

ХРУПКАЯ ПРОЧНОСТЬ СОСУДОВ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

Г. П. Черепанов

(Москва)

В связи с широким применением крупногабаритных сосудов под давлением из высокопрочных материалов в атомной, ракетной и химической промышленности проблема хрупкой прочности приобрела значительную актуальность. Первые успехи в решении этой проблемы, основанные на линейной механике разрушения, показали также направления дальнейших исследований [1].

Ниже рассматриваются некоторые аспекты линейной и нелинейной механики разрушения применительно к толстостенным сосудам из высокопрочных материалов. Вначале кратко излагаются основы инженерного метода расчета на хрупкую прочность и указываются основные неизученные факторы. Далее изучается сверхтонкая структура конца трещины и развивается теория разрушения, относящаяся к явлениям меньшего масштаба [2] (п. 1). В п. 2 рассматривается влияние скорости нагружения на вязкость разрушения. В п. 3 дана оценка хрупкой прочности для случая эллиптического дефекта с учетом остаточных напряжений. В заключение затрагиваются вопросы надежности (п. 4).

Хрупкая прочность толстостенного сосуда определяется формой и расположением наиболее опасного трещиноподобного дефекта и величиной вязкости разрушения K_{1*} , характеризующей интенсивность упругих напряжений вблизи края трещины в момент начала ее нестабильного развития¹. Металлургические и технологические причины образования трещиноподобных дефектов подробно освещены в работе [3].

Процедура расчета на хрупкую прочность согласно линейной механике разрушения состоит в упругом анализе напряжений для тела с разрезом заданной формы; затем наибольший коэффициент интенсивности напряжений на контуре трещины приравнивается величине K_{1*} , которая считается постоянной и известной из специально поставленного эксперимента. В рамках линейного анализа помимо регистрации начального трещиновидного дефекта и измерения K_{1*} основное внимание нужно уделять изучению прочностной неоднородности и анизотропии, а также остаточным напряжениям.

Наиболее опасны охрупченные зоны термического влияния вблизи сварных швов. Из всех механических характеристик материала K_{1*} наиболее структурно-чувствительна, поэтому для одного и того же химического состава она зависит, например, от направления прокатки, термообработки, плавки и т. д. В самом общем случае K_{1*} является функцией трех декартовых координат (неоднородность) и трех параметров, определяющих положение края трещины в данной точке (анизотропия). При этом в отношении упругих свойств материал, как правило, можно считать однородным и изотропным.

Однако более интересны эффекты, которые принципиально не могут быть объяснены в рамках линейной механики разрушения. Важнейшие из них в практическом отношении связаны с докритическим ростом трещины [4] и большим относительным размером пластических зон в вершине трещины [1,5].

1. Сверхтонкая структура конца трещины. Обозначим через L характерный линейный размер тела (длину трещины или расстояние ее конца от границы тела), через d — характерный линейный размер пластической области в критическом состоянии, через ρ — характерный линейный размер конца трещины в предельном состоянии (например, радиус кривизны или раскрытие трещины). Линейная механика разрушения применима, строго говоря, при условии $L \gg d$ (когда безразмерный параметр $\chi = K_{1*}^{-2} \sigma_s^{-2} L^{-1}$ значительно меньше единицы [6], здесь σ_s — предел теку-

¹ Для этой величины обычно используется [1] обозначение K_{IC} .

чести). При нарушении этого условия упругая особенность не реализуется и пользоваться ею нет смысла. Для конструкционных металлов малой и средней прочности и обычно применяемых толщинах сосудов последний случай более реален.

Рассмотрим область на расстояниях r от края трещины, удовлетворяющих условиям

$$\rho \ll r \ll d, \quad \rho \ll r \ll L \quad (1.1)$$

Для конструкционных металлов величина d по крайней мере на два-четыре порядка больше ρ , поэтому правомерность одного условия не вызывает сомнения. Другое условие нарушается лишь для полостей. Решение вопроса о распределении напряжений и деформаций в области (1.1) дает ответ на вопрос о сверхтонкой структуре конца трещины.

В рамках теории малых деформаций величина ρ для разреза, очевидно, будет равной нулю.

Материал будем считать упрочняющимся упруго-пластическим. Применим теорию деформаций, считая нагружение каждого элемента близким к простому. Приемлемость этого предположения подтверждается также в дальнейшем характером полученного решения.

Приведем основные соотношения [7]

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

соотношения между деформациями и смещениями

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$$

уравнения Генки

$$\varepsilon_{ij} = \frac{f(I)}{2I} \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij} \left[\frac{f(I)}{2I} - \frac{1-2\nu}{E} \right] \quad (1.3)$$

$$\Gamma = f(I), \quad I = \sqrt{[\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{ii} \delta_{ij}] [\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{ii} \delta_{ij}]}$$

$$\Gamma = 2 \sqrt{[\varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{ii} \delta_{ij}] [\varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{ii} \delta_{ij}]}$$

Здесь σ_{ij} — напряжения, ε_{ij} — деформации, u_i — смещения, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $f(I)$ — заданная функция упрочнения, удовлетворяющая условию $f'(I) > 0$. Кроме того, будем считать, что функция упрочнения асимптотически стремится к линейной

$$f(I) = \frac{I - I_0}{\mu_0} \quad \text{при } I \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Здесь μ_0 и I_0 — постоянные материала. Можно показать, что замкнутая система уравнений (1.2), (1.3) принадлежит к эллиптическому типу, если выполняется условие $f'(I) > 0$.

Рассмотрим малую окрестность произвольной точки O на контуре трещины; точку O выберем в качестве начала декартовых координат x_i , при этом x_3 направим вдоль контура, а x_2 — по нормали к поверхности трещины, свободной от нагрузок. Применяя предельный переход, эквивалентный «принципу микроскопа», приходим к канонической сингулярной задаче для уравнений (1.2), (1.3), заданных во внешности разреза $x_2 = 0$, $x_1 < 0$. При этом в уравнениях (1.2), (1.3) нужно положить

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{f(I)}{2I} = \frac{1}{2\mu_0} \quad (1.5)$$

Второе условие является следствием сингулярности напряжений при $x^2 + y^2 \rightarrow 0$, а также положительной определенности величины I и соотношения (1.4). Можно показать, что ограниченного (при $x^2 + y^2 \rightarrow 0$) в напряжениях и непрерывного решения поставленной задачи не существует (в частности, это вытекает из энергетических соображений [2]).

Таким образом, сверхтонкая структура конца трещины для рассматриваемого материала с асимптотическим линейным упрочнением совпадает с тонкой структурой конца трещины для линейно-упругого материала, имеющего следующие упругие постоянные:

$$E_0 = 2\mu_0(1 + \nu_0), \quad 2\nu_0 = \frac{E - 2\mu_0(1 - 2\nu)}{E + \mu_0(1 - 2\nu)} \quad (1.6)$$

Здесь E_0 — модуль Юнга, ν_0 — коэффициент Пуассона. Соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений обозначим через k_1 , k_2 , k_3 . Напомним, что тонкая структура конца трещины определяется соотношением $d \ll r \ll L$.

Теперь для формулировки условия локального разрушения можно использовать любую из многочисленных моделей, предложенных ранее (Гриффитс [8], Нейбер [9], Мак-Клинтон [10], Уэллс [11], Леонов и Панасюк [12], Баренблатт [13], Вильямс [14]). Все эти модели эквивалентны [15] и приводят к одной и той же формулировке критерия в терминах коэффициентов интенсивности напряжений, впервые данной Ирвином [16]. Отметим, что из указанных авторов Мак-Клинтон и Уэллс предлагали свои критерии именно для сверхтонкой структуры.

Приведем формулировку получающегося дополнительного условия на контуре растущей трещины нормального разрыва

$$k_1 = k_{1*}, \quad k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi x_1} \sigma_{22}) \quad (1.7)$$

Здесь k_{1*} — некоторая постоянная материала, которая весьма просто связана с другой важной характеристикой материала

$$k_{1*}^2 = 2 E_0 \gamma / (1 - \nu_0^2) \quad (1.8)$$

Здесь γ — величина, имеющая размерность удельной поверхностной энергии; в рассматриваемой упруго-пластической модели среды она равна [15] работе конечных пластических деформаций непосредственно вблизи края трещины в слое, имеющем толщину порядка радиуса кривизны трещины в ее конце (для металлов $10^{-5} \div 10^{-2}$ см). В рамках применяемой теории малых деформаций она, очевидно, остается неучтенной в модели.

Совершенно аналогично может быть рассмотрен случай асимптотически степенной функции упрочнения

$$f(I) = 2a I^{\kappa+1} \quad \text{при } I \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Здесь a и κ — постоянные материала. При этом, используя [2], нетрудно показать, что дополнительное условие на контуре растущей трещины нормального разрыва будет следующим:

$$k_1 = k_{1*}, \quad k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow 0} [(2\pi x_1)^{1/(\kappa+2)} \sigma_{22}] \quad (1.10)$$

Здесь постоянная k_{1*} связана с величиной γ такой зависимостью

$$k_{1*}^{\kappa+2} = \lambda_1 \gamma / a \quad (1.11)$$

где λ_1 — безразмерная функция κ .

На основании изложенного выше основная задача нелинейной механики разрушения для упрочняющегося тела при нагружении ставится

так: требуется решить систему уравнений (1.2), (1.3) в области, занятой телом, удовлетворить граничным условиям на поверхности тела (и трещин) и дополнительному условию (1.7) или (1.10) на контуре растущей трещины нормального разрыва. Для нагружения в данном случае требуется, чтобы в сверхтонкой структуре приращение Δk_1 было положительным. При наличии сложного пути нагружения с разгрузкой требуются дополнительные исследования, так как нельзя применять уравнения Генки, а нужно использовать теорию Прандтля — Рейсса; возникают трудности с определением остаточных напряжений и деформаций.

Как видно, введение упрочнения позволяет благополучно избежать трудности, характерные для идеально упруго-пластического тела (см. статью Ирвина и Мак-Клинтока в [1], а также [2]) и состоящие в том, что в общем случае распределение напряжений и деформаций вблизи края разреза в таком теле принципиально не может быть представлено при помощи конечного числа неопределенных постоянных. Последнее приводит к возможному несовпадению различных локальных критериев разрушения для сверхтонкой структуры. Разумеется, в том случае, когда размеры тела достаточно велики, чтобы осуществлялся выход на квазихрупкую асимптотику, все эти критерии эквивалентны также для идеально упруго-пластической модели.

Приведем некоторые оценки; при этом будем считать для простоты, что функция упрочнения во всей области $I > \sigma_{0.2} / \sqrt{3}$ аппроксимирована степенной зависимостью (1.9). Следует подчеркнуть, что зависимость $\Gamma = f(I)$ должна определяться на достаточно тонких гладких образцах.

На расстоянии от конца трещины порядка ее раскрытия ρ напряжение σ_{22} имеет порядок технического предела прочности тонкого гладкого образца. Отсюда при помощи (1.10) получаем одно соотношение

$$k_{1*}^{x+2} \approx 2\pi\rho\sigma_b^{x+2} \quad (1.12)$$

На расстоянии от конца трещины порядка размера пластической области d в критическом состоянии (предполагается достигнутым квазихрупкое состояние) напряжение σ_{22} имеет порядок предела текучести $\sigma_{0.2}$; отсюда при помощи (1.10) приближенно находим

$$k_{1*}^{x+2} \approx 2\pi d\sigma_{0.2}^{x+2} \quad (1.13)$$

Используя известные соотношения [1,6]

$$K_{1*}^2 \approx 2\pi\sigma_{0.2}^2 d, \quad K_{1*}^2 = 2E\gamma_* / (1 - \nu^2) \quad (1.14)$$

и формулы (1.11) — (1.13), находим некоторые интересные зависимости

$$k_{1*}^{x+2} = \lambda_2 \sigma_{0.2}^x K_{1*}^2 \quad (1.15)$$

$$\rho = \lambda_3 \frac{\sigma_{0.2}^x K_{1*}^2}{2\pi\sigma_b^{x+2}}, \quad \frac{\rho}{d} = \lambda_4 \left(\frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_b} \right)^{x+2}$$

где γ_* — полная удельная работа диссипации (эффективная поверхностная энергия на единицу площади), $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — некоторые числа порядка единицы.

Из этих оценок вытекает также, что величины γ и γ_* одинакового порядка, т. е. в процессе развития квазихрупкой трещины необратимая удельная работа на конечных деформациях непосредственно вблизи края трещины (на расстояниях от края, меньших величины порядка ρ) составляет существенную часть полной удельной энергии диссипации в отличие от случая плоского напряженного состояния весьма тонких пластин [17].

Это объясняет экспериментальное наблюдение, заключающееся в том, что докритический рост трещины для плоской деформации гораздо менее значителен, чем для очень тонких пластин. На основании фрактографических исследований поверхности усталостной трещины (см., например, статью Бичема и Пеллу в [1]) можно заключить, что докритическое подрастание трещины в условиях плоской деформации имеет порядок величины раскрытия ρ , в то время как в весьма тонких пластинах может измеряться сантиметрами [13].

Предлагаемый подход может быть использован, в частности, для измерения вязкости разрушения K_{1*} на малых образцах с трещиной путем измерения k_{1*} . Для этого нужно иметь теоретические решения для соответствующей геометрической конфигурации и для полубесконечного разреза в неограниченном теле; последнее решение даст точную зависимость между K_{1*} и k_{1*} . Применение ЭВЦМ позволяет надеяться на решение этих задач в ближайшем будущем.

Рассмотрим один конкретный пример. Пусть на границу полуплоскости выходит трещина длины l перпендикулярно к поверхности (плоская деформация). На бесконечности тело подвергнуто однородному растяжению напряжением p , поверхность тела и трещины считается свободной от нагрузок. Примем указанную степенную аппроксимацию (1.9) при $l \gg \sigma_{0.2} / \sqrt{3}$. Используя анализ размерностей [10], нетрудно найти величину разрушающего напряжения p_* в предельных случаях

$$p_* = \lambda_5 K_{1*} l^{-1/2} \quad \text{при } \chi \ll 1 \quad (1.16)$$

$$p_* = \lambda_6(\chi) k_{1*} l^{-1/(\chi-2)} \quad \text{при } \chi \gg 1 \quad (1.17)$$

$$(\chi = K_{1*}^2 l^{-1} \sigma_{0.2}^{-2})$$

Здесь λ_5 — число, $\lambda_6(\chi)$ — безмерная функция χ ; в случае образца конечной ширины h они зависят также от отношения l/h . Вторая формула справедлива, очевидно, при $l \gg \rho$; когда длина трещины становится сравнимой с ρ , трещина растет как полость и $p_* = \sigma_b$.

2. Влияние скорости нагружения на вязкость разрушения. Показатель вязкости разрушения K_{1*} изменяется также в зависимости от скорости нагружения (примерно в 1.5–2 раза при изменении скорости нагружения на пять порядков, что соответствует переходу от статического нагружения к ударному; см., например, статью Ирвина и Краффта в [1]). Можно указать два основных типа физических механизмов такой зависимости (медленным докритическим подрастанием трещины пренебрегаем).

а) *Локальное старение* [20]. Допустим, что окрестность конца трещины подвержена нагружению величиной K_1 , меньшей критической. В области вблизи конца трещины под действием напряжений более ускоренно протекают фазовые переходы, процессы рекристаллизации и т. п., а кроме того, диффузионные процессы, например адсорбции водорода из внешней среды, при этом скорость диффузии водорода в трещине вследствие его большой летучести можно считать бесконечно большой по сравнению с диффузией в твердом теле. Все такие локально протекающие процессы, термически активируемые, феноменологически можно описать как видоизменение, «старение» материала в кончике трещины с временем. К материалам, обладающим таким физическим механизмом, можно отнести некоторые титановые сплавы [1].

В этом случае, используя обычные флуктуационные соображения и закон суммирования повреждаемости, нетрудно получить следующую зависимость для времени τ , по истечении которого трещина перейдет в нестабильное состояние:

$$\int_0^{\tau} \exp \frac{\eta K_1(t)}{kT} dt = \tau_0 \exp \frac{U}{kT} \quad (2.1)$$

Здесь T — температура, k — постоянная Больцмана, τ_0 , η и U — постоянные материала.

В частности, при постоянной скорости $K_1 \dot{=} \text{const}$, когда $K_1 = K_1 \dot{t}$, из (2.1) получаем зависимость вязкости разрушения K_{1*} от скорости нагружения K_1

$$K_{1*} = \frac{kT}{\eta} \ln \left(1 + \frac{\tau_0 \eta}{kT} K_1 \exp \frac{U}{kT} \right) \quad (2.2)$$

Поскольку второй член в скобке гораздо больше единицы, отсюда находим следующую формулу:

$$K_{1*} = \tau_0 K_{10} \left(\frac{U}{kT} + \ln \frac{K_1}{K_{10}} \right) \quad \left(K_{10} = \frac{kT}{\tau_0 \eta} \right) \quad (2.3)$$

довольно хорошо описывающую [1] экспериментальные результаты для титанового сплава Ti — 6Al — 4V.

б) *Запаздывание текучести*¹. Допустим, что тонкая структура конца трещины подвергается нагружению с постоянной скоростью $K_1 \dot{=} \text{const}$, так что $K_1 = K_1 \dot{t}$. Вследствие запаздывания пластических деформаций во времени пластическая область вблизи конца трещины в любой фиксированный момент будет тем меньше, чем больше скорость нагружения K_1 .

В малоуглеродистых сталях, обладающих свойством запаздывания текучести, существует некоторое наименьшее значение K_{1*} при данной температуре, которое может быть достигнуто на неподвижной трещине при динамическом испытании или же движущейся трещиной в момент остановки [1]. Участок убывания на кривой $K_{1*} = f(K_1)$ достаточно хорошо описывается формулой (3.3), если в ней взять знак минус перед логарифмом. Удовлетворительной теории этого явления пока не существует. Указанная зависимость от скорости нагружения объясняет наблюдаемое в некоторых металлах скачкообразное развитие трещин.

3. Расчетные формулы хрупкой прочности. Учет остаточных напряжений. Хрупкая прочность сосуда помимо прочих факторов существенно зависит от остаточных напряжений, возникших в основном при технологических операциях. В особенности опасны околошовные внутренние напряжения от сварки, имеющие местный характер и достигающие значительной величины. Учет их в расчетах в рамках линейной механики разрушения приводит, очевидно, к математическим задачам теории упругости без начальных напряжений, но с внешней нагрузкой, распределенной по поверхности трещины.

Пусть на границу стенки сосуда выходит плоская несквозная трещина, которая в плане представляет собой половину эллипса с осями a и b (фигура). Конструкцию будем считать вышедшей из строя, если трещина в результате роста станет сквозной (даже если это не приводит к разрушению всего сосуда). Для рассматриваемой задачи в обычном приближении теории оболочек ($h \ll R$, где h — толщина стенки, R — наименьший радиус кривизны оболочки) стенку сосуда можно считать бесконечной полосой $0 \leq y \leq h$, $-\infty < (x, z) < \infty$, границы которой $y = 0$ и $y = h$ свободны от нагрузок; на бесконечности действуют растягивающие напряжения, изгибающие и крутящие моменты, которые определяются из решения задачи в целом для рассматриваемой оболочки без трещины. Они равны соответствующим величинам из расчета оболочки в том месте, где расположена трещина, и зависят от геометрических параметров оболочки, от внутреннего давления и других возможных параметров внешней нагрузки.

Задачу будем считать локально-симметричной относительно плоскости xu (фигура); при этом на развитие трещины будут влиять лишь напряжения $\sigma_z = \sigma_0$ и изгибающий момент $M_x = M_0$. Предположим, что в отсутствие трещины на ее месте имелись начальные напряжения, которые аппроксимируем линейной зависимостью

$$\sigma_z = c_0 y + d_0, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (3.1)$$

¹ См. например, работы Ю. Н. Работнова [21] и Ю. В. Суворовой [22].

Нетрудно показать, что искомый коэффициент интенсивности напряжений K_1 в таком случае определяется из решения аналогичной задачи для полосы с трещиной, свободной от внешних нагрузок, при этом на бесконечности

$$\sigma_z = \sigma_0 - d_0, \quad M_x = M_0 - 1/12 c_0 h^3 \quad (3.2)$$

Из соображений анализа размерностей и линейности задачи он будет выражаться формулой

$$K_1 = (\sigma_0 - d_0) \sqrt{b} \varphi(\theta, b/a, b/h) + (M_0 - 1/12 c_0 h^3) b^{-3/2} \psi(\theta, b/a, b/h) \quad (3.3)$$

где φ и ψ — безразмерные функции своих переменных.

В целях получения достаточно простого инженерного решения этой задачи используем имеющиеся точные решения.

Воспользуемся приближенными приемами оценок, эффективность которых была показана в работах Ирвина [23], Париса и Си (сб. [1]).

Будем ориентироваться на диапазон

$$0 \ll b/a \ll 1, \quad 0 < b/h \ll 0.5 \quad (3.4)$$

представляющий наибольший практический интерес.

Рассмотрим предварительно некоторые частные случаи, представляющие также самостоятельный интерес.

Трещина эллиптической формы в плане в безграничном теле. Пусть безграничное тело с трещиной, занимающей область $z = 0, x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$, подвергается однородному растяжению в направлении оси z напряжением σ на бесконечности. Коэффициент интенсивности напряжений K_1 выражается следующей приближенной формулой:

$$K_1 = \sigma \sqrt{b} (1 - 0.36 b/a) [\cos^2 \theta + (b^2/a^2) \sin^2 \theta]^{1/4} \quad (0 \ll b/a \ll 1, x = a \sin \theta) \quad (3.5)$$

с точностью 1% совпадающей с точной формулой Панасюка — Ирвина [1], которая содержит эллиптический интеграл.

На основании (3.5) максимум K_1 имеет место при $\theta = 0$ в вершинах малой оси эллипса. При этом, если $0.78 < b/a < 1$, то началу быстрого неустойчивого развития всей трещины предшествует медленное стабильное подрастание хрупкой трещины, в процессе которого форма трещины стремится к круговой с диаметром, равным величине большой оси начального эллипса $2a$ (если предположить, что трещина при своем развитии сохраняет эллиптическую форму). Моменту перехода в неустойчивое состояние соответствует круговая форма трещины $x^2 + y^2 \leq a^2$. В этом случае предельная нагрузка σ_* , соответствующая разрушению тела в целом, определяется из (3.5) при $a = b$, и из условия $K_1 = K_{1*}$

$$\sigma_* = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} K_{1*} a^{-1/2} \quad (0.78 < b/a < 1) \quad (3.6)$$

Формулы (3.6) и (3.5) можно рекомендовать в качестве расчетных для сосудов под давлением, если наименьшее расстояние точек контура наиболее опасного трещиноподобного дефекта от стенки сосуда или соседнего дефекта не менее $3a$ [1].

Следует отметить, что предложенная Ирвином формула [23] относится только к случаю неустойчивого развития эллиптической трещины.

В том случае, когда к берегам круглой трещины $z = 0$, $x^2 + y^2 \ll a^2$ в безграничном теле приложена нормальная нагрузка по линейному закону

$$\sigma_z = -12 My h^{-3} \quad (3.7)$$

коэффициент интенсивности напряжений K_1 будет следующим [24]:

$$K_1 = 16 \pi^{-1/2} Ma^{3/2} h^{-3} \cos \theta \quad (3.8)$$

Суперпозиция формул (3.6) и (3.8) помогает оценить разрушающую нагрузку для изгиба-растяжения пластинки в тех случаях, когда $K_1 > 0$ всюду на контуре круглой трещины, отстоящей на расстоянии не меньшем $3a$ от границ полосы. При этом моменту перехода в нестабильное состояние, будет предшествовать устойчивый рост трещины.

Указанное устойчивое подрастание хрупкой трещины в однородном поле напряжений будет характерной особенностью пространственных трещин.

Поверхностная полукруглая трещина в полосе. Пусть тело, занимающее область $0 < y < h$, $-\infty < (x, z) < \infty$ и имеющее трещину $z = 0$, $x^2 + y^2 \ll a^2$, подвергается на бесконечности однородному растяжению напряжением $\sigma_z = \sigma$ и изгибу моментом $M_x = M$. Коэффициент интенсивности напряжений K_1 для изгиба выражается следующей приближенной формулой:

$$K_1 = 6.8 M h^{-3/2} \sqrt{\frac{a}{h}} \left[1 - 1.4 \frac{a}{h} + \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)^2 \left(0.2 + \frac{a}{h} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$(0 < a/h \leq 0.5, \sin \theta = x/a)$$

с точностью, примерно 3% совпадающей с численным решением Смита, Эмери и Кобаяши [25].

Используя решение [25], с той же точностью можно найти также приближенное выражение коэффициента интенсивности напряжений для растяжения

$$K_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma \sqrt{a} \left[1 + 0.2 \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)^2 \right] \quad (0 < a/h \leq 0.2, \sin \theta = x/a) \quad (3.10)$$

По-видимому, аналогично предыдущему, трещина вначале будет расти устойчиво с краев, прилегающих к свободной границе, принимая эллипсовидную форму, до тех пор, пока интенсивность напряжений не станет постоянной вдоль всего контура трещины. Затем начнется нестабильный динамический процесс разрушения. На основании экспериментальных данных [25], отношение осей эллипса a/b в момент разрушения для растяжения равно примерно 1.5.

Поверхностная прямолинейная трещина в полосе. Пусть тело, занимающее область $0 < y < h$, $-\infty < (x, z) < \infty$ и имеющее трещину $z = 0$, $0 < y \leq b$, подвергается на бесконечности однородному растяжению напряжением $\sigma_z = \sigma$ и изгибу моментом $M_x = M$.

Соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений будут такими:

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi b} \frac{1.11 + 5(b/h)^4}{1 - b/h} \quad \left(0 < \frac{b}{h} \leq 0.5 \right) \quad (3.11)$$

$$K_1 = \frac{4.2 \lambda M}{h^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{b}{h} \right)^{-3} - \left(1 - \frac{b}{h} \right)^{3-1/2} \right] \quad \left(0 < \frac{b}{h} < 1 \right)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1.15 - 15(b/h)^2 & \text{при } 0 < b/h < 0.1 \\ 1 & \text{при } b/h > 0.1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Формула (3.11) представляет собой аппроксимацию с точностью 1% численных результатов Гросса и Бови (приведенных в книге [1]). Выражение (3.12) представляет собой уточненную формулу Ромайна; сопоставляя ее с численным решением Бюккера, максимальную ошибку в ней можно найти примерно равной 4%. Следует отметить, что все указанные результаты были подтверждены экспериментально методом Ирвина (измерения смещения или податливости).

Указанные схемы и формулы (3.11), (3.12) наиболее удобны практически для измерения K_{1*} металлов.

Вернемся к общему случаю краевой эллиптической трещины в полосе (фигура). Используя полученные выше формулы как различные предельные оценки, можно найти следующие приближенные выражения для коэффициента интенсивности напряжений:

растяжение

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi b} \times \frac{1.12 - 0.48b/a + 0.13(2\theta/\pi)^2(b/a)(3b/a - 2 - b/h)}{1 - (b/h)(1 - 0.75b/a)} \quad (0 < b/a < 1, 0 < b/h \leq 0.4) \quad (3.13)$$

изгиб

$$K_1 = 6.8Mh^{-3/2} \left(\frac{b}{h}\right)^{1/2} \left\{ \frac{b}{a} \left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^2 \left(\frac{b}{h} - 0.4 + 0.6\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \left(1 - 1.4\frac{b}{h}\right) + 0.62\lambda \left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^{-1/2} \left[\left(1 - \frac{b}{h}\right)^{-3} - \left(1 - \frac{b}{h}\right)^{3-1/2} \right] \right\} \quad (0 < b/a < 1, 0 < b/h \leq 0.4) \quad (3.14)$$

Формулы (3.13), (3.14) включают в себя в качестве предельных соотношения (3.9) — (3.12); исходя из физических соображений и указанной точности предельных формул, максимальную ошибку можно гарантированно считать не превосходящей 10%. Такую точность для инженерных целей следует признать удовлетворительной. Суперпозиция позволяет при помощи (3.13), (3.14) рассмотреть также совместное действие изгиба — растяжения.

Полученные соотношения (3.13) и (3.14) позволяют изучить развитие краевой пространственной трещины и найти оценки разрушающих нагрузок. Аналогично предыдущему начальное развитие трещины, вообще говоря, будет устойчивым, что затрудняет анализ предельных состояний. Примем упрощающее допущение: в процессе своего стабильного развития трещина сохраняет эллиптическую форму; это позволяет использовать формулы (3.13) и (3.14) при анализе докритического роста трещины. Согласно (3.13) и (3.14) возможны два случая.

а) Начальная трещина имеет такие размеры, что коэффициент при θ^2 положителен. Тогда трещина начинает развиваться вдоль кромки, прилегающей к поверхности полосы, а глубина трещины b не изменяется (b/a уменьшается). Стабильный рост трещины будет продолжаться до тех пор, пока интенсивность напряжений не выравняется вдоль всего контура трещины. Очевидно, что предельное состояние, предшествующее переходу в динамический режим, достигается в момент обращения в нуль коэффициента при θ^2 .

б) Начальная трещина имеет такие размеры, что коэффициент при θ^2 отрицателен. Тогда трещина начинает развиваться вглубь, а длина трещины на поверхности $2a$ не изменяется (b/a возрастет). Опять-таки вследствие такого изменения формы трещины происходит перераспределение интенсивности напряжений вдоль ее контура в сторону выравнивания. Предельное состояние будет достигнуто в момент обращения в нуль коэффициента при θ^2 , если предположить, что наибольшая величина b/h меньше 0.4. Последний случай ($b/h > 0.4$) близок к возможности существования устойчивых сквозных трещин и вполне реален для тонкостенных авиационных конструкций, однако здесь не рассматривается.

Следует отметить, что факт стабильного подрастания несквозных трещин был сравнительно давно уже известен экспериментаторам, однако не находил достаточно ясного объяснения (см., например, [23]).

Приведем окончательные формулы, полученные на основании (3.13), (3.14) и определяющие критические размеры трещин, а также предельные нагрузки в случае наличия стабильного подрастания

растяжение (3.15)

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} + \frac{b}{3h}, \quad \sigma_* = (0.68 \pm 0.04) \frac{K_{1*}}{\sqrt{b}} \quad \left(\frac{b}{h} \leq 0.4 \right)$$

изгиб

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} - \frac{5b}{3h}, \quad M_* = 0.12 \frac{K_{1*} h^2}{\sqrt{b}} f \quad \left(\frac{b}{h} \leq 0.4 \right) \quad (3.16)$$

$$f = \begin{cases} 1 \pm 0.1 & \text{при } 0 < b/h < 0.1 \\ 1.1 - 1.2b/h \pm 0.1 & \text{при } 0.1 < b/h < 0.4 \end{cases}$$

растяжение—изгиб

(3.17)

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} + \frac{b(N-5)}{3h(N+1)}, \quad N = \frac{0.17\sigma h^2}{M(1-0.5b/h)} \approx 1.1 \frac{\sigma}{\sigma_m}$$

при $\sigma = (3 \div 10) \sigma_m$ будет $b/a \approx 2/3$ и

$$K_{1*} \geq 1.4\sigma \sqrt{b} \left(1 + 0.5 \frac{b}{h} \right) + 8.3 \frac{M \sqrt{b}}{h^2} g$$

$$g = \begin{cases} 1 - b/h \pm 0.05 & \text{при } 0 < b/h < 0.2 \\ 0.8 \pm 0.05 & \text{при } 0.2 < b/h < 0.4 \end{cases}$$

Здесь σ_m — максимальное напряжение от изгибающего момента (в пограничном волокне); знак равенства в (3.15) соответствует разрушающей комбинации нагрузок. Функции f и g аппроксимируют более сложные выражения, полученные из (3.13) и (3.14).

В случае неустойчивого развития трещины с самого начала следует использовать соотношения (3.13), (3.14).

Формулы (3.13) — (3.17), обладая приемлемой точностью для инженерных расчетов, охватывают практически все возможные случаи хрупкого разрушения толстостенных сосудов под давлением; подстановка в эти формулы значений σ_z вместо σ и M_x вместо M согласно (3.2) позволяет определить параметры внешней нагрузки в момент разрушения в зависимости от геометрии оболочки, остаточных напряжений и параметров хрупкой прочности (размеров начального дефекта и K_{1*}). При задании рабочих нагрузок формулы (3.15) — (3.17) служат в качестве нормативных требований на допускаемые размеры дефектов, величину K_{1*} металла, геометрию оболочки и остаточные напряжения.

Поправка на пластичность. Точный расчет, учитывающий пластические эффекты и основанный на рассмотрении сверхтонкой структуры (см. п. 1),

связан с достаточно трудоемкой вычислительной работой, пока еще не продланной. Поэтому представляется целесообразным на первом этапе использовать эмпирические поправки на пластичность, предложенные Ирвином [23]. Применительно к рассматриваемой задаче поправка состоит в том, что размер b увеличивают на величину Δb

$$\Delta b = \frac{p}{2\pi} \left(\frac{K_{1*}}{\sigma_{0.2}} \right)^2 \quad (3.18)$$

где p — некоторое число, подбираемое из условия совпадения с опытными данными (рекомендуемые значения: $p = 1$ для сквозных трещин в тонких пластинах, $p = 1/3$ для плоской деформации [1]).

Считается [1], что поправка отодвигает границу применимости линейной механики разрушения вплоть до среднего напряжения в сечении нетто порядка $\sigma_{0.2}$.

4. Надежность конструкции с трещиной. Для высокопрочных материалов с увеличившейся опасностью внезапного хрупкого разрушения большой интерес приобретает сравнительная оценка надежности работы конструкции. При этом возможны два пути.

а) Если размер b начального трещиновидного наиболее опасного дефекта методом неразрушающего контроля можно обнаружить с вероятностью 100%, то оценкой надежности [6] служит число χ (при одинаковых предельных нагрузках)

$$\chi = \frac{K_{1*}^2}{\sigma_{0.2}^2 b} \quad (b < 0.4 h) \quad (4.1)$$

Чем больше число χ , тем разрушение более вязкое; чем меньше число χ , тем ближе разрушение к идеально хрупкому.

б) Пусть величины K_{1*} , $\sigma_{0.2}$ и, в особенности, b известны лишь с некоторой вероятностью. Тогда при аргументированном выборе коэффициента запаса нужно прежде всего задать доверительную вероятность работы конструкции (скажем, 90, 95 или 99% — это зависит от назначения изделия), затем по формулам (3.13) — (3.18) подсчитать коэффициент запаса, требующий для обеспечения заданной вероятности. Дальнейшее сравнение двух конструкций (с одинаковым коэффициентом запаса и предельной нагрузкой) производится сравнением функций распределения числа χ .

Практически может оказаться удобнее по проектируемому коэффициенту запаса при помощи (3.13) — (3.18) определить критические размеры дефектов, а затем на основании имеющейся статистики разрушений или анализа металлургического и технологического процессов, при которых образуются дефекты, оценить вероятность наличия в конструкции сверхкритических трещин.

Поступила 25 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Fracture toughness testing and its applications. Sympos. Chi., 1964, Philad., 1965 (Amer. Soc. Test. Mater.). (Рус. перев.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.)
2. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
3. Irwin G. R., Krafft J. M., Paris P. C., Wells A. A. Basic aspects of crack growth and fracture. Chap. 7, Rep. on Reactor Pressure Vessel Technol. Publ. by Oak Ridge Nat. Lab., 1968.
4. Johnson H. H., Paris P. C. Sub-critical flow growth. Engng Fracture Mech., 1968, vol. 1, No. 1.
5. Серенсен С. В., Махутов Н. А. Механические закономерности хрупкого разрушения. Автомат. сварка, 1967, № 8.
6. Черепанов Г. П. О росте трещин при циклическом нагружении. ПМТФ, 1968, № 6.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
8. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1920, vol. 221.

9. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
10. McClintock F. A. Ductile fracture instability in shear. *J. Appl. Mech.*, 1958, vol. 25.
11. Wells A. A. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *Brit. Weld. J.*, 1963, vol. 10, No. 11.
12. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі. *Прикл. механіка*, 1959, т. 5, вып. 4.
13. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. *ПММ*, 1959, т. 23, вып. 3—5.
14. Williams M. L. Some observations regarding the stress field near the point of a crack. *Proc. Crack Propagation Sympos. Cranfield*, 1962, No. 1.
15. Черепанов Г. П. Cracks in solids. *Int. J. Solids Structures*, 1968, vol. 4, No. 6.
16. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, No. 3.
17. Черепанов Г. П. О квазихрупком разрушении. *ПММ*, 1968, т. 32, вып. 6.
18. Дроздовский Б. А., Маркочев В. М., Фридман Я. Б. Диаграммы разрушения твердых тел. *Докл. АН СССР*, 1967, т. 174, № 4.
19. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 4. М., Гостехиздат, 1957.
20. Черепанов Г. П. On crack propagation in solids. *Internat. J. Solids Structures*, 1969, vol. 5, No. 4.
21. Работнов Ю. Н. Модель упруго-пластической среды с запаздыванием текучести. *ПМТФ*, 1968, № 3.
22. Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях. *ПМТФ*, 1968, № 3.
23. Irwin G. R. Crack-Extension Force for a part-through crack in a plate. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, No. 4. (Рус. перев.: Сила, вызывающая распространение несквозной трещины в пластине. *Прикл. механ.*, 1962, т. 29, № 4.)
24. Smith F. W., Kobayashi A. S., Emery A. F. Stress intensity factors for penny-shaped cracks, pt. 1. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 34, No. 4. (Рус. перев.: Коэффициенты интенсивности напряжений для дискообразных трещин. *Прикл. механ.*, 1967, т. 34, № 4.)
25. Smith F. W., Emery A. F., Kobayashi A. S. Stress intensity factors for semicircular cracks, pt. 2. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 34, No. 4. (Рус. перев.: Коэффициенты интенсивности напряжений для полукруглых трещин. *Прикл. механ.*, 1967, т. 34, № 4.)