговязкопластического тела [5], в которой реологические свойства среды учитываются только в процессе ее пластического течения, предел текучести полагается постоянным, а упрочнение в предельном состоянии не учитывается [6]. Полагаем, что деформации d_{ij} малы и представляют собой сумму обратимых

(упругих) e_{ij} и необратимых (пластических) p_{ij} деформаций:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \dot{d}_{ij} = \frac{dd_{ij}}{dt} = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u_i, v_i — компоненты векторов перемещений точек среды и их скоростей. Напряжения σ_{ij} связаны с упругими деформациями выражением

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (1.2)$$

где λ, μ — параметры Ламе.

Течение среды возникает в тех ее точках, в которых напряженные состояния достигают предельной поверхности. Эта поверхность задается обобщенным условием пластичности Мизеса [6] в форме

$$\begin{aligned} (\tau_{ij} - \eta \gamma_{ij})(\tau_{ji} - \eta \gamma_{ij}) - 8k^2/3 &= 0 = f(\tau_{ij}, \gamma_{ij}), \\ \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3, \quad \gamma_{ij} &= \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}/3, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где η — вязкость пластического течения; k — предел текучести материала. Из принципа максимума Мизеса следует ассоциированный закон течения в форме

$$\gamma_{ij} = \xi \frac{\partial f}{\partial \tau_{ij}}, \quad \xi > 0. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1)–(1.4) вместе с уравнением движения или равновесия составляют замкнутые системы уравнений как при обратимом деформировании, так и при пластическом течении. Эти соотношения можно использовать также при описании процесса разгрузки.

2. Упругое деформирование. Рассмотрим сферический слой, ограниченный поверхностями $r = r_0$ и $r = R_0$ ($r_0 < R_0$) и нагружаемый давлением $p(t)$ на внешней сферической поверхности.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{rr}|_{r=R_0} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0, \quad (2.1)$$

где σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат (r, φ, θ) .

При внешнем давлении, недостаточном для возникновения пластического течения, слой находится в равновесии: $p_0 = p(0)$. Записывая выражения для компонент тензора напряжений для рассматриваемого случая сферической симметрии ($u_r = u$)

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u' + 2\lambda \frac{u}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} + \lambda u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.2)$$

и используя уравнение равновесия среды

$$\sigma_{rr,r} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r = 0,$$

получаем уравнение в перемещениях

$$u'' + 2u'/r - 2u/r^2 = 0, \quad (2.3)$$

интегралом которого является функция

$$u = c_1(t)/r^2 + c_2(t)r,$$

где $c_1(t), c_2(t)$ — функции интегрирования.

Используя граничные условия (2.1), решение задачи линейной теории упругости находим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p_0}{F} \left(\frac{r_0^3}{r^3} - 1 \right), & \sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{p_0}{2F} \left(\frac{r_0^3}{r^3} + 2 \right), \\ u &= -\frac{p_0}{4F} \left(\frac{r_0^3}{\mu r^2} + \frac{4r}{3\lambda + 2\mu} \right), & F &= 1 - \frac{r_0^3}{R_0^3}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из зависимостей (2.4) следует, что в рассматриваемом случае условие пластичности Мизеса (1.3) в форме

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \quad (2.5)$$

сначала будет выполнено в точках поверхности $r = r_0$. Согласно (2.5) определяется требуемый уровень нагружающего давления

$$p_0 = 4kF/3.$$

3. Вязкопластическое течение. Начиная с момента времени $t = 0$ при увеличении внешней нагрузки от значения p_0 в окрестности внутренней сферической поверхности развивается область течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$. В слое $r_1(t) \leq r \leq R_0$ материал деформируется обратимо. Таким образом, граница $r = r_1(t)$ является движущейся границей развивающейся области пластического течения.

Для области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R_0$, используя зависимости (2.2), (2.3) и первое граничное условие (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p(t) + 4\mu c_1 \left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r^3} \right), & \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{6\mu c_1}{r^3}, \\ u &= c_1 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{r}{R_0^3} \right) - \frac{p(t)r}{3\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь и далее используется квазистатическое приближение, т. е. в уравнении движения среды массовые силы инерции не учитываются.

С помощью ассоциированного закона течения (1.4) условие (1.3) можно представить в виде

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 = 8k^2(1 + 2\xi\eta). \quad (3.2)$$

Согласно ассоциированному закону в форме $\varepsilon_{ij}^p = \xi \partial f / \partial \sigma_{ij}$ условие (3.2), соответствующее пластической несжимаемости материала:

$$\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \varepsilon_{rr}^p + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = 0, \quad (3.3)$$

после исключения неопределенного множителя ξ записывается в виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k + \eta(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p) = 2k + 3\eta\varepsilon_{rr}^p/2. \quad (3.4)$$

Как известно, в случае малых деформаций условие (3.3) эквивалентно зависимости [7, 1–3]

$$p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi}. \quad (3.5)$$

С учетом выражения (3.5) из (1.1) следуют два уравнения

$$u' + 2u/r = e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi}, \quad u' - u/r = e_{rr} - e_{\varphi\varphi} + 3p_{rr}/2. \quad (3.6)$$

Для компонент обратимых деформаций из закона Гука (1.2) получаем

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 2\mu)\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\lambda}{2}\sigma_{rr} \right), & e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\lambda}{2}\sigma_{rr} \right), \\ e_{rr} - e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2\mu} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), & e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Исключая обратимые деформации в (3.6) с помощью соотношений (3.7) и интегрируя полученные выражения, для перемещений находим зависимости

$$u = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int r^2 (\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}) dr, \quad u = \frac{r}{2\mu} \int \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} dr + \frac{3}{2} r \int \frac{p_{rr}}{r} dr. \quad (3.8)$$

Вычисляя неопределенные интегралы в (3.8) с помощью уравнения равновесия, окончательно получаем

$$u = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left(r\sigma_{rr} + \frac{b(t)}{r^2} \right), \quad u = -\frac{1}{4\mu} r\sigma_{rr} + \frac{3}{2} r \int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad (3.9)$$

где $b(t)$ — функция интегрирования. Приравнявая зависимости в (3.9), компоненту p_{rr} необратимых деформаций можно представить в виде

$$p_{rr} = -A(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2b(t)}{(3\lambda + 2\mu)r^3}, \quad A = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

С использованием условия пластичности (3.4) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для p_{rr}

$$\frac{3}{2} A\eta \dot{p}_{rr} + p_{rr} = -2kA - \frac{2b(t)}{(3\lambda + 2\mu)r^3}, \quad (3.10)$$

интегрируя которое находим компоненты p_{rr} , ε_{rr}^p :

$$\begin{aligned} p_{rr} &= -2kA - \frac{b_1(t)}{r^3} e^{-ht} + g(r) e^{-ht}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\frac{4\mu}{3\eta(\lambda + 2\mu)} \frac{b(t)}{r^3} + h \frac{b_1(t)}{r^3} e^{-ht} - hg(r) e^{-ht}, \\ \dot{b}_1(t) &= \frac{4\mu}{3\eta(\lambda + 2\mu)} b(t) e^{ht}, \quad h = \frac{2}{3A\eta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

($g(r)$ — произвольная функция). Используя условия равенства нулю компонент p_{rr} и ε_{rr}^p на упругопластической границе $r = r_1(t)$, находим функции $b(t)$ и $b_1(t)$:

$$b(t) = -k \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} r_1^3, \quad b_1(t) = g(r_1) r_1^3 - 2kA r_1^3 e^{ht}. \quad (3.12)$$

С учетом (3.12) из выражения $b_1(t)$ в (3.11) следует дифференциальное уравнение для функции $g(r_1)$

$$3g(r_1) + r_1 \frac{\partial g(r_1)}{\partial r_1} - 6kA e^{ht} = 0. \quad (3.13)$$

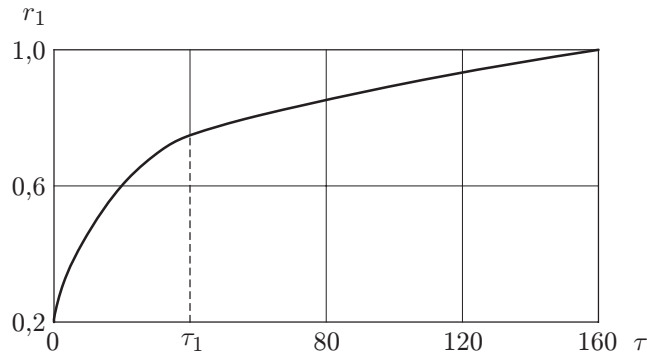


Рис. 1. Радиус области течения при изменении нагружающего давления

Компоненты напряжений в области течения определим, интегрируя уравнение равновесия с использованием условия пластичности (3.4) и второго граничного условия в (2.1):

$$\sigma_{rr} = 4k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{2}{3A} g(r_1) e^{-ht} \left(\frac{r_1^3}{r^3} - \frac{r_1^3}{r_0^3} \right) + \frac{2}{A} e^{-ht} (g_1(r) - g_1(r_0)),$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k + \frac{1}{A} e^{-ht} \left(g(r_1) \frac{r_1^3}{r^3} - g(r) \right), \quad g'_1(r) = \frac{g(r)}{r}.$$

Из условия $(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=r_1} = 2k$ находим c_1 в соотношениях (3.1): $c_1 = -kr_1^3/(3\mu)$.

Из выражения для компоненты напряжений σ_{rr} на границе $r = r_1(t)$ следует зависимость значения $r = r_1(t)$ от нагружающего давления $p(t)$

$$p(t) + \frac{4k}{3} \left(\frac{r_1^3}{R_0^3} - 1 \right) = 4k \ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{2}{3A} g(r_1) e^{-ht} \left(1 - \frac{r_1^3}{r_0^3} \right) - \frac{2}{A} e^{-ht} (g_1(r_1) - g_1(r_0)). \quad (3.14)$$

С учетом (3.13), дифференцируя уравнение (3.14), из него можно исключить функцию $g(r_1)$. В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{r}_1 = \left[h \left(p(t) + \frac{4k}{3} \left(\frac{r_1^3}{R_0^3} - 1 \right) - 4k \ln \frac{r_1}{r_0} \right) + \dot{p}(t) \right] / \left[4kr_1^2 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) \right], \quad (3.15)$$

с использованием которого можно найти закон движения упругопластической границы при любой функции $p(t)$, в том числе при постоянном давлении. Для линейной функции $p(t) = p_0(1+\gamma t)$ нормированная зависимость $r_1(\tau) = r_1(t)/R_0$ (τ — безразмерное время) приведена на рис. 1. Начиная с момента времени $\tau_1 = \gamma t_1 = 40$ давление $p(t_1)$ остается постоянным. На рис. 1 видно, что область течения продолжает развиваться и при постоянном давлении.

С использованием найденной функции $r_1(t)$ уравнение (3.13) можно решить численно, если эту зависимость аппроксимировать аналитической зависимостью, так чтобы можно было найти $t(r_1)$. Тогда, решая уравнение (3.13) при начальном условии

$$g(r_0) = 2kA + \frac{b_1(0)}{r_0^3} = 2kA - \frac{4k}{3\eta r_0^3} \left(\int r_1^3(t) e^{ht} dt \right) \Big|_{t=0},$$

следующем из зависимостей (3.12), находим функцию $g(r_1)$. Чтобы найти функцию $g(r)$, которая определяет распределение по слою всех параметров напряженно-деформированного состояния, необходимо функцию $g(r_1)$ аппроксимировать аналитической зависимостью. Аналитическое решение можно построить, задавая закон движения упругопластической границы в виде

$$r_1(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \alpha = \text{const}.$$

В этом случае решением уравнения (3.13) является функция

$$g(r_1) = \frac{6kA\alpha}{h + 3\alpha} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{h/\alpha}.$$

Следовательно, функции $g(r)$ и $g_1(r)$ определены зависимостями

$$g(r) = \frac{18kAh_1}{h_2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{h/\alpha}, \quad g_1(r) = \frac{3}{2} g(r), \quad h_1 = \alpha A\eta, \quad h_2 = 2 + 9h_1. \quad (3.16)$$

С использованием (3.14), (3.16) можно определить нагружающее давление $p(t)$ в зависимости от $r_1(t)$. Таким образом, решением задачи являются следующие соотношения:

— в области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R_0$

$$\sigma_{rr} = -p(t) - \frac{4k}{3} \left(\frac{r_1^3}{R_0^3} - \frac{r_1^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \frac{r_1^3}{r^3},$$

$$u = -\frac{kr_1^3}{3\mu} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{r}{R_0^3}\right) - \frac{p(t)r}{3\lambda + 2\mu},$$

$$p(t) = k \left[4 \ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{12h_1}{h_2} \left(1 - \frac{r_1^3}{r_0^3}\right) + \frac{54h_1^2}{h_2} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-2/(3h_1)}\right) - \frac{4}{3} \left(\frac{r_1^3}{R_0^3} - 1\right) \right];$$

— в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$

$$\sigma_{rr} = 4k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{12kh_1}{h_2} \left(\frac{r_1^3}{r^3} - \frac{r_1^3}{r_0^3}\right) + \frac{54kh_1^2}{h_2} \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{2/(3h_1)}\right],$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k + \frac{12kh_1}{h_2} \left[\frac{r_1^3}{r^3} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)}\right],$$

$$u = \frac{kr}{3\lambda + 2\mu} \left[4 \ln \frac{r_0}{r} + \frac{12h_1}{h_2} \left(\frac{r_1^3}{r^3} - \frac{r_1^3}{r_0^3}\right) + \frac{54h_1^2}{h_2} \left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{2/(3h_1)}\right) \right] - \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^3}{r^2}, \quad (3.17)$$

$$p_{rr} = -2kA + \frac{2kA}{h_2} \left[2 \frac{r_1^3}{r^3} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} \right], \quad \varepsilon_{rr}^p = \frac{12kA\alpha}{h_2} \left[\frac{r_1^3}{r^3} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} \right].$$

На рис. 2 приведено распределение нормированных перемещений u по слою в конечный момент нагружения, на рис. 3 — распределения компонент напряжений σ_{rr} (сплошная линия) и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (штриховая линия). Выбирались следующие значения постоянных: $\lambda/(\lambda + 2\mu) = 0,38876$, $\mu/(\lambda + 2\mu) = 0,30562$, $k/(\lambda + 2\mu) = 0,0025$, $r_0/R_0 = 0,2$, $h_1 = 40$. Распределения, представленные на рис. 2, 3, соответствуют моменту времени $\tau = at = 200$, когда $r_1/R_0 = 0,83$.

4. Разгрузка. Разгрузим слой, сняв внешнее давление. В области обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R_0$ справедливы зависимости (3.1). В области $r_0 \leq r \leq r_1$ накопленные необратимые деформации (3.17) не изменяются в процессе разгрузки. Согласно закону Гука для компонент напряжений в данной области имеем

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u' + 2\lambda u/r - 2\mu p_{rr}, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu(u' - u/r) - 3\mu p_{rr}. \quad (4.1)$$

С учетом зависимостей (4.1), (3.17) из уравнения равновесия следует дифференциальное уравнение для перемещения в области с накопленными необратимыми деформациями

$$u'' + 2 \frac{u'}{r} - 2 \frac{u}{r^2} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(p'_{rr} + 3 \frac{p_{rr}}{r} \right) = \frac{12k}{3\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} - 1 \right]. \quad (4.2)$$

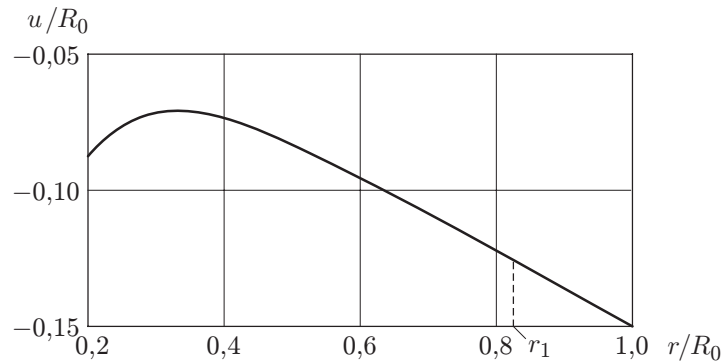
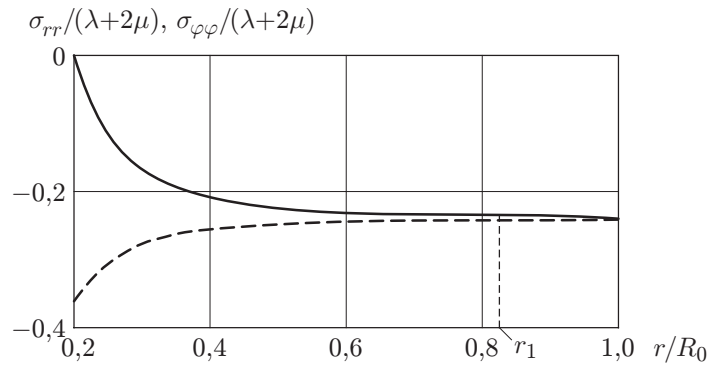


Рис. 2. Распределение перемещений в конечный момент нагружения

Рис. 3. Распределения радиального σ_{rr} (сплошная линия) и тангенциального $\sigma_{\varphi\varphi}$ (штриховая линия) напряжений в конечный момент нагружения

Решением уравнения (4.2) является функция

$$u = \frac{54kh_1^2}{h_2(3\lambda + 2\mu)} r \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} + \frac{4kr}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{3} - \ln r\right) + \frac{c_3}{r^3} + c_4 r. \quad (4.3)$$

Используя (4.1), (4.3), для компонент тензора напряжений находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 4k \left(\frac{1}{3} - \ln r\right) + \frac{54kh_1^2}{h_2} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} - \frac{8k(\lambda + 2\mu)}{h_2(3\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^3}{r^3} - 4\mu \frac{c_3}{r^3} + (3\lambda + 2\mu)c_4, \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 2k - \frac{18kh_1}{h_2} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} - \frac{12k(\lambda + 2\mu)}{h_2(3\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^3}{r^3} - 6\mu \frac{c_3}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя второе граничное условие в (2.1), из соотношений (4.3), (4.4) получаем выражение для $c_4(t)$:

$$c_4 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[-4k \left(\frac{1}{3} - \ln r_0\right) - \frac{54kh_1^2}{h_2} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{2/(3h_1)} + \frac{8k(\lambda + 2\mu)}{h_2(3\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^3}{r_0^3} + 4\mu \frac{c_3}{r_0^3} \right]. \quad (4.5)$$

Из условия равенства разностей компонент тензора напряжений (3.1) и (4.4) при $r = r_1$ находим

$$c_1 = c_3 + \frac{8kr_1^3}{3h_2(3\lambda + 2\mu)}. \quad (4.6)$$

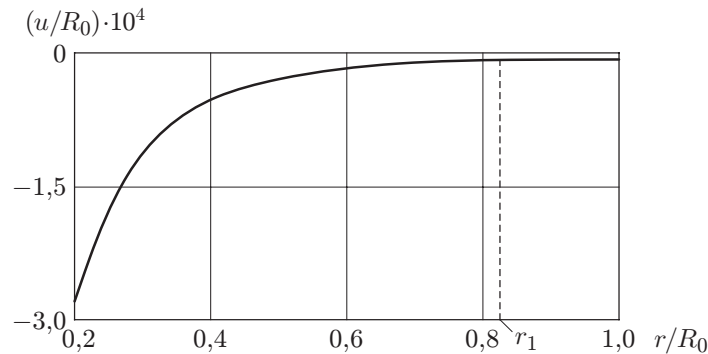
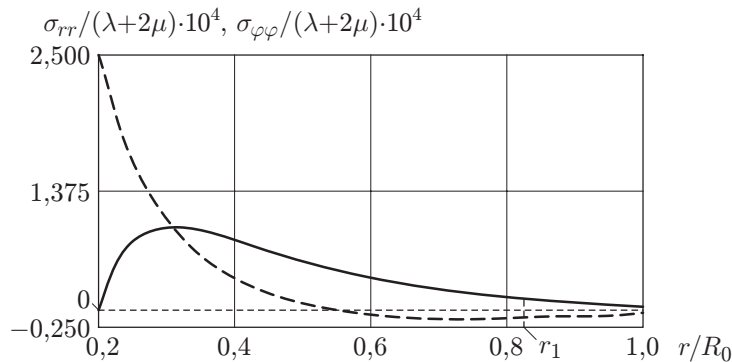


Рис. 4. Распределение перемещений при полной разгрузке

Рис. 5. Распределения радиального σ_{rr} (сплошная линия) и тангенциального $\sigma_{\varphi\varphi}$ (штриховая линия) напряжений при полной разгрузке

Постоянная c_3 определяется из условия равенства напряжений σ_{rr} (или перемещений u) на границе $r = r_1$ областей обратимых и необратимых деформаций:

$$c_3 = \frac{R_0^3 r_0^3}{4\mu(r_0^3 - R_0^3)} \left[p(t) + 4k \ln \frac{r_0}{r_1} + \frac{54kh_1^2}{h_2} \left(1 - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{2/(3h_1)} \right) + \frac{8k}{h_2} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{r_1^3}{r_0^3} - \frac{1}{3} - \frac{4\mu}{3(3\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^3}{R_0^3} \right) \right]. \quad (4.7)$$

Таким образом, зависимости (3.1) и (4.3), (4.4) с найденными постоянными (4.5)–(4.7) задают процесс разгрузки. Состояние полной разгрузки определяется теми же зависимостями при $p(t) = 0$. На рис. 4 показано распределение перемещений в конечный момент разгрузки, на рис. 5 — распределения компонент тензора напряжений.

Важным эффектом, обусловленным учетом реологических свойств материалов в условиях течения, является отсутствие повторного пластического течения при разгрузке [4]. Это течение всегда имело место в аналогичных задачах для упругопластической среды как при больших [1, 2, 8], так и при малых [1–3] деформациях.

Заметим также, что при $r = r_1$ непрерывность перемещения u и его производных u' по обе стороны от упругопластической границы обеспечивает непрерывность скорости $v = \dot{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций: Сб. ст., посвящ. 70-летию Д. Д. Ивлева. М.: Физматлит, 2001. С. 74–94.

2. **Буренин А. А.** Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальневост. гос. техн. ун-т, 2011.
3. **Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В.** Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 94–104.
4. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.** Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.
5. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.
6. **Спорыхин А. Н.** Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1997.
7. **Ивлев Д. Д.** Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред (к 100-летию со дня рожд. акад. Б. Г. Галеркина). М.: Наука, 1975. С. 236–240.
8. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.** Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316–325.

*Поступила в редакцию 23/III 2012 г.,
в окончательном варианте — 24/IV 2012 г.*
