9. **Губкин К. Е.** Распространение взрывных волн // Механика в СССР за 50 лет.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.
10. **Коробейников В. П., Марков В. В., Путятин Б. В.** О расчете сходящихся течений газов // Динамика сплошной среды в Космосе и на Земле.— М.: ВАГО АН СССР, 1978.
11. **Физика** взрыва/Под. ред. К. П. Станюковича.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1975.
12. **Когарко С. М., Адушкин В. В., Лямин А. Г.** Исследование сферической детонации газовых смесей // Науч.-техн. пробл. горения и взрыва.— 1965.— Вып. 2.
13. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике.— 8-е изд., перераб.— М.: Наука, 1977.

Поступила 19/VIII 1987 г.

УДК 534.222.2

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МЕТАНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ПЛАСТИН ПРОДУКТАМИ ВЗРЫВА

А. В. Аттетков, М. М. Бойко, Л. Н. Власова, В. С. Соловьев

(Москва)

В настоящее время значительно возрос интерес к аналитическим методам решения одномерных газодинамических задач метания несжимаемых пластин [1—7]. Это вызвано тем, что использование предположений об изоэнтропичности течения продуктов детонации и несжимаемости метаемой пластины приводит к относительной простоте теоретических исследований, возможности получения аналитических решений, позволяет выявить основные газодинамические особенности возникающих течений, прогнозировать и оптимизировать газодинамические возможности анализируемых схем.

Большинство из изучаемых в [1—6] областей течения представляют собой центрированные волны разрежения, с той лишь разницей, что в зависимости от начальных и граничных условий задачи центры волн могут как принадлежать, так и находиться вне анализируемой области течения продуктов детонации. При этом возникают и области решения, когда семейства прямолинейных ($u \pm c$)-характеристик не имеют единственной точки пересечения (центра волны), а образуют огибающую, лежащую вне рассматриваемой области волны. Аналогичная ситуация возникает, например, при схождении характеристик в волне сжатия. Отличие заключается в том, что огибающая в последнем случае находится в области волны. Уравнение огибающей семейства характеристик простой волны сжатия получено в [7]. В данной работе изучается способ определения огибающей семейства характеристик волны разрежения. Анализируется метод нахождения решений плоских одномерных изоэнтропических уравнений газовой динамики в задачах метания несжимаемой пластины продуктами детонации, основанный на использовании уравнения огибающей волны разрежения.

Одна из возможных ситуаций, связанная с появлением огибающей в задаче метания пластины продуктами детонации, представлена на рис. 1 (*1* — траектория движения пластины, *2* — огибающая волны разрежения, *I* — анализируемая область течения продуктов детонации). В данном случае огибающую образует семейство прямолинейных ($u - c$)-характеристик. Такая область течения возникает, в частности, при метании пластины продуктами взрыва заряда ВВ, в котором реализуется режим детонации с переменным энерговыделением во фронте волны (см., например, [8]).

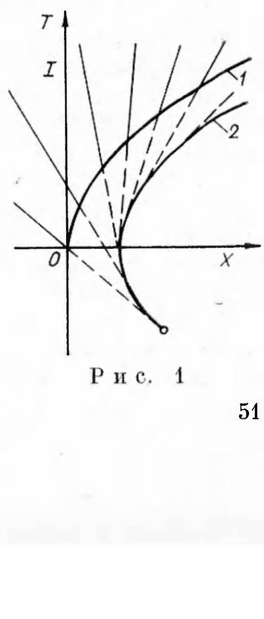

Рис. 1

Определим уравнение огибающей рассматриваемого семейства характеристик. Решение ищем в безразмерных переменных, используя в качестве единиц толщину l слоя ВВ, скорость детонации Чепмена — Жуге, время распространения волны детонации Чепмена — Жуге через слой ВВ толщиной l и массу слоя ВВ (на единицу площади). Соответствующие безразмерные переменные и параметры обозначим X, T, U, C, M.

Воспользуемся общим решением одномерных изоэнтропических уравнений газовой динамики. Вводя обозначение $\beta = U - C$, запишем решение для функции β в виде

$$X = \beta T + F(\beta). \tag{1}$$

Дифференцируя уравнение (1) по β и учитывая, что на огибающей $dX/d\beta = 0$, получаем

$$T = -dF(\beta)/d\beta. \tag{2}$$

Подставляя это выражение в общее решение (1), находим

$$X = F(\beta) - \beta dF(\beta)/d\beta. \tag{3}$$

Уравнения (2), (3) являются параметрическими (с β параметром) уравнениями огибающей семейства ($u - c$)-характеристик на плоскости пространственно-временных переменных X, T.

Рассмотрим движение несжимаемой пластины в области волны разрежения. Закон движения пластины считается известным: $X = \zeta(\tau)$. Запишем уравнение траекторий семейства прямолинейных β-характеристик, начинающихся на пластине:

$$X = \zeta(\tau) + \beta(T - \tau). \tag{4}$$

В общем решении (1) в соответствии с (4) произвольная функция $F(\beta) = \zeta(\tau) - \beta\tau$, подставляя которую в (2) и учитывая (4), находим

$$T = \tau + \beta\frac{d\tau}{d\beta} - \frac{d\zeta}{d\tau}\frac{d\tau}{d\beta} = \tau + \frac{\beta - \dot{\zeta}}{\dot{\beta}}. \tag{5}$$

С учетом последнего соотношения из (4) получаем

$$X = \zeta + \beta(\beta - \dot{\zeta})/\dot{\beta}. \tag{6}$$

Здесь и далее точка означает дифференцирование по переменной τ.

Используя для $\dot{\beta}$ представление

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\beta}{dU}\frac{dU}{d\tau} = \lambda\ddot{\zeta}, \tag{7}$$

уравнения (5), (6) запишем как

$$T = \tau + (\beta - \dot{\zeta})/(\lambda\ddot{\zeta}), \quad X = \zeta + \beta(\beta - \dot{\zeta})/(\lambda\ddot{\zeta}). \tag{8}$$

Все величины, входящие в правые части первого и второго уравнений системы (8), являются известными функциями τ. Учитывая, что $\dot{\zeta} = U$ и $\beta - \dot{\zeta} = -C$, представим уравнение огибающей волны разрежения в форме

$$T(\tau) = \tau - C(\tau)/(\lambda\ddot{\zeta}(\tau)), \quad X(\tau) = \zeta(\tau) - \beta(\tau)C(\tau)/(\lambda\ddot{\zeta}(\tau)). \tag{9}$$

Анализ системы (9) показывает, что поскольку на контактной границе метаемой пластины $C > 0$, $\ddot{\zeta} > 0$ и $\lambda > 0$, то всегда $T < \tau$, а $\zeta < X$, так как $\beta < 0$. В начальный момент времени $\tau = 0$ $\zeta = 0$ и $T < 0$, а $X > 0$. Отсюда следует, что огибающая образуется вне анализируемой области течения.

Следует особо отметить, что в практически важном случае движения несжимаемой пластины в области простой волны разрежения $\lambda = \text{const} = 2$. Действительно, в силу справедливости равенства $U - C = 2U - J_+$ и постоянства инварианта Римана J_+ из (7) вытекает, что $\lambda = d\beta/dU = d(2U - J_+)/dU = 2$.

В качестве примера рассмотрим способ получения уравнения огибающей волны разрежения при равноускоренном ($d^2X/dT^2 = a = \text{const}$) движении несжимаемой пластины под действием продуктов детонации. Воспользуемся параметрическими уравнениями (9). Параметры движения пластины в данном случае: $\zeta = a\tau^2/2$, $U = d\zeta/d\tau = a\tau$, $C = 1/2$; с учетом последнего равенства $\lambda = \text{const} = 1$. Подставляя найденные величины в (9), получаем

$$T = \tau - 1/(2a), \quad (10)$$
$$X = \tau(a\tau - 1)/2 + 1/(4a).$$

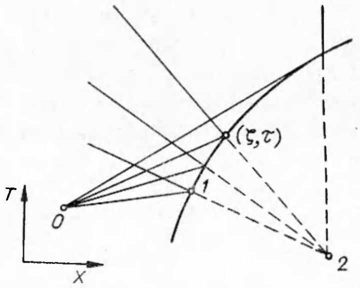

Рис. 2

Уравнения (10) — параметрические уравнения огибающей семейства прямолинейных (u — c)-характеристик изучаемой области течения продуктов детонации. Исключая параметр τ, уравнение огибающей представим в виде $X = aT^2/2 + 1/(8a)$. Координаты начальной точки огибающей определяются подстановкой начальных условий $\tau = 0$, $\zeta = 0$ в (10): $T_0 = -1/(2a)$, $X_0 = 1/(4a)$.

На плоскости пространственно-временных переменных X, T огибающая волны разрежения для режима равноускоренного движения несжимаемой пластины имеет вид, показанный на рис. 1 (кривая *2*). Форма огибающей самая разнообразная в зависимости от закона движения пластины, причем при определенном законе движения пластины огибающая вырождается в точку. Характеристики в этом случае сойдутся в одну точку — центр волны разрежения.

Используя уравнение огибающей, можно показать, что если падающая на несжимаемую пластину волна разрежения центрированная, то центрированной будет и отраженная волна разрежения. Рассмотрим плоское одномерное движение несжимаемой пластины в области центрированной волны разрежения (рис. 2). Параметры движения пластины получим из решения системы уравнений

$$dU/dT = \eta C^3, \quad dX/dT = U \quad (11)$$

($\eta = 16/(27M)$, M — относительная масса метаемой пластины). В предположении, что центр падающей на пластину волны разрежения находится в точке с координатами X_0, T_0 (точка O на рис. 2), для семейства прямолинейных ($u + c$)-характеристик запишем

$$U + C = (X - X_0)/(T - T_0). \quad (12)$$

Дифференцируя последнее уравнение по T и преобразуя данное выражение с учетом (11) относительно функции C, находим уравнение Бернулли, общий интеграл которого

$$C = [a_1(T - T_0)^2 - 2\eta(T - T_0)]^{-1/2}. \quad (13)$$

Закон движения пластины определяется интегрированием второго уравнения системы (11) после последовательной подстановки в правую часть уравнения соотношений (12), (13). Полученное выражение имеет вид

$$(X - X_0)/(T - T_0) = a_2 - 1/[\eta C(T - T_0)]. \quad (14)$$

Постоянные интегрирования a_1, a_2 можно определить, если известно уравнение траектории первой ($u + c$)-характеристики, приходящей на пластину (в точку *1* на рис. 2). Пусть наклон данной характеристики равен α_1, тогда

$$a_1 = \frac{1}{C_1^2(T_1 - T_0)^2} + \frac{2\eta}{T_1 - T_0}, \quad a_2 = \alpha_1 + \frac{1}{\eta C_1(T_1 - T_0)}.$$

Из (12) находим скорость движения пластины

$$U = (X - X_0)/(T - T_0) - C. \quad (15)$$

Таким образом, если известен центр X_0, T_0 волны разрежения и координаты точек пересечения траектории движения пластины с α_1-характеристикой, последующее движение пластины полностью определено.

Обоснуем справедливость утверждения, что если падающая на несжимаемую пластину волна разрежения центрированная, то центрированной будет и отраженная волна разрежения при использовании общего решения одномерных изоэнтропических уравнений газовой динамики. Выражая из (1) произвольную функцию $F(U-C)$ с учетом (13)—(15), получим

$$F(U-C)=X_0-a_2T_0+\frac{(a_1T_0+2\eta)(T-T_0)}{\eta\sqrt{a_1(T-T_0)^2-2\eta(T-T_0)}}.$$

Так как, согласно (13), (15),

$$U-C=a_2-\frac{a_1(T-T_0)}{\eta\sqrt{a_1(T-T_0)^2-2\eta(T-T_0)}},$$

произвольную функцию можно представить в виде

$$F(U-C)=X_0+2\eta a_2/a_1-(T_0+2\eta/a_1)(U-C),$$

а уравнение (1) — в форме

$$X=X_0+2\eta a_2/a_1+(T-T_0-2\eta/a_1)(U-C). \tag{16}$$

Выражение (16) — решение для центрированной волны разрежения с центром в точке с координатами

$$X=X_0+2\eta a_2/a_1,\quad T=T_0+2\eta/a_1 \tag{17}$$

(точка *2* на рис. 2). Таким образом, отраженная от несжимаемой пластины волна разрежения также центрированная. Из (17) следует, что постоянная a_2 характеризует наклон прямой, соединяющей центры падающей и отраженной волн разрежения.

Обоснуем справедливость утверждения, используя уравнение огибающей. Рассмотрим отраженную прямолинейную $(u-c)$-характеристику, исходящую из точки с координатами ζ, τ на линии, задающей на плоскости X, T траекторию движения пластины (рис. 2). Уравнение траектории характеристики

$$X-\zeta=(U-C)(T-\tau). \tag{18}$$

Учитывая, что ζ, U, C — известные функции τ, выражение (18) представим в виде уравнения $\Phi(X,\ T,\tau)=0$, содержащего произвольный параметр τ. Поскольку τ изменяется вдоль траектории движения пластины, последнее уравнение можно рассматривать и как уравнение траекторий семейства $(u-c)$-характеристик области течения продуктов детонации.

Известно, что если однопараметрическое семейство кривых имеет огибающую, то ее уравнение определяется из решения системы

$$\Phi(X,\ T,\ \tau)=0,\quad \partial\Phi(X,\ T,\ \tau)/\partial\tau=0, \tag{19}$$

а уравнение дискриминантной кривой $F(X,\ T)=0$ — исключением параметра τ из системы (19). Возвращаясь к (18) и используя выражения (13)—(15), в которых переменную T нужно заменить переменной τ, находим

$$\begin{gathered}U(\tau)-C(\tau)=a_2-a_1C(\tau)(\tau-T_0)/\eta,\\ \zeta(\tau)-\tau[U(\tau)-C(\tau)]=X_0-a_2T_0+(a_1T_0+2\eta)C(\tau)(\tau-T_0)/\eta.\end{gathered} \tag{20}$$

Принимая в качестве произвольного параметра, входящего в систему (20), вместо τ функцию $f(\tau)=C(\tau)(\tau-T_0)$, из (18), (20) получаем

$$\begin{gathered}\Phi(X,T,f)\equiv X-\left[a_2-\frac{a_1f(\tau)}{\eta}\right]T-\left[X_0-a_2T_0+\frac{a_1T_0+2\eta}{\eta}f(\tau)\right]=0,\\ \partial\Phi(X,\ T,\ f)/\partial f\equiv 2+a_1(T-T_0)/\eta=0.\end{gathered} \tag{21}$$

Решение системы (21) имеет вид $X=X_0+2\eta a_2/a_1$, $T=T_0+2\eta/a_1$, что совпадает с решением (17). Таким образом, огибающая семейства $(u - c)$-характеристик вырождается в точку. Следовательно, отраженная волна разрежения центрированная.

Использование уравнения огибающей позволяет также находить решения плоских одномерных изоэнтропических уравнений газовой динамики. Изучим метод нахождения решений для центрированных волн разрежения применительно к задачам метания несжимаемой пластины продуктами взрыва заряда ВВ [1—4], детонация в котором возбуждается либо на контактной границе метаемой пластины (рис. 3, *а*), либо на свободной границе заряда (*б*). Анализ проводится для области *II* течения продуктов детонации.

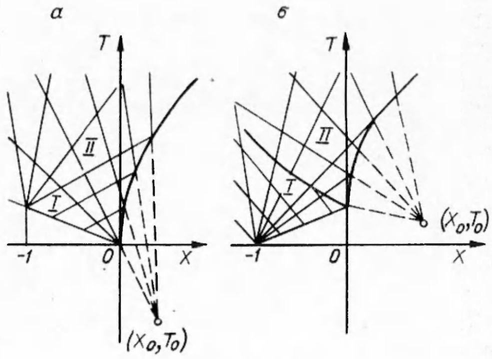

Рис. 3

В исследуемой области течения $(u - c)$-характеристики, выходящие с контактной границы метаемой пластины, при их продолжении должны пересекаться в одной точке. Координаты точки пересечения — центра волны, находящейся вне анализируемой области течения, могут быть определены из уравнения огибающей (9) с учетом соответствующих анализируемой схеме метания граничных условий на контактной границе пластины.

Рассмотрим область *II* течения продуктов детонации в задаче метания, представленной на рис. 3, *а*. В данном случае $\lambda = 2$, поскольку область *II* является областью простой волны, в которой инвариант Римана постоянен: $J_+ = 1/2$.

Из уравнения движения пластины

(22) $$\ddot{\zeta} = dU/d\tau = \eta C^3$$

с учетом $dU/d\tau = d(J_+ - C)/d\tau = -dC/d\tau$ получаем $dC/d\tau = -\eta C^3$. Интегрируя последнее уравнение при начальных условиях $\tau = 0$, $C = 1/2$, имеем

(23) $$\tau = 1/(2\eta C^2) - 2/\eta.$$

Координата T_0 центра волны разрежения определяется подстановкой выражений (22), (23) в первое уравнение системы (9):

(24) $$T_0 = -2/\eta.$$

Для нахождения пространственной координаты X_0 центра волны разрежения запишем решение для семейства $(u - c)$-характеристик

(25) $$(X - X_0)/(T - T_0) = U - C,$$

где T_0 определяется равенством (24). Учитывая, что наклон первой $(u - c)$-характеристики области *II* течения продуктов детонации $U - C = -1/2$, при подстановке $T = 0$, $X = 0$ из (25) находим $X_0 = 1/\eta$. Подставляя значения X_0, T_0 в (25) и преобразуя выражение к виду $X = (U - C)T + 4U/\eta$, получаем особое решение, описывающее течение в области центрированной волны разрежения.

Рассмотрим теперь область *II* течения продуктов детонации в задаче метания, представленной на рис. 3, *б*. Для определения координат точки пересечения семейства $(u - c)$-характеристик удобнее воспользоваться уравнениями (5), (6).

Решение для семейства $(u - c)$-характеристик области *II* представим в виде

(26) $$\beta = U - C = 2U - (U + C) = 2U - X/\tau.$$

Дифференцируя полученное уравнение по τ и учитывая выражение (22), получим

$$\dot{\beta} = 2\eta C^3 + C/\tau. \tag{27}$$

С учетом $\dot{\zeta} = U$ после подстановки выражений (26), (27) в (5)

$$T = \tau[1 - 1/(1 + 2\eta C^2\tau)]. \tag{28}$$

Для определения координаты T_0 центра волны разрежения необходимо выразить скорость звука C через переменную τ. Нахождение функции $C(\tau)$ сводится к решению дифференциального уравнения (22), которое с учетом

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{d\,(U + C - C)}{d\tau} = \frac{d\,(X/\tau - C)}{d\tau} = -\frac{C}{\tau} - \frac{dC}{d\tau}$$

сводится к уравнению Бернулли, частный интеграл которого при начальных условиях $\tau = 1$, $C = 1$ имеет вид $C^2 = [(1 + 2\eta)\tau^2 - 2\eta\tau]^{-1}$. После подстановки последнего выражения в соотношение (28)

$$T_0 = 2\eta/(1 + 2\eta). \tag{29}$$

Для нахождения координаты X_0 центра волны разрежения воспользуемся решением (25), в котором T_0 определяется равенством (29). Учитывая, что наклон первой ($u - c$)-характеристики области II в данном случае $U - C = -1$, при подстановке $T = 1$, $X = 0$ из (25) находим $X_0 = 1/(1 + 2\eta)$. Подставляя значения параметров X_0, T_0 в (25) и преобразуя выражение к виду $X = (U - C)T + [1 - 2\eta(U - C)]/(1 + 2\eta)$, имеем общее решение для семейства ($u - c$)-характеристик области II течения продуктов детонации.

Таким образом, используя уравнение огибающей семейства прямолинейных характеристик волны разрежения, можно получить решения одномерных изоэнтропических уравнений газовой динамики в задачах метания несжимаемой пластины продуктами взрыва. Относительная простота приведенных для центрированных волн разрежения решений обусловлена тем, что последние представляются функцией сложного аргумента $(X - X_0)/(T - T_0)$, являющегося сочетанием основных аргументов X, T, т. е. возможность получения решения в анализируемой области течения связана с нахождением координат X_0, T_0 центра волны. Данное обстоятельство позволяет использовать описанный метод для отыскания решений и в более сложных газодинамических задачах метания, поскольку большинство областей течения в задачах рассмотренного типа являются областями центрированных волн разрежения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды.— М.: Наука, 1971.
2. **Иванов А. Г., Карпенко Г. Я.** О разгоне тонких пластин продуктами взрыва при различных способах инициирования ВВ // ФГВ.— 1980.— № 2.
3. **Соловьев В. С., Власова Л. Н., Андреев С. Г.** Метание пластин встречными детонационными волнами // Тр. МВТУ.— 1981.— № 358.
4. **Кинеловский С. А.** О метании плоского несжимаемого поршня продуктами детонации // ПМТФ.— 1982.— № 5.
5. **Власова Л. Н., Андреев С. Г., Бойко М. М.** Разгон жесткого поршня под действием ступенчатой нагрузки // Тр. МВТУ.— 1984.— № 413.
6. **Соловьев В. С., Андреев С. Г. и др.** Метание и нагружение пластин продуктами взрыва при реализации недосжатых детонационных режимов // ФГВ.— 1984.— № 2.
7. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
8. **Власова Л. Н., Соловьев В. С.** Об одном случае квазиизоэнтропического сжатия среды // ФГВ.— 1983.— № 2.

Поступила 28/VII 1987 г.