

r_1/r_2) указаны наибольшие параметры ε , когда невязки не превышают 1%. На фиг. 2 приведена кривая PS , которая является геометрическим местом точек пересечения кривых $\varepsilon = \text{const}$. Выше PS расположены кривые $\varepsilon = \text{const}$, когда пластическое течение достигает контура L_1 . Для больших ε применяемый метод решения не может быть использован. Ниже PS расположены кривые $\varepsilon = \text{const}$, когда пластическое течение не достигает внутреннего контура L_1 .

Параметр ε вдоль PS изменяется от $\varepsilon = 0$ в точке P до $\varepsilon = 0,38$ в точке S , где ε является наибольшим для всей выделенной области. На фиг. 2 приведены штриховые кривые 1—3, вдоль которых угол охвата пластической зоной внешнего контура L_2 постоянен и составляет 15; 30; 45° соответственно.

Поступила 14 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Об одной задаче упругопластического кручения.— ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
2. Галин Л. А. Упругопластическое кручение призматических стержней полигонального сечения.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 4.
3. Галин Л. А. Упругопластическое кручение призматических стержней.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
4. Mises R. Three remarks on the theory of the ideal plastic body.— In: Reissner Anniversary Volume. Ann Arbor, Michigan, 1949.
5. Hodge P. On the soap-film sandhill analogy for elastic-plastic torsion.— In: The Prager Anniversary Volume. N. Y., 1963.
6. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
7. Ключников В. Д. Метод упругих решений в теории течения.— ПМТФ, 1965, № 1.
8. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М.: Наука, 1966.
10. Macdonald H. M. On the torsional strength of a hollow shaft.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1893, vol. 8.

УДК 534.222

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦУГА УДАРНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПЛОТНЫХ СРЕДАХ

Э. И. Андрианкин, А. И. Малкин, Н. Н. Мягков

(Москва)

Исследование нестационарных ударных волн в плотных средах представляет интерес для многих задач физики удара, которые возникают, например, при анализе ударов метеоритов, взаимодействии мощного лазерного излучения с веществом, ударно-волновых способах получения новых материалов, при взрывах в плотных средах и т. д. [1—5]. В ряде таких задач приходится исследовать распространение ударных волн с амплитудами давления, значительно превосходящими модули сдвига вещества, но меньшими модуля всестороннего сжатия. Поэтому для описания состояния среды в этом случае справедливо гидродинамическое приближение [1], а для анализа распространения цуга ударных импульсов с учетом диссипации можно использовать уравнение Бюргерса [6]. В данной работе рассмотрены плоские задачи. В этом случае уравнение Бюргерса (УБ) для физически интересных граничных условий решается точно и задача сводится к извлечению информации из полученного решения.

Если приложенный на границе импульс давления можно аппроксимировать простой функцией времени, например δ -функцией или ступенчатой функцией, анализ решения УБ не сложен [6]. Интерес представляет рассмотрение задач с более сложными граничными условиями. В частности, для практических приложений нужно исследование эволюции цуга импульсов сжатия, возникающего при последовательных ударах по поверхности образца. Постановка такой задачи вызвана тем, что в экспериментах по ударно-волновому сжатию конденсированных веществ часто возникает потребность варьировать форму приложенного на границе импульса давления. Импульсы давления, которые получаются при использовании ударников, коротких лазерных импульсов, электронных ударов и детонации слоев конденсированных ВВ, имеют качественно подобную форму — резкий фронт и пологую область спада. Поэтому практически изменение формы волны сжатия удобно осуществлять с помощью цугов импульсов давления, генерируемых, например, импульсным лазером. Выбор времени запаздывания между лазерными импульсами может дать возможность сформировать в среде волну с заданными параметрами. Кроме того, использование цуга лазерных

импульсов позволяет уменьшить влияние экранировки поверхности конденсированного вещества продуктами разрушения [2], т. е. добиться оптимальных условий формирования ударных волн сравнительно большой длительности.

Ниже рассматривается эволюция цугов слабых ударных импульсов. Получены оценки характерных расстояний слияния импульсов и амплитуд, формирующихся при слиянии волн. Показана возможность увеличения динамических параметров волны (энергии, импульса и т. д.) на заданном расстоянии от граничной поверхности за счет выбора времени запаздывания между импульсами в цуге.

1. Если за исходную систему уравнений принять уравнения диссипативной гидродинамики, замкнутые уравнением состояния типа Ми — Грюнайзена, Тэта или уравнением состояния идеального газа, то применение методов нелинейной теории волн [6] приводит к УБ в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial q}{\partial \eta} - q \frac{\partial q}{\partial \xi} = b \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}, \quad \eta = \frac{(1+n)\omega m}{2K_0},$$

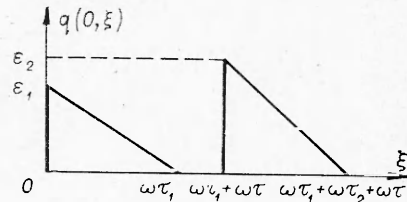
где $\xi = \omega t - \omega m/K_0$; $b = \frac{\omega}{(1+n)M_0} \left[\alpha + \frac{1}{3}\beta + \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \right]$; $q = p/M_0$; m — массовая лагранжева координата; K_0 и M_0 — импеданс и модуль сжатия среды; α , β и κ — соответственно коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости и теплопроводности; n — степенной показатель в уравнении состояния идеального газа или Тэта; для

уравнения состояния типа Ми—Грюнайзена постоянная $n = 1 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_S \rho_0 / \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S$.

Здесь p — давление; ρ — плотность; S — энтропия; ω^{-1} — характерный масштаб времени из граничного условия, введенный для обезразмеривания (1.1). Необходимо отметить, что УБ в виде (1.1) может быть получено и из нелинейных уравнений теории упругости [7], уравнений, описывающих движение некоторых гетерогенных сред [8], и т. д.; причем влияние конкретных свойств среды сказывается только в зависимости диссипативного коэффициента b от параметров среды, в величине импеданса и модуля сжатия среды.

Положим, что безразмерная амплитуда ударных импульсов на границе характеризуется некоторым малым параметром ε . Тогда относительное влияние диссипации и нелинейности на эволюцию формы волны определяется числом Рейнольдса $Re = \varepsilon/4\eta b$. Рассмотрим в отдельности два случая больших и умеренных чисел Рейнольдса.

2. При больших числах Рейнольдса диссипативным членом в (1.1) можно пренебречь, устранив неоднозначность в профиле волны с помощью вытекающего из (1.1) правила «равенства площадей» [6]. Пусть на границе среды давление изменяется по закону (фиг. 1)



Фиг. 1

$$(2.1) \quad q(0, \xi) = \begin{cases} \varepsilon_1 (1 - \xi/\omega\tau_1), & \xi \in (0, \omega\tau_1), \\ \varepsilon_2 (1 - (\xi - \omega\tau_1 - \omega\tau)/\omega\tau_2), & \xi \in (\omega\tau_1 + \omega\tau, \omega\tau_1 + \omega\tau_2 + \omega\tau), \\ 0, & \xi \notin (0, \omega\tau_1) \cup (\omega\tau_1 + \omega\tau, \omega\tau_1 + \omega\tau_2 + \omega\tau), \end{cases}$$

где $\omega^{-1} = \tau_1 + \tau_2 + \tau$.

Рассмотрим некоторые характерные параметры эволюции цуга из двух ударных импульсов (2.1) в пределе $Re \rightarrow \infty$. На некотором расстоянии от граничной поверхности импульсы полностью сливаются, профиль волны становится треугольным. Расстояние от границы (по массе), на котором сливаются ударные разрывы, т. е. волна выходит на асимптотический режим [6], есть

$$(2.2) \quad m_c = \frac{2K_0\tau_2}{\varepsilon_2(1+n)} \left[\frac{\varepsilon_1\tau_1}{\varepsilon_2\tau_2} \left(1 + \frac{\tau}{\tau_2} \right)^2 A^2 (1+B)^2 - 1 \right],$$

$$\text{где} \quad B = \left(\frac{\varepsilon_2\tau_2 + \varepsilon_1\tau_1}{\varepsilon_1\tau_1 A^2} \right)^{1/2}; \quad A^2 = 1 - \frac{\tau_2(\varepsilon_1\tau_2 - \varepsilon_2\tau_1)}{\varepsilon_1(\tau + \tau_2)^2}.$$

Как следует из (2.2), если время запаздывания между импульсами τ много меньше длительности второго импульса, то расстояние слияния возрастает с τ по линейному закону; если $\tau \ll \tau_2$, то закон возрастания параболический. Амплитуда и длительность результирующей волны в момент слияния равны

$$(2.3) \quad q_c = \frac{\varepsilon_2\tau_2}{\tau + \tau_2} \left(1 + \frac{1}{B} \right)^{-1};$$

$$(2.4) \quad \omega^{-1} \Delta \xi_c = \left(\tau_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tau_1 \right) \left(1 + \frac{\tau}{\tau_2} \right) \left(1 + \frac{1}{B} \right).$$

Другим важным при исследовании цуга импульсов параметром является скачок амплитуды при слиянии разрывов, равный

$$(2.5) \quad \Delta q_c = \frac{\varepsilon_2 \tau_2^2}{(\tau_2 + \tau) \varepsilon_1 \tau_1 B} \left(1 + \frac{1}{B} \right)^{-1} (1 + BA^2)^{-1}.$$

Зафиксируем величины $\varepsilon_1 \tau_1$ и $\varepsilon_2 \tau_2$, пропорциональные в первом приближении механическому импульсу, переданному среде при первом и втором ударах соответственно. При постоянных $\varepsilon_1 \tau_1$ и $\varepsilon_2 \tau_2$ из (2.2) следует, что расстояние слияния m_c возрастает с увеличением τ_1 при $\tau_2 = \text{const}$ и с увеличением τ_2 при $\tau_1 = \text{const}$. Во втором случае возрастание m_c связано просто с уменьшением начальной амплитуды догоняющего импульса и, следовательно, с уменьшением скорости распространения второго разрыва. Чтобы пояснить рост m_c с ростом τ_1 , заметим, что скорость распространения головного разрыва по массе вещества равна

$$\frac{dm_1}{dt} = K_0 \left[1 + \frac{2\varepsilon_1 \tau_1}{(1+n) \sqrt{\tau_1^2 + \frac{2\varepsilon_1 \tau_1 m_1}{(1+n) K_0}}} \right]$$

и убывает с ростом τ_1 . Поэтому возрастание m_c с τ_1 объясняется увеличением начального расстояния между разрывами, что оказывается более существенным, чем уменьшение скорости головного разрыва.

В том случае, когда длительности обоих импульсов значительно меньше времени запаздывания τ , формулы (2.2) — (2.5) значительно упрощаются. Формально это упрощение соответствует предельному переходу $\tau_1, \tau_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1 \tau_1, \varepsilon_2 \tau_2 = \text{const}$. Например, выражения для расстояния и амплитуды слияния принимают вид

$$m_c = \frac{2K_0 \tau^2}{(1+n) \varepsilon_2 \tau_2} \frac{\varepsilon_1 \tau_1}{\varepsilon_2 \tau_2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \tau_1 + \varepsilon_2 \tau_2}{\varepsilon_1 \tau_1} + 1} \right)^2, \quad q_c = \frac{\varepsilon_2 \tau_2}{\tau} \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \tau_1}{\varepsilon_1 \tau_1 + \varepsilon_2 \tau_2}} \right)^{-1}.$$

3. Рассмотрим теперь случай конечного диссипативного коэффициента в уравнении (1.1). Поскольку преобразование Хопфа — Коула [6] $q = 2b (\ln U)_{\xi}$ УБ приводится к линейному уравнению теплопроводности, решение (1.1) при произвольном граничном условии можно выписать сразу. Пусть, как и прежде, на границе $\eta = 0$ задано два последовательных импульса давления. Если длительность каждого из них значительно меньше времени запаздывания τ , то граничные условия можно аппроксимировать двумя δ -функциями, разделенными промежутком времени τ , т. е.

$$(3.1) \quad q(0, \xi) = \varepsilon_1 \delta \left(\frac{\xi}{\omega \tau_1} \right) + \varepsilon_2 \delta \left(\frac{\xi - \omega \tau}{\omega \tau_2} \right).$$

Решение задачи (1.1), (3.1) удобно представить в виде

$$(3.2) \quad U = \frac{e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2} dt - \frac{e^{\Gamma_1} (e^{\Gamma_2} - 1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-(y-t)^2} dt,$$

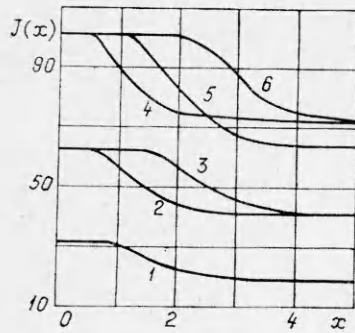
где

$$\Gamma_1 = \omega \varepsilon_1 \tau_1 / 2b; \quad \Gamma_2 = \omega \varepsilon_2 \tau_2 / 2b; \quad y = \xi / 2\sqrt{b\eta}; \quad x = \tau \omega / 2\sqrt{b\eta}.$$

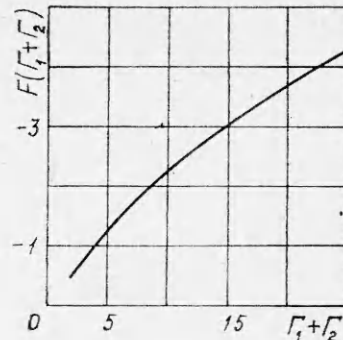
С ростом $b\eta$ последний член в (3.2) убывает и решение асимптотически выходит на автомодельный режим, соответствующий распространению одиночного импульса сжатия. Как и в случае $\text{Re} \rightarrow \infty$, будем называть слиянием импульсов выход на асимптотический режим.

Важными характеристиками распространяющейся волны являются энергия и импульс. В соответствии с рассматриваемым квадратичным приближением импульс в первом приближении $I = \int_{-\infty}^{+\infty} q d\xi$ остается постоянным, а полные значения энергии и

импульса будут изменяться только за счет члена $E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 d\xi$. Было проведено численное решение задачи (1.1), (3.1), и на фиг. 2 представлена энергия $J(x) = (\eta/4b^3)^{1/2} \times E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (U'_y/U)^2 dy$ для различных Γ_1 и Γ_2 . Кривая I соответствует $\Gamma_1 = 5, \Gamma_2 = 5$;



Ф и г. 2



Ф и г. 3

2 — $\Gamma_1 = 10$; $\Gamma_2 = 5$; 3 — $\Gamma_1 = 5$, $\Gamma_2 = 10$; 4 — $\Gamma_1 = 15$, $\Gamma_2 = 5$; 5 — $\Gamma_1 = 10$, $\Gamma_2 = 10$; 6 — $\Gamma_1 = 5$, $\Gamma_2 = 15$. Каждая кривая на фиг. 2 включает в себя верхнее и нижнее плато, на которых $J(x)$ не зависит от x . Нижнее плато соответствует независимому распространению импульсов, когда их взаимодействие мало, а энергия $J(x)$ определяется суммой энергий импульсов. Начиная с некоторого расстояния от границы, второй импульс догоняет первый, они начинают интенсивно взаимодействовать ($J(x)$ при этом растет). При некотором x_c взаимодействие почти прекращается (импульсы сливаются) и при $x < x_c$ результирующий импульс выходит на асимптотику автомодельной волны, которая соответствует решению (3.2) с $x = 0$, и J опять не зависит от x . Таким образом, расстояние слияния x_c импульсов можно оценить уже из фиг. 2, например, для кривой 4 $x_c \approx 0,5$. Чтобы оценить характерное расстояние слияния импульсов для непрерывного ряда значений Γ_1 и Γ_2 , найдем, следуя [1], автомодельное решение, наилучшим способом приближающее (3.2) в пределе больших $b\eta$. При заданном в первом приближении импульсе I автомодельное решение U^0 УБ определено с точностью до преобразования сдвига независимых переменных $U^0 = U^0(\xi + \xi^0 / (\sqrt{\eta + \eta^0}))$. Разлагая q^0 по $\xi^0 / \sqrt{\eta + \eta^0}$ и $\sqrt{b\eta^0/b\eta}$, а q по x , можно за счет специального выбора ξ^0 и η^0 добиться, что, например, амплитуды q_m^0 и q_m будут отличаться членами порядка $(b\eta)^{-2}$. При этом, как легко показать:

$$\omega^{-1}\xi^0 = 0, \quad \omega^{-1}\eta^0 = \frac{\tau^2 \omega e^{\Gamma_1} (e^{\Gamma_1} - 1) (e^{\Gamma_2} - 1)}{4b (e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 1)^2},$$

искомое автомодельное решение соответствует короткому удару по среде в момент времени $t = \omega^{-1}2\eta^0/(1 + n)$, причем поверхность, по которой производится удар, находится левее истинной граничной поверхности на расстоянии $m^0 = K_0 \omega^{-1}2\eta^0/(1 + n)$ от нее.

Для оценки расстояния слияния, т. е. выхода на автомодельный режим, определим эту величину как расстояние, на котором $|q_m/q_m^0 - 1| \ll 1$. Имеем

$$(3.3) \quad b\eta_c \approx 6\omega^2 \tau^2 \frac{[F(\Gamma_1 + \Gamma_2) e^{\Gamma_1} (e^{\Gamma_1} - 1) (e^{\Gamma_2} - 1) (e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 2e^{\Gamma_1} + 1)]^{2/3}}{(e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 1)^2},$$

$F(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ — координата y_m амплитуды автомодельной волны q_m^0 , она находится как решение уравнения

$$1 + \frac{e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^F e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} F^{-1} e^{-F^2} \right) = 0.$$

Зависимость $F(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ показана на фиг. 3. Используя результаты численного решения, коэффициент пропорциональности 0 для любых Γ_1 и $\Gamma_2 \lesssim 7$ положим $\theta = 9,2$. Оценим амплитуду на расстояниях (3.3):

$$(3.4) \quad q_c = - \frac{2b}{\sqrt{b(\eta_c + \eta^0)}} F(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

Заметим, что в формуле (3.3) формально нельзя осуществить предельный переход $b \rightarrow 0$, так как проведенные разложения справедливы только при больших $b\eta$ и малых $x < 1$. Сравнение с численным решением показывает, что при $\Gamma_2 > 7$ (согласно (3.3), это соответствует $x_c > 1$) расстояние слияния η_c уменьшается более медленно, чем это дается формулой (3.3). Качественные особенности зависимости x_c (или η_c) от Γ_1 и Γ_2 ,

которые видны на фиг. 2, хорошо описываются (3.3). Заметим также, что значения амплитуды q_0 , рассчитанные по (3.3), (3.4) при $\Gamma_2 \leq 7$ (здесь надо полагать $\omega\tau \approx 1$, так как по условию $\tau_1 + \tau_2 \ll \tau$), отличаются от тех, которые были получены в результате численного решения, не более чем на 5–10%.

Таким образом, выбор времени задержки τ (если τ выбран за характерную длительность $\omega^{-1} = \tau$, то тогда варьируем τ_1 и τ_2 в Γ_1 и Γ_2) позволяет получить на заданном расстоянии от границы, на которую воздействует, например, пуг лазерных импульсов, волну с заданными значениями амплитуды, энергии и импульса, приблизительно совпадающими с теми же величинами для волны, соответствующей такому однократному воздействию на границу $\eta = -\eta^0$, импульс которого в первом приближении равен импульсу дуга. Однако, как уже отмечалось, с помощью многократного воздействия существенно уменьшаются потери за счет экранировки поверхности конденсированного вещества продуктами разрушения, в то же время на расстоянии слияния формируется импульс сравнительно большой длительности. В ряде случаев учет влияния экранировки поверхности оказывается решающим [2], и поэтому выбор оптимальных условий формирования ударных волн на заданном расстоянии от границы связан именно с воздействием дуга импульсов на границу вещества.

4. Зная характерные расстояния слияния импульсов и изменения амплитуд при слиянии, можно варьировать параметры результирующей волны на заданном расстоянии от границы. При этом существует возможность увеличения полной энергии волны (а также других динамических параметров) за счет использования взаимодействия ударных импульсов. Оказывается, что при фиксированном импульсе I волны на границе (следовательно, при фиксированной работе ударника над веществом) выбор времени запаздывания между импульсами позволяет повысить энергию волны на заданном расстоянии. Причина эффекта заключается в том, что варьирование времени запаздывания позволяет минимизировать потери в дуге, т. е. минимизировать энтропию массы вещества между границей и поверхностью, на которой требуется увеличить полную энергию, импульс и т. п. Проще всего это может быть показано в случае больших чисел Re , когда решение (1.1) с произвольным граничным условием $q(0, \xi) = \varepsilon f(\xi)$ имеет вид

$$(4.1) \quad q = \varepsilon f(\xi + \eta q).$$

Как уже отмечалось выше, неоднозначность, возникающая в профиле q с ростом η , устраняется с помощью «правила равенства площадей» [6], откуда, в частности, следует

$$(4.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} q d\xi = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi.$$

Из последнего равенства и (4.1) вытекает также важная зависимость между амплитудами разрывов в профиле волны и величиной $E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 d\xi$. Для сокращения выкладок предположим, что имеется только один разрыв, и обозначим $R = \xi + \eta q$, $R_{\pm} = \xi_p + \eta q_{\pm}$, где $\xi_p(\eta)$ — координата разрыва, $q_{\pm}(\eta)$ — значения функции q соответственно за разрывом и перед ним. Тогда

$$(4.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} q d\xi = \int_{-\infty}^{R_-} f(R) (1 - \eta f'_R) dR + \int_{R_+}^{+\infty} f(R) (1 - \eta f'_R) dR = \text{const};$$

$$(4.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 d\xi = \int_{-\infty}^{R_-} f^2(R) (1 - \eta f'_R) dR + \int_{R_+}^{+\infty} f^2(R) (1 - \eta f'_R) dR.$$

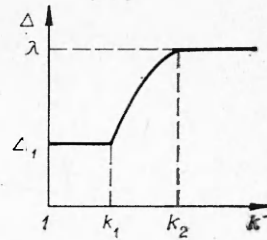
Вычисляя полную производную (4.4) по η , с учетом (4.3) найдем

$$(4.5) \quad dE(\eta)/d\eta = -(1/6)(q_+ - q_-)^3.$$

Можно показать, что в случае нескольких разрывов в правой части (4.5) будет стоять сумма величин $(q_-^{(i)} - q_+^{(i)})^3$. Равенство (4.5) представляет собой следствие закона сохранения энергии для рассматриваемого случая. Действительно, правая часть (4.5) пропорциональна скачку энтропии на разрыве [1], а левая с учетом (4.3) — изменению полной энергии волнового движения. Переписанная в размерных переменных формула (4.5) означает, что изменение в волне при переходе от лагранжовой частицы с координатой m к соседней связано с изменением энтальпии частицы m . Формула (4.5) может быть получена и из закона сохранения энергии для исходной системы уравнений гидродинамики, однако подчеркнем, что для ее вывода не требуется ничего, кроме равенств (4.1), (4.2), так что результат (4.5) не зависит от физического смысла исходной системы уравнений.

Положим, что на границе задан пуг импульсов сжатия вида (2.1) и (для упрощения) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\tau_1 = \tau_2$, $\omega^{-1} = \tau_1$, $\tau \geq 0$. Таким образом, импульс I на границе зафиксирован

рован. Зададим некоторое фиксированное значение лагранжевой координаты η и рассмотрим, как меняется величина $\Delta = E(0) - E(\eta)$ в зависимости от времени запаздывания импульсами τ . Зависимость $\Delta(1 + \tau/\tau_1)$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$ представлена на фиг. 4, где $k = 1 + \tau/\tau_1$, $k_2 = \sqrt{1 + \varepsilon_1 \bar{\eta}}$, $k_1 = k_2/(1 + \sqrt{2})$, $\lambda = 0,66(1 - 1/k_2)$, $\Delta_1 = 0,66(1 - \sqrt{2}/k_2)$. Как видно из фиг. 4, минимум Δ и максимум энергии волны имеют место при $1 \leq k \leq k_1$ ($k = k_1$) и соответствуют слиянию разрывов в η . При этом из (4.5) следует, что энтропия массы вещества между граничной поверхностью и η принимает минимальное (при заданном I) значение. Тот факт, что минимум энтропии достигается на отрезке, а не в точке, связан с тем, что фиг. 4 построена для $\tau > 0$ (этот вопрос обсуждается ниже). Область $k \geq k_2$ на фиг. 4 соответствует случаю, когда второй импульс не успевает в $\eta \leq \eta$ догнать первый, в этом случае оба импульса распространяются независимо.



Ф и г. 4

Зададим теперь на границе условия типа (2.1), но такие, чтобы $i_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u d\xi$ и

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\xi, \text{ где } u = q/\varepsilon_1, \text{ оставались постоянными в } \eta = 0: E_1(0) = E_0, I_1(0) = I_0.$$

Причем за характерные масштабы амплитуды и длительности примем амплитуду и длительность головного импульса. Положим $I_0 = 1$, $E_0 = 2/3$, эти значения соответствуют, например при $k = 1$, двум следующим друг за другом импульсам треугольного профиля с единичными амплитудами, длительностями и единичным расстоянием между разрывами. Тогда вместо (2.1) на границе будем иметь

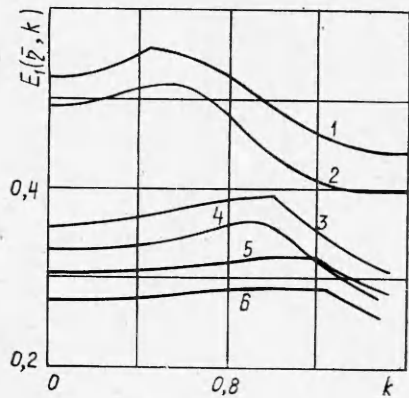
$$(4.6) \quad u(0, \xi) = \begin{cases} 1 - \xi, & \xi \in [0, r), \\ (\mu + k - \xi)/\sigma, & \xi \in [k, k + \mu], \\ 0, & \xi \notin [0, r) \cup [k, k + \mu], \end{cases}$$

k — запаздывание между разрывами в волне. При $k < 1$ $\bar{\mu} = [1 + (1 - k)^3]/[1 + (1 - k)^2]$, $\mu = [1 + (1 - k)^2]/\bar{\mu}$, $\sigma = \mu/\bar{\mu}$, $r = k$. При $k \geq 1$ $\bar{\mu} = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 1$, $r = 1$. Видно, что здесь условия на границе — функции одного параметра k . Если I_1 при $\eta > 0$ остается постоянным, то E_1 , характеризующая динамические свойства волны, уменьшается в соответствии с (4.5). Теперь для каждого фиксированного $\varepsilon_1 \bar{\eta}$ варьируем k на границе, чтобы получить в η максимально возможное значение E_1 . Для значений $\text{Re} \rightarrow \infty$ (недиссипативная среда) и $\text{Re} = 12$ зависимость $E_1(\eta, k)$ показана на фиг. 5. Кривые 1, 2 соответствуют $\varepsilon_1 \bar{\eta} = 1, 2$; 3, 4 — $\varepsilon_1 \bar{\eta} = 4, 82$; 5, 6 — $\varepsilon_1 \bar{\eta} = 7, 4$; первая из каждой пары кривых соответствует $\text{Re} \rightarrow \infty$, вторая $\text{Re} = 12$. Для конечных Re задача (1.1), (4.6) решалась численно. Пусть \bar{k} — значение параметра k , при котором в η достигается максимум $E_1(\eta, k)$. Зависимости $E_1(\eta, k)$ при $\bar{k} \leq 1$ и $\bar{k} > 1$ имеют различный вид. При $\bar{k} \leq 1$ максимум $E_1(k)$ однозначно связан с параметром k и соответствует граничному условию (4.6), при котором в данном η происходит слияние разрывов. При $\bar{k} > 1$ такой однозначности уже не существует. Если $k_* \geq 1$ определяет граничное условие (4.6), при котором в η происходит слияние разрывов, то максимальное $E_1(\eta, k)$ постоянно на отрезке $\bar{k} \in [1, k_*]$, на фиг. 5 кривая 5 соответствует $k_* = 1, 2$. Следовательно, если η_0 — расстояние слияния разрывов при $k_* = 1(2)$ ($\eta_0 = 2(1 + \sqrt{2})/\varepsilon_1$), то при фиксированных $\eta > \eta_0$ максимум E_1 на расстоянии η можно получить и из конфигурации $k_* = 1$ на границе: $E_1(\bar{k} = 1, \eta > \eta_0) = E_1(\bar{k} > 1, \eta)$.

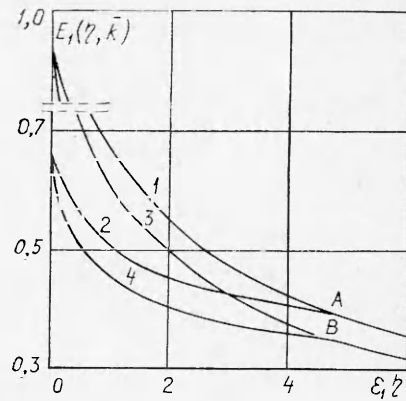
Так как после слияния разрывов волна выходит на асимптотику одиночного импульса, то на границе $\eta = 0$ можно задать условия, соответствующие этому, одиночному импульсу:

$$(4.7) \quad u(0, \xi) = \begin{cases} (k + \mu - \xi)/\sigma, & \xi \in [k + \mu - \sqrt{2\sigma}, k + \mu], \\ 0, & \xi \notin [k + \mu - \sqrt{2\sigma}, k + \mu]. \end{cases}$$

Решения с условиями (4.7), (4.6) (соответственно кривые 1, 2 ($\text{Re} \rightarrow \infty$) и 3, 4 ($\text{Re} = 12$) на фиг. 6 при $k = 1$) совпадают в точке слияния разрывов волны, в этой же точке $\varepsilon_1 \bar{\eta}$ достигается максимум $E_1(\eta, k)$. При $k_* \geq 1$ конфигурация (4.7) на границе не меняется, т. е. все решения $E_1(\eta, k_*)$ с условиями (4.6) выходят на одну и ту же асимптотику (фиг. 6, кривые 1, 3 при $\eta > \eta_0$), спускаясь с увеличением k_* все ниже. Следовательно, чтобы получить максимальное $E_1(\eta, k)$ при $\eta > \eta_0$, необходимо задать на границе конфигурацию (4.6) с $k = 1$.



Ф и г. 5



Ф и г. 6

Условия на границе (4.6), (4.7) имеют одинаковые $\bar{I}_1 = I_0$, но разные E_1 , пусть E_{01} соответствует (4.7). Для получения в точке слияния разрывов одного и того же значения энергии E_1 необходимо на границе задать $E_{01}/E_1 = \sqrt{2}/\sigma$ ($1 \leq \sigma \leq 2$, $\sigma = 1$ соответствует $k = 1$). Таким образом, волны с двумя разрывами энергетически наиболее выгодны для расстояний от границы $\eta \geq \eta_0$ (там, где $\sigma = 1$) по сравнению с одиночным импульсом (4.7), который на расстоянии слияния пуга из двух импульсов дает волну того же профиля. Заметим, что величина полной энергии для слабых ударных импульсов в конденсированных средах является величиной второго порядка малости. Это связано с малостью начального давления по сравнению с модулем сжатия среды.

Если при воздействии на границу вещества в нем образуется одиночный импульс (4.7) с полной энергией Σ_1 или волна из двух импульсов с полной энергией Σ_2 (4.6) при $k = 1$, то для получения на расстояниях $\eta > \eta_0$ одной и той же волны в конденсированной среде в одиночный импульс необходимо на границе вложить полной энергии в

$$(4.8) \quad \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{E_{01}}{E_0} = \sqrt{2}$$

раз больше. Для сред, описываемых уравнением состояния идеального газа, это соотношение имеет вид

$$(4.9) \quad \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = 1 + \frac{(n-1)(\sqrt{2}-1)}{3/\epsilon + n - 1}.$$

Для $\epsilon \leq 0,5$ при $n = 3$ формула (4.9) дает $\Sigma_1/\Sigma_2 \leq 1,1$. Формально здесь при $\epsilon \rightarrow \infty$ $\Sigma_1/\Sigma_2 \rightarrow \sqrt{2}$.

Соотношения (4.8), (4.9) справедливы для случая, когда диссипацией можно пренебречь или когда числа Рейнольдса принимают большие, но конечные значения ($Re \gg 1$).

Как видно из фиг. 5, максимум $E_1(\eta, k)$ в диссипативной среде несколько смещен относительно максимума в отсутствие диссипации (при одном и том же $\epsilon_1 \bar{\eta}$). Расчеты показывают, что если следить за эволюцией $E_1(\eta, k)$, то расстояние $\epsilon_1 \bar{\eta}$, на котором конфигурация (4.6) с $k = \bar{k}$ является оптимальной, достигается в области, где $E''_{1\eta\eta}(\eta, \bar{k}) < 0$ (область B на кривой 4 фиг. 6), при $Re \rightarrow \infty$ эта область вырождается в точку (точка A на кривой 2 фиг. 6), в которой первые производные $E'_{1\eta}$ терпят разрыв, а средняя вторая производная остается меньше нуля.

Поступила 23 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963.
2. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970.
3. Кинслоу Р. Высокоскоростные ударные явления/Под ред. В. Н. Николаевского. М.: Мир, 1973.
4. Андрианкин Э. И. Кратерообразование при метеоритном ударе.— Астроном. вестник, 1978, т. 12, № 1.
5. Андрианкин Э. И. Соударение двух пластин с большой скоростью.— ПМТФ, 1963, № 4.

6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
7. Дынин Е. А. О распространении импульсов сжатия в конденсированных средах. — Труды ВНИИФТРИ. Физика импульсных давлений, 1979, вып. 44(74).
8. Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е. Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесах. — ПМТФ, 1980, № 5.

УДК 534.011

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ НИТИ, ПАРАМЕТРЫ КОТОРОЙ ИЗМЕНЯЮТСЯ ПО ЗАКОНУ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

А. И. Весницкий, А. Ф. Ляхов
(Горький)

В связи с непрерывным возрастанием требований к быстродействию машин, приборов и аппаратов при решении проблем повышения надежности и долговечности их работы все чаще оказывается существенно необходимо учитывать волновой характер динамических процессов в упругих элементах и, в частности, возможность возникновения параметрической неустойчивости. К настоящему времени достаточно подробно исследованы распределенные системы, параметры (P) которых изменяются со временем однородно во всем пространстве [1, 2] ($P = P_1(t)P_2(r)$, где t — время, r — радиус-вектор). Класс распределенных систем, параметры которых изменяются неоднородно (например, системы с подвижными границами, с изменяющимися свойствами границ, с бегущей, стоячей волной параметров и т. д.), хотя и гораздо шире первого, изучен очень мало. До сих пор остается невыявленным полный набор явлений и обусловленных ими эффектов, возможных в таких системах.

Одной из характерных особенностей систем с неоднородно изменяющимися параметрами является возможность возбуждения в них импульсных колебаний с широким спектром частот [3]. В связи с этим в данной работе на примере простейшей одномерной системы типа нити (струны), параметры которой изменяются по закону бегущей волны, исследуются особенности проявления параметрической неустойчивости, выражающиеся в трансформации начальных возмущений в существенно не гармонические волны, имеющие формы импульсов. Такие исследования представляют не только теоретический, но и практический интерес, поскольку эффект формирования импульсных колебаний может являться одной из причин потери динамической устойчивости ветвей передач с гибкими связями [4], а также нарушения технологических процессов прядения и ткачества.

1. Параметрическая неустойчивость колебательного процесса в линейной системе как физическое явление выражается в неограниченном нарастании энергии колебаний E с течением времени. Исходя из этого, устойчивость и неустойчивость линейной параметрической системы определим соответствующим образом.

О п р е д е л е н и е 1. Распределенная линейная ограниченная система с изменяющимися во времени и пространстве параметрами будет устойчива, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если в начальный момент времени $t = 0$ полная энергия колебаний системы $E(0, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(0)) < \delta$, то для любого $t > 0$ $E(t, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(t)) < \varepsilon$, где $u_n(x, y, z)$ — обобщенные координаты, описывающие данную распределенную систему; x, y, z — пространственные координаты; $l_i(t)$ — параметры, характеризующие размеры системы.

О п р е д е л е н и е 2. Распределенная линейная ограниченная система с изменяющимися во времени и пространстве параметрами будет неустойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0(\varepsilon)$ такое, что если при $t = 0$ полная энергия колебаний $E(0, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(0)) \neq 0$, то для $t > t_0(\varepsilon)$ $E(t, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(t)) > \varepsilon$.

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях гибкой нити с изменяющимися во времени и пространстве распределенными параметрами:

$$(1.1) \quad (\rho u_t)_t = (T u_x)_x;$$

$$(1.2) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0;$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Здесь $u(x, t)$ — поперечное смещение; $\rho(x, t)$ — погонная плотность; $T(x, t)$ — натяжение нити. Умножая (1.1) на u_t и складывая с тождеством $T u_x (u_{xt} - u_{tx}) = 0$ после