

УДК 536.3+536.42

Таяние льда при облучении селективным источником теплового излучения*

С.Д. Слепцов¹, Н.А. Саввинова²

¹Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
Якутск

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Проведено численное моделирование таяния слоя льда на вертикальной подложке, нагреваемого источником излучения в виде галогеновой лампы в однофазной постановке задачи Стефана. Лед представлен в виде чистого, не рассеивающего, селективно поглощающего материала с двумя спектральными полосами объемного поглощения. В вычислительной модели учитывается селективный характер источника излучения. Анализ результатов расчетов показывает преобладающую роль падающего излучения на формирование поля плотности потока результирующего излучения в среде. Получено удовлетворительное согласование расчетов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: лед, задача Стефана, селективное поглощение, пленка воды, селективный источник излучения.

Введение

В связи с освоением Арктики и наблюдаемыми изменениями климата представляется актуальным и важным теоретический прогноз состояния ледников и ледяных полей. Моделирование таяния льда необходимо для понимания природных процессов, а также для обеспечения безопасности населения, строительных конструкций и техники в северных широтах.

В монографии [1] представлено состояние ранних исследований теплофизических процессов в снежном и ледяном покровах, приведены физические модели нового класса задач, в которых снег и лед рассматривались как светорассеивающие среды, характеризующиеся объемным поглощением и рассеянием излучения. О современном состоянии теоретического и численного моделирования в снежно-ледяной толще при солнечном облучении можно судить по публикациям [2, 3].

Моделирование нагрева и последующего таяния льда основано на задаче Стефана для полупрозрачной среды. Численные и экспериментальные исследования теплообмена в полупрозрачных средах с учетом теплового излучения при использовании двух- и трехфазных постановок задачи Стефана описаны в работах [4–8]. Математическое моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена с использованием однофазной

* Исследование таяния льда выполнено в рамках государственного задания ИТ СО РАН (проект АААА-А17-117022850029-9), исследование РКТ во льду выполнено на средства РФФИ (проект № 18-48-140011 p_a).

постановки задачи Стефана рассматривалось в серии работах [9, 10], но экспериментальных работ, которые можно было бы использовать для валидации вычислительной модели, в литературе представлено крайне мало.

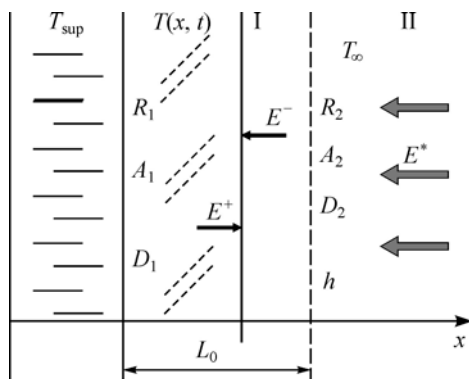
В расчетно-экспериментальной работе [11] на вертикальной непрозрачной подложке в климатической камере при постоянной температуре 0°C под воздействием излучения двух видов ламп (галогеновой и с нихромовой нитью) располагался слой льда. Таким образом моделировалось радиационное таяние льда, в условиях внешних коротковолнового и длинноволнового потоков излучения. В математической модели процесса авторы пренебрегли фактом наличия пленки воды на поверхности льда, и расчет проводился в однофазной постановке задачи Стефана. Было выполнено сравнение скорости таяния и нагрева необлучаемой поверхности льда, и получено удовлетворительное согласование экспериментальных и численных результатов. При этом впервые было показано влияние коротковолнового излучения на появление значительной шероховатости на поверхности льда. В расчетной части были использованы подгоночные параметры и прямое интегрирование по закону Бугера для учёта излучения.

Расчетно-экспериментальная работа [12] была посвящена актуальной проблеме удаления льда с различных поверхностей. Авторы проводили эксперимент на вертикальной подложке из прозрачных и непрозрачных для излучения материалов при комнатной температуре. Результаты экспериментов и расчетов показали, что лед лучше удаляется с непрозрачных материалов, чем с прозрачной акриловой подложки. При сравнении расчетных и экспериментальных данных хорошее согласование было получено для тонких подложек.

В настоящей работе поставлена задача валидации предложенной ранее вычислительной модели, включая ее радиационную часть [10], которая учитывает объемное селективное поглощение излучения слоем льда и селективный источник излучения. Валидация вычислительной модели проводится путем сравнения с опытными данными, представленными в работе [11].

Постановка задачи

На рис. 1 приведена геометрическая схема задачи, в которой рассматривается слой чистого, нерассеивающего льда толщиной L_0 , приклеенного к подложке и размещенного вместе с ней в климатической камере с постоянной температурой T_∞ . Правая поверхность слоя льда освещается лампой с температурой накаливания нити 3200 K и постоянным падающим потоком излучения $E_v^* = 1162,22\text{ Вт/м}^2$. Спектральный коэффициент объёмного поглощения льда [13] и спектр излучения лампы в виде излучения абсолютно черного тела представлены на рис. 2. Диапазон излучения лампы приходится большей частью на участок спектра до $1,2\text{ мкм}$, поэтому необходимо учитывать селективность



источника излучения. Для этого с помощью функции излучения первого рода [14] при заданных температуре накала нити и диапазоне длин волн вычисляются доли потока излучения $f_{\lambda i}$, приходящиеся на тот или иной участок спектра.

Считается, что поверхности льда являются оптически серыми, диффузно поглощают, отражают и пропускают излучение

Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

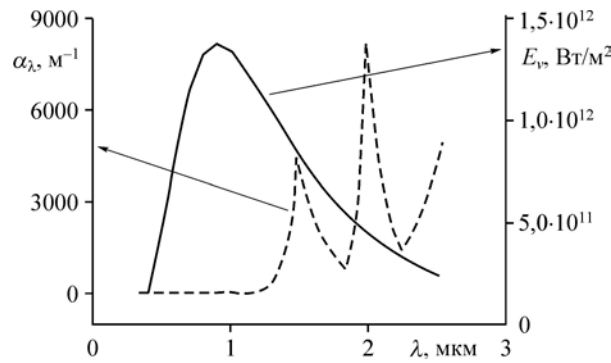


Рис. 2. Спектральная зависимость коэффициента объемного поглощения (левая ордината) и излучение лампы с температурой накала нити 3200 К (правая ордината) в виде излучения абсолютно черного тела.

таким образом, что $A_i + R_i + D_i = 1$, где A_i , R_i , D_i — поглощательная, отражательная и пропускательная полусферические способности поверхности льда, $i = 1, 2$. Также на границах предполагается справедливость закона Кирхгофа: $A_i = \varepsilon_i$. Левая поверхность подложки поддерживается при постоянной температуре $T_{\text{sub}} = 256,15$ К, которая совпадает с начальной температурой $T(x, 0)$, температура внутри камеры $T_{\infty} = 273,15$ К.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе рассматривается радиационно-кондуктивный теплообмен, продолжающийся до момента достижения правой поверхностью слоя льда $T(L_0, t)$ температуры фазового перехода T_f . На втором этапе рассматривается задача Стефана с фиксированным значением температуры правой границы $T(L(t), t) = T_f$, при этом на облучаемой поверхности предполагается появление пленки воды, стекающей под влиянием силы тяжести. Будем полагать, что температура пленки T_{fil} выше температуры фазового перехода льда и, таким образом, граничное условие на облучаемой поверхности учитывает собственное излучение и конвективный теплообмен от пленки. В работах [11] и [12] отмечено наличие тонких пленок талой воды, но в представленных расчетах эти пленки воды не учитываются. Положение границ раздела фаз $L(t)$ определяется из решения краевой задачи.

Уравнения сохранения энергии льда с температурой $T(x, t)$ записывается следующим образом:

$$c_p \rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - E_v(x, t) \right), \quad 0 < x < L(t), \quad (1)$$

здесь c_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, $E_v(x, t) = E_v^+(x, t) - E_v^-(x, t)$ — плотность потока результирующего излучения.

Граничные условия для уравнения (1) на первом этапе процесса записываются в виде

$$\begin{cases} \partial T / \partial x = 0, & \text{при } x = 0, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - h(T_{\infty} - T) - |E_{\text{res}, 2}| = 0, & \text{при } x = L_0. \end{cases} \quad (2)$$

где $|E_{\text{res}, 2}| = A_2 (E_v^+(x, t) + E_v^*(x, t)) - \varepsilon_2 \sigma_0 T^4(x, t)$.

Предполагается, что температура поверхности подложки на левой границе T_{sub} поддерживается постоянной и поток тепла от подложки ко льду отсутствует. Правая граница подвергается облучению от источника излучения, кроме того, учитывается также охлаждение, связанное с конвекцией. Уравнения (1) и (2) дополняются начальным условием $T(x, 0) = T_{\text{sub}}$.

На втором этапе решения задачи температура поверхности правой границы (при $x = L(t)$) является фиксированной — $T(x, t) = T_f$. Граничное условие (2) преобразуется в условие Стефана с учетом образующейся на поверхности тонкой пленки воды. Предполагаем, что пленка воды является изотермической и перепад температуры по ее толщине пренебрежимо мал:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + h(T_{\text{fil}} - T_{\infty}) - |E_{\text{res, fil}}| = \rho \gamma \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$|E_{\text{res, fil}}| = A_2 (E_v^+(x, t) + E_v^*) - \varepsilon_2 \sigma_0 (T^4(x, t) - T_{\text{fil}}^4), \quad x = L(t). \quad (4)$$

Здесь $T_f = 273,15$ К — температура таяния льда, $T_{\text{fil}} = 277,15$ К — температура пленки воды. В условии (3) учтена теплоотдача с внешней поверхности пленки воды, в (4) — собственное излучение пленки и правой поверхности.

Принятое в настоящей работе предположение о наличии тонкой пленки воды на поверхности льда не противоречит однофазному приближению задачи Стефана, поскольку в самой пленке не происходит поглощения излучения и она выступает только в качестве дополнительного краевого условия на межфазной поверхности с постоянными величинами. Тепловая задача решается только в толще льда на вертикальной подложке.

В безразмерном виде уравнения (1), (2) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \Phi_v}{\partial \xi} \quad \text{при } 0 < \xi < 1; \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0. \\ \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \text{Bi}(\theta_{\infty} - \theta) - \frac{\varepsilon_2}{N} \left[\Phi_v^+(\xi, \eta) + \Phi_v^* - \frac{\theta^4}{4} \right] = 0 \quad \text{при } \xi = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (5) и (6) дополняется начальным условием: $\theta(\xi, 0) = \theta_{\text{sub}}$. Здесь $\xi = x/L_0$ — безразмерная координата по толщине слоя льда; $\theta_i = T_i/T_f$, где $i = \infty, \text{sub, fil}$ — безразмерные температуры окружающей среды, подложки и пленки воды соответственно; $\eta = (a \cdot t)/L(t)^2$ — безразмерное время, $a = \lambda/(c_p \rho)$ — коэффициент температуропроводности, $\text{Bi} = L_0 h/\lambda$ — число Био, $N = \lambda/(4\sigma_0 T_f^3 L_0)$ — радиационно-кондуктивный параметр, $\Phi_v^{\pm} = E_v^{\pm}/(4\sigma_0 T_f^4)$ — безразмерная плотность потока результирующего излучения, $\Phi_v^* = E_v^*/(4\sigma_0 T_f^4)$ — безразмерная селективная плотность потока падающего излучения.

Преобразование краевой задачи (1), (3) и (4) на этапе таяния льда удобно представить в виде лагранжевых преобразований $\xi = x/L(t)$ [9, 10]. Такая переменная позволяет

фиксировать координату фронта фазового перехода в границах $0 \leq \xi \leq 1$, при этом сам фронт становится плоскопараллельным. Таким образом, уравнение энергии (1) принимает вид

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s} \cdot \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{sN} \cdot \frac{\partial \Phi_v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad \text{при } 0 < \xi < 1. \quad (7)$$

Граничное условие и условие Стефана (3) с учетом (4) записываются как

$$\begin{aligned} \theta_2(\xi, \eta) &= 1, \\ \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \text{Bi}(\theta_{\text{fil}} - \theta_\infty) - \frac{\varepsilon_2}{N} \left[\Phi_v^+(\xi, \eta) + \Phi_v^* + \frac{\theta_{\text{fil}}^4}{4} - \frac{\theta^4}{4} \right] &= \frac{\dot{s}}{\text{St}} \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Краевые условия (7) и (8) дополняются начальными условиями $\theta(\xi, 0) = f(\xi)$, $s(0) = 1$. В уравнениях (7) и (8) $s(\eta) = L(t)/L_0$, $\dot{s} = ds/d\eta$ — скорость распространения фронта таяния, $\text{St} = T_f c_p / \gamma$ — число Стефана. Входящие в уравнения (6)–(8) безразмерные плотности потоков излучения $\Phi_v^\pm$, $\Phi_v = \sum_j (\Phi_j^+ - \Phi_j^-)$ определяются из решения урав-

нения переноса излучения в плоском слое излучающей и поглощающей сред с известным распределением температур по слою, j — номер спектральной полосы [2, 4].

Как и в предыдущих работах авторов [2, 4, 8], расчет переноса излучения проводится с использованием простого и достаточно точного модифицированного метода средних потоков. Согласно этому подходу, интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной поглощающей среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса для полусферических потоков $\Phi_j^\pm$ представляется в виде [2, 4]

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau_j} (\Phi_j^+ - \Phi_j^-) + (m_j^+ \Phi_j^+ - m_j^- \Phi_j^-) = n^2 \Phi_0, \\ \frac{d}{d\tau_j} (m_j^+ l_j^+ \Phi_j^+ - m_j^- l_j^- \Phi_j^-) + (\Phi_j^+ - \Phi_j^-) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Граничные условия для системы уравнений (9) в безразмерных переменных записываются следующим образом [2]:

$$\begin{cases} \tau_{j,I} = 0: \quad \Phi_j^- = (1 - R_2) \Phi_j^* + \left(1 - \frac{n^{*2}}{n^2}\right) \Phi_j^- + R_2 \frac{n^{*2}}{n^2} \Phi_j^+, \\ \tau_{j,I} = \alpha_j L(t): \quad \Phi_j^+ = \varepsilon_1 \frac{\Phi_{0j}}{4} + R_1 \Phi_j^-, \\ \tau_{j,II} = \alpha_j L(t) + \infty: \quad \Phi_{j,II}^- = \Phi_j^*. \end{cases} \quad (10)$$

В граничных условиях (10) учтен селективный источник излучения Φ_v^* . Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_j^\pm(\tau, \eta) &= 2\pi \int_{0(-1)}^{1(0)} I_v(\tau, \mu) \mu d\mu \left/ (4\sigma_0 T_r^4) \right., \quad m^\pm(\tau) = \int_{0(-1)}^{1(0)} I_v(\tau, \mu) d\mu \left/ \int_{0(-1)}^{1(0)} I_v(\tau, \mu) \mu d\mu \right., \\ l^\pm(\tau) &= \int_{0(-1)}^{1(0)} I_v(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \left/ \int_{0(-1)}^{1(0)} I_v(\tau, \mu) \mu d\mu \right., \quad \Phi_{0v} = n^2 B_v / (4\sigma_0 T_f^4) \quad \text{— безразмерная} \end{aligned}$$

плотность потока равновесного излучения, B_ν — функция Планка, n — коэффициент преломления льда, n^* — коэффициент преломления внешней среды, I_ν — интенсивность излучения, μ — косинус угла между направлением распространения излучения и осью x , $\tau_j = \alpha_j L(t)$ — спектральная оптическая толщина слоя в момент времени t . Значения коэффициентов $m^\pm$, $l^\pm$ определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения; j — номер спектральной полосы [2, 4]; слой I относится ко льду, слой II — к внешнему пространству (рис. 1).

Решение краевой задачи сводится к определению температур $\theta(\xi, \eta)$ и плотностей потоков результирующего излучения $\Phi_\nu(\xi, \eta)$ в области $G = \{0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$, представляющей собой плоский слой чистого, поглощающего, излучающего и нерассеивающего льда. Положение фронта фазового перехода $s(\eta)$ меняется от 1 до 0. Краевая задача (8)–(12) решается конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. При решении радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (13), (14) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость такого метода решения позволяет получать достаточно точные результаты.

Анализ результатов

Ниже представлен анализ результатов численного моделирования вертикально расположенного чистого, нерассеивающего льда со следующими физическими параметрами: начальная толщина льда $L_0 = 0,045$ м, температура левой границы подложки и начальная температура подложки и льда $T_{\text{sub}} = 253,15$ К, температура атмосферы внутри камеры T_∞ поддерживается постоянной, равной температуре таяния льда T_f , и составляет 273,15 К, постоянная плотность падающего потока излучения $E_\nu^* = 1162,22$ Вт/м². Приняты следующие теплофизические свойства льда: теплопроводность $\lambda = 1,9$ Вт/(м·К), температуропроводность $a = 9,3 \cdot 10^{-7}$ м²/с, скрытая теплота фазового перехода $\gamma = 335$ кДж/кг. Оптические параметры имеют значения: показатели преломления льда и воздуха составляют соответственно $n = 1,31$ и $n^* = 1$, коэффициенты отражения — $R_1 = 0,5$ и $R_2 = 0,063$, степень черноты границ $\varepsilon_1 = 1 - R_1$. Спектральные характеристики льда представлены в таблице.

При решении задачи варьировались коэффициент теплоотдачи и степень черноты на правой облучаемой поверхности. Теплоотдача на этапе нагрева льда $h = 15,16$ Вт/м², на этапе фазового перехода $h = 8$ Вт/м². Степень черноты облучаемой границы на первом этапе $\varepsilon_2 = 0,97$ [1]. На этапе фазового перехода степень черноты ε_2 принималась равной 0,47, а коэффициент отражения $R_2 = 1 - \varepsilon_2$. Последний параметр получен в ходе численных экспериментов, он соответствует появлению сильно шероховатых поверхностей при облучении льда галогеновым источником излучения [11] и отображает повышение его отражательной способности.

На рис. 3 представлено температурное поле в слое льда на этапах его нагрева и последующего таяния. В начальный момент нагрева (кривые между 1 и 2) температурное поле в объеме среды значительно неоднородно из-за высокого коэффициента отражения

Таблица
Спектральные зависимости параметров льда

j	$\nu_j, 10^{14}$ Гц	$\lambda_j, \text{ мкм}$	$\alpha_j, \text{ м}^{-1}$	$f_{\lambda j}$	$E_j^*, \text{ Вт/м}^2$
1	9,09–2,02	0,33–1,2	0,001	0,446	518,35
2	2,02–1,18	1,2– ∞	1	0,405	470,7

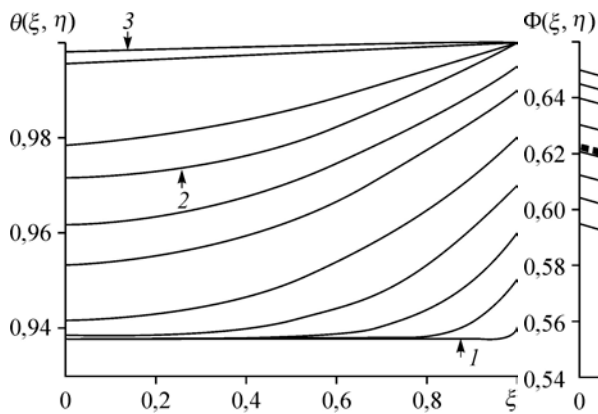


Рис. 3. Расчетное поле температуры.

на левой границе. С дальнейшим повышением температуры её градиент в объёме среды снижается. На этапе фазового перехода (линии между 2 и 3) из-за наличия талой пленки воды температурные кривые становятся почти линейными, что говорит о равновесном протекании фазового перехода.

Плотность потока результирующего излучения сильно зависит от оптических свойств среды (рис. 4). Результирующее излучение по определению равно разности падающего потока излучения и собственного излучения среды. На графике видно, что собственное излучение является минимальным на левой границе (из-за низкой температуры), а роль падающего излучения из-за коэффициента отражения высокая. На правой границе роль собственного излучения повышается, но не превосходит значения падающего излучения, т.к. плотность потока результирующего излучения положительна. На этапе нагрева (сплошные линии между 1 и 2) наблюдается существенный разброс значений, при этом постоянный угол наклона линий показывает, что результирующее излучение по мере нагрева образца имеет постоянное значение по объёму. На этапе фазового перехода (штриховые линии) значение результирующего излучения на левой холодной стороне находится почти в одной точке, тогда как на правой границе заметно сравнительно большее влияние собственного излучения облучаемой поверхности.

На рис. 5 показано изменение толщины льда в процессе таяния в сравнении с экспериментальными данными работы [11]. В начальный момент времени темп таяния совпадает с результатами эксперимента, однако в дальнейшем наблюдается постоянный

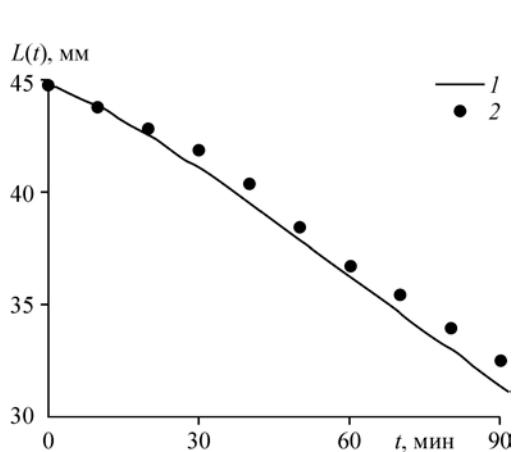
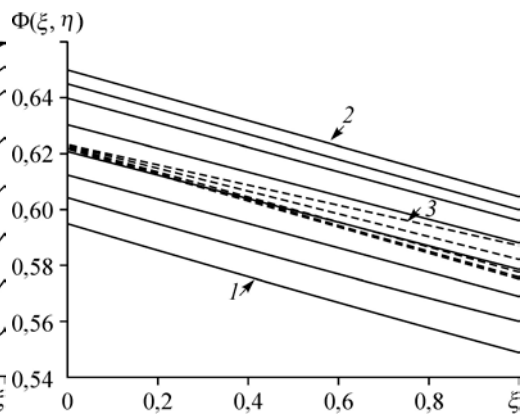
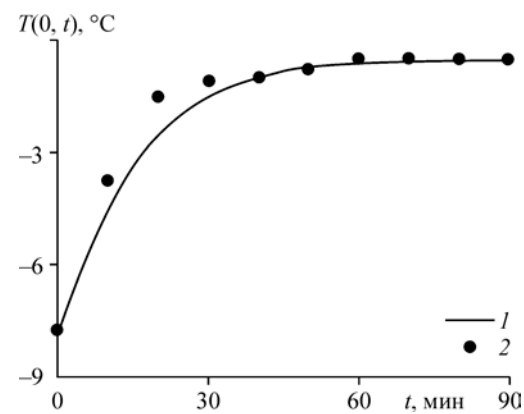


Рис. 5. Темп таяния льда.

1 — результаты расчета настоящей работы,
2 — данные работы [11].

Рис. 4. Поле плотности потока
результирующего излучения.
Сплошные линии — нагрев льда,
штриховые линии — таяние льда.Рис. 6. Рост температуры левой границы
со временем.

1 — результаты расчета настоящей работы,
2 — данные работы [11].

разброс, не превышающий 3 % значений экспериментальных данных. На рис. 6 показан рост температуры левой границы со временем. Совпадение с результатами экспериментальной части работы [11] наблюдается в начальный момент времени и при достижении стационарного состояния. Разброс значений в остальные промежутки времени (см. рис. 6) наблюдается также при сравнении численных результатов с экспериментальными, проведенными авторами вышеуказанной работы. Данный разброс значений можно объяснить как погрешностью эксперимента, так и неучтенными в модели физическими явлениями.

Заключение

В представленной работе численно исследованы формирование температурного поля и плотности потока результирующего излучения в процессе нагрева и таяния плоского слоя льда при облучении коротковолновым источником излучения в лабораторных условиях. Использована математическая модель фазового перехода в однофазной постановке задачи Стефана, описывающая радиационно-кондуктивный теплообмен в процессе таяния льда [15]. Используется модифицированный алгоритм численного расчета радиационного теплообмена с учетом селективного характера среды и источника излучения. Опосредованно, через снижение степени черноты и увеличение коэффициента отражения, учитывается появление шероховатости на льду при облучении галогеновой лампой. Проанализированы влияние отражения излучения на границах и собственного излучения на процесс нагрева и таяния льда. Для валидации предложенной математической модели и алгоритма численного расчета проведено сравнение скорости таяния льда и роста температуры на левой границе с данными эксперимента [11]. Показано удовлетворительное согласование результатов расчетов и экспериментальных данных.

Список литературы

1. Красс М.С., Мерзликин В.Г. Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеониздат, 1990. 262 с.
2. Тимофеев А.М. Моделирование радиационного нагрева снежно-ледяного покрова // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 797–804.
3. Dombrovsky L.A., Kokhanovsky A.A., Randrianalisoa J.H. On snowpack heating by solar radiation: a computational model // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2019. Vol. 227. P. 72–85.
4. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с.
5. Abrams M., Viskanta R. The effect of radiative heat transfer upon the melting and solidification of semitransparent crystals // J. Heat Transfer. 1974. Vol. 96, Iss. 2. P. 184–190.
6. Chan S.H., Cho D.H., Kocamustafaogullari G. Melting and solidification with internal radiative transfer — a generalize phase change model // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1983. Vol. 26, No. 4. P. 621–633.
7. Petrov V.A., Titov V.E., Vorobyev A.Yu. Numerical simulation of concentrated laser radiation heating of refractory oxides // High Temp. — High Press. 1999. Vol. 31. P. 267–274.
8. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, 1984. 277 с.
9. Le Dez V., Yousefian F., Vaillon R., Lemonnier D., Lallemand M. Probleme de Stefan direct dans un milieu semi-transparent gris // J. Phys. III France. 1996. Vol. 6, No. 3. P. 373–390.
10. Rubtsov N.A., Savvinova N.A., Sleptsov S.D. Simulation of the one-phase Stefan problem in a layer of a semi-transparent medium // J. Engng Thermophysics. 2015. Vol. 24, No. 2. P. 123–138.
11. Seki N., Sugawara M., Fukusaki S. Radiative melting of ice layer adhering to a vertical surface // Wärme- und Stoffübertragung. 1979. Vol. 12, Iss. 2. P. 137–144.
12. Song B., Viskanta R. Deicing of Solids Using Radiant Heating // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1990. Vol. 4, No. 3. P. 311–317.
13. Seki N., Sugawara M., Fukusaki S. Radiative melting of a horizontal clear ice layer // Wärme- und Stoffübertragung. 1978. Vol. 11, Iss. 2. P. 207–216.
14. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.
15. Слепцов С.Д., Рубцов Н.А., Саввинова Н.А. Моделирование нагрева и таяния льда в приближении задачи Стефана с учетом излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 3. С. 439–446.

*Статья поступила в редакцию 4 марта 2019 г.,
после доработки — 26 марта 2019 г.,
принята к публикации 26 апреля 2019 г.*