

УДК 539.376

## ВЛИЯНИЕ МИКРО- И НАНОРАЗМЕРНЫХ ЧАСТИЦ КАРБИДА КРЕМНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОУПРУГОСТИ И УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА ИЗ КОМПОЗИТА Al-SiC

А. Лохман, М. Хаммами, Э. Лохман

Кашанский университет, Кашан, Иран

E-mails: aloghman@kashanu.ac.ir, madjidhamamy@gmail.com, ehsanloghman@yahoo.com

Проведено исследование зависимости напряжений и деформаций ползучести вращающегося цилиндра, изготовленного из композита с алюминиевой матрицей, упрочненной частицами карбида кремния SiC, от времени. Изучено влияние равномерно распределенных микро- и наноразмерных частиц SiC на начальную термоупругость и деформацию установившейся ползучести. Поведение материала при ползучести описано с помощью модели Шерби, в которой параметры ползучести являются функциями температуры, а размер частиц составляет от 50 нм до 45,9 мкм. Рассматривалось деформирование цилиндра под действием стационарного температурного поля и силы инерции, обусловленной вращением цилиндра. С использованием уравнения равновесия, соотношений между напряжениями и деформациями, а также между деформациями и перемещениями получены дифференциальные уравнения второго порядка для перемещений с переменными коэффициентами, зависящими от времени. Решение этих дифференциальных уравнений совместно с соотношением Прандтля — Рейса и определяющими соотношениями ползучести материала позволило получить зависимость напряжений и деформаций ползучести от времени. Обнаружено, что минимальные эффективные напряжения достигаются в материале, упрочненном равномерно распределенными частицами SiC, объемная доля которых составляет 20 %, а размер — 50 нм. Установлено, что на внутренней поверхности композитного цилиндра эффективное и окружные напряжения увеличиваются со временем, а на внешней поверхности изменяются незначительно.

**Ключевые слова:** вращающийся цилиндр, установившаяся ползучесть, композит Al-SiC, микро- и наноразмерные частицы.

DOI: 10.15372/PMTF20170309

**Введение.** Композиты Al-SiC широко используются при изготовлении элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур. Разрушение таких элементов конструкций часто сопровождается деформациями ползучести, анализ которых очень важен для оценки их долговечности.

В работе [1] с использованием концепции  $\Theta$ -проекции исследованы напряжения и повреждения, возникающие при ползучести толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления и температурного градиента. В [2] с использованием метода

скоростей напряжений проведен квазистатический анализ напряжений в функционально-градиентных материалах (ФГМ). Зависимость деформации ползучести вращающихся толстостенных цилиндрических сосудов давления из ФГМ от времени при колебаниях температуры изучалась в работе [3] с помощью метода, аналогичного использованному в работе [2]. При использовании этого метода рассчитываются скорости напряжений, напряжения вычисляются итерационно на каждом шаге по времени. Предполагается, что все характеристики ФГМ, за исключением коэффициента Пуассона, изменяются по степенному закону. В [4] разработана численная модель для определения повреждений при ползучести в толстостенной сфере, находящейся под действием внутреннего давления и температурного градиента. В [5] проведен анализ установившейся ползучести изотропного вращающегося диска, изготовленного из композита Al-SiC в предположении, что упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с деформациями ползучести. В работе [6] исследованы деформации ползучести и напряжения в толстостенных цилиндрических сосудах из ФГМ, находящихся под действием внутреннего давления, и получено замкнутое решение для напряжений при установившейся ползучести в цилиндрах из ФГМ. Влияние анизотропии на установившуюся ползучесть в цилиндре из ФГМ изучено в работе [7]. В [8] исследована установившаяся ползучесть и получены параметры материала для вращающегося диска из композита Al-SiC. Там же с использованием модели Шерби [9] описано поведение композита при ползучести и изучено влияние размеров и объемной доли частиц карбида кремния, а также температуры на напряжения и скорости деформаций.

Анализ установившейся ползучести сварных труб, находящихся под действием давления, методом возмущений проведен в работе [10], в которой исследовались свойства сварного шва и основного материала при осевых колебаниях сварных труб, а также скачок окружного и радиального напряжений на границе между ними. В [11] с использованием итерационного метода упругих решений Мендельсона изучено перераспределение напряжений при установившейся ползучести вращающегося диска, изготовленного из композита Al-SiC. В [12] на основе экспериментальных данных описаны параметры ползучести материала в зависимости от температуры, размера частиц SiC и их объемной доли. В работе [13] исследовано влияние температуры, объемной доли частиц и их размера на магнитотермомеханическое поведение композитных цилиндров. Установившаяся ползучесть вращающегося цилиндра, изготовленного из изотропного композита Al-SiC, изучена в работе [14]. Там же получены напряжения и скорость установившейся ползучести в цилиндре при различных комбинациях параметров материала, таких как размер частиц и их объемная доля, а также при различных значениях температуры.

Целью данной работы является исследование влияния микро- и наноразмерных частиц карбида кремния на начальное термоупругое состояние и установившуюся ползучесть вращающегося цилиндра, изготовленного из композита Al-SiC.

**1. Геометрия задачи, условия нагружения и свойства материала.** В настоящей работе приводится геометрическая и механическая постановка задачи.

1.1. *Геометрия задачи и условия нагружения.* Рассмотрим изготовленный из композита Al-SiC толстостенный цилиндр бесконечной длины с внутренним радиусом  $r_{in} = 20$  см и внешним радиусом  $r_{out} = 50$  см, находящийся под действием силы инерции, возникающей при вращении цилиндра с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2000$  об/мин, и температурного поля. На внутренней поверхности цилиндра поддерживается температура  $T_{in} = 973$  К, на внешней — температура  $T_{out} = 823$  К. Геометрия задачи и условия нагружения представлены на рис. 1.

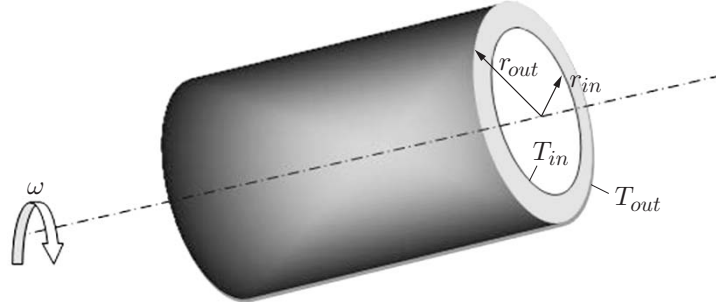


Рис. 1. Геометрия задачи и условия нагружения вращающегося композитного цилиндра

1.2. *Свойства материала.* Предположим, что объемное распределение частиц карбида кремния в направлении от внутренней поверхности к внешней описывается линейным законом

$$V_p(r) = V_{p\ out} - \frac{r - r_{in}}{r_{out} - r_{in}} (V_{p\ out} - V_{p\ in}),$$

где  $V_{p\ in}$ ,  $V_{p\ out}$  — объемная доля частиц SiC на внутренней и внешней границах цилиндра соответственно. В данной работе все механические и температурные характеристики, кроме коэффициента Пуассона и объемной доли частиц SiC, полагаются зависящими от радиуса:

$$M(r) = M_{Al} + (M_{SiC} - M_{Al})V_p(r). \tag{1}$$

Здесь  $M(r)$  — характеристика, зависящая от радиуса;  $M_{Al}$  — характеристика чистого алюминия;  $M_{SiC}$  — характеристика чистого карбида кремния;  $V_p(r)$  — объемная доля частиц карбида кремния. Характеристики смеси, зависящие от радиуса, такие как модуль упругости  $E$ , плотность  $\rho$ , теплопроводность  $K_T$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha_r$ , можно определить, используя формулу (1) и следующие характеристики материалов:  $E_{Al} = 70$  ГПа,  $E_{SiC} = 410$  ГПа,  $\rho_{Al} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{SiC} = 3200$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_{T\ Al} = 237$  Вт/(м·К),  $K_{T\ SiC} = 120$  Вт/(м·К),  $\alpha_{r\ Al} = \alpha_{\theta\ Al} = 23,1 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>,  $\alpha_{r\ SiC} = \alpha_{\theta\ SiC} = 4 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>. Коэффициент Пуассона полагается постоянным:  $\nu = 0,3$ .

1.3. *Определяющие соотношения ползучести.* Поведение материала при ползучести описывается моделью Шерби

$$\dot{\epsilon}_c = \langle M(\sigma_e - \sigma_0) \rangle^n. \tag{2}$$

Здесь  $\langle \cdot \rangle$  — скобки Мак-Кейли ( $\langle x \rangle = \max(0, x)$ );  $\dot{\epsilon}_c$  — эффективная скорость деформации ползучести;  $\sigma_e$  — эффективное напряжение. Значение показателя степени  $n$  в законе ползучести, а также параметры ползучести  $M_m$ ,  $\sigma_0$  приведены в работе [8]:

$$\ln M_m = -35,38 + 0,2077 \ln d(r_m) + 4,98 \ln T(r_m) - 0,622 \ln V_p(r_m),$$

$$\sigma_{0,m} = 0,035\ 07d(r_m) + 0,010\ 57T(r_m) + 1,005\ 36V_p(r_m) - 2,119\ 16$$

( $d(r_m)$  — размер частицы, мкм;  $T(r_m)$  — температура, К;  $V_p(r_m)$  — объемная доля частиц SiC в зависимости от радиуса  $r_m$ ).

Значения  $M$  и  $\sigma_0$  при различных размерах частиц, значениях температуры и объемной доли частиц приведены в работе [8]. Принимается, что девиатор напряжений  $S_{ij}$  и тензор скоростей деформаций ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$  связаны соотношениями

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{3\dot{\epsilon}_c}{2\sigma_e} S_{ij},$$

которые в цилиндрической системе координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^c &= \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\sigma_e} [\sigma_{rr} - 0,5(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})], & \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c &= \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\sigma_e} [\sigma_{\theta\theta} - 0,5(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})], \\ \dot{\varepsilon}_{zz}^c &= \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\sigma_e} [\sigma_{zz} - 0,5(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr})].\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $\dot{\varepsilon}_{rr}^c$ ,  $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c$ ,  $\dot{\varepsilon}_{zz}^c$  — радиальная, окружная и осевая скорости деформации ползучести;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$  — радиальное, окружное и осевое напряжения.

**2. Задача теплопереноса.** Для композитного цилиндра исследуется стационарный теплоперенос в радиальном направлении в отсутствие притока энергии. В этом случае закон теплопроводности Фурье записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r K_T(r) \frac{d}{dr} T(r) \right) = 0,$$

или

$$r K_T(r) \frac{d^2 T}{dr^2} + \left( K_T(r) + r \frac{dK_T(r)}{dr} \right) \frac{dT}{dr} = 0. \quad (4)$$

Чтобы решить это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, используем полуаналитический подход, известный как метод разбиений [15]. Для этого область решения разобьем на конечное число подобластей (рис. 2).

Коэффициенты уравнения (4), вычисленные в точках  $r = r^{(m)}$ , представляют собой радиус  $m$ -й подобласти. Обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, справедливое только в  $m$ -й подобласти, записывается следующим образом:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + A^{(m)} \frac{d}{dr} \right) T = 0.$$

Здесь

$$A^{(m)} = \frac{1}{r^{(m)}} + \frac{1}{K_T(r^{(m)})} \left. \frac{dK_T(r)}{dr} \right|_{r=r^{(m)}}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

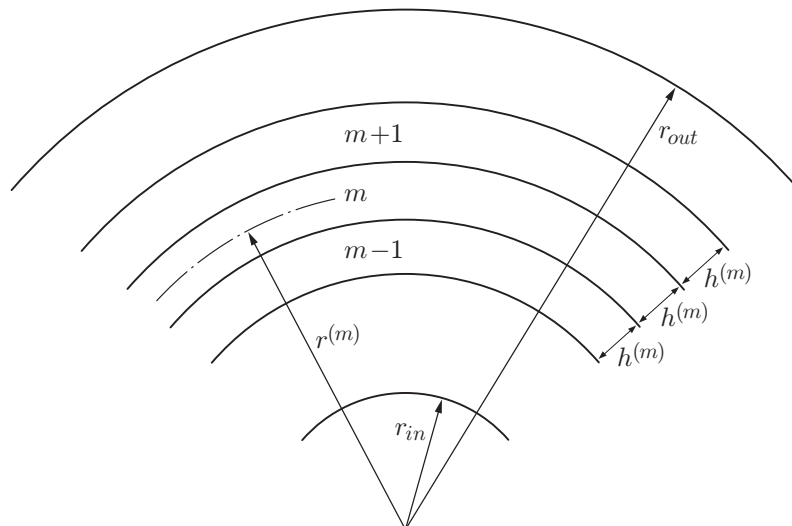


Рис. 2. Разбиение цилиндра на конечное число подобластей

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для каждой подобласти. Точное решение обыкновенных дифференциальных уравнений такого типа можно записать в виде

$$T(r^{(m)}) = \bar{X}_1^{(m)} + \bar{X}_2^{(m)} \exp(-r^{(m)}A^{(m)}),$$

где  $\bar{X}_1^{(m)}$ ,  $\bar{X}_2^{(m)}$  — неизвестные константы для  $m$ -й подобласти. Эти неизвестные определяются из условий сопряжения

$$\begin{aligned} T(r) \Big|_{r=r^{(m)}+h^{(m)}/2} &= T(r) \Big|_{r=r^{(m+1)}-h^{(m+1)}/2}, \\ \frac{dT(r)}{dr} \Big|_{r=r^{(m)}+h^{(m)}/2} &= \frac{dT(r)}{dr} \Big|_{r=r^{(m+1)}-h^{(m+1)}/2} \end{aligned} \quad (5)$$

и граничных условий

$$T(r_{in}) = T_{in}, \quad T(r_{out}) = T_{out}. \quad (6)$$

Условия сопряжения (5) и граничные условия (6) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для  $\bar{X}_1^{(m)}$  и  $\bar{X}_2^{(m)}$ . Решая эти уравнения относительно  $\bar{X}_1^{(m)}$  и  $\bar{X}_2^{(m)}$ , найдем распределение температуры  $T(r)$  по толщине цилиндра.

**3. Формулировка соотношений термоупругости и ползучести.** В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  решается осесимметричная задача для композитного цилиндра в предположении плоской деформации. В этой задаче линейные соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r},$$

где  $u$  — радиальное перемещение. Выражение для полной деформации, представляющей собой сумму упругой, температурной деформации и деформации ползучести, записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= (\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}))/E + \alpha_r T(r) + \varepsilon_{rr}^c, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}))/E + \alpha_\theta T(r) + \varepsilon_{\theta\theta}^c, \\ \sigma_{zz} &= (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}))/E + \alpha_z T(r) - (\varepsilon_{\theta\theta}^c + \varepsilon_{rr}^c); \\ \alpha_r &= \alpha_\theta = \alpha_z = \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что при деформациях ползучести материал остается несжимаемым, т. е.

$$\varepsilon_{rr}^c + \varepsilon_{\theta\theta}^c + \varepsilon_{zz}^c = 0.$$

В случае плоской деформации из уравнений (7) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T(r) - \varepsilon_{rr}^c - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\theta\theta}^c \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{rr} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T(r) - \varepsilon_{\theta\theta}^c - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{rr}^c \right); \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - E(r)\alpha T(r) + E(\varepsilon_{rr}^c + \varepsilon_{\theta\theta}^c). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение равновесия для вращающегося композитного цилиндра, находящегося под действием центробежной силы, имеет следующий вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho(r)r\omega^2 = 0. \quad (9)$$

Подставляя выражения для радиального и окружного напряжений из уравнений (8) в уравнение равновесия (9), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения перемещений:

$$C_1 \frac{d^2 u}{dr^2} + C_2 \frac{du}{dr} + C_3 u + C_4 = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1 &= E(r)(1 - \nu), & C_2 &= E(r) \left( \frac{1 - \nu}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} - \frac{\nu}{r} (1 - 2\nu) \right), \\ C_3 &= E(r) \left( \frac{\nu}{rE(r)} \frac{dE(r)}{dr} - \frac{\nu}{r^2} - \frac{1 - 2\nu}{r} \right), \\ C_4 &= \left[ -(\alpha_r(r) + \nu\alpha_\theta(r)) \frac{dE(r)}{dr} - E(r) \left( \frac{d\alpha_r(r)}{dr} + \nu \frac{d\alpha_\theta(r)}{dr} \right) + E(r)(\alpha_\theta(r) - \alpha_r(r)) \right] T(r) + \\ &+ [-E(r)(\alpha_r(r) + \nu\alpha_\theta(r))] \frac{dT(r)}{dr} + \left( -\frac{dE(r)}{dr} - E(r)(1 - \nu) \right) \varepsilon_{rr}^c + \\ &+ [-E(r)(\alpha_r(r) + \nu\alpha_\theta(r))] \frac{dT(r)}{dr} + \left( -\frac{dE(r)}{dr} - E(r)(1 - \nu) \right) \varepsilon_{rr}^c + \\ &+ \left( -\nu \frac{dE(r)}{dr} - E(r)(1 + \nu) \right) \varepsilon_{\theta\theta}^c - E(r) \left( \frac{d\varepsilon_{rr}^c}{dr} + \nu \frac{d\varepsilon_{\theta\theta}^c}{dr} \right) + (1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho(r)r\omega^2. \end{aligned}$$

Деформации ползучести содержатся в коэффициенте  $C_4$  дифференциального уравнения (10). Приращения деформации ползучести связаны с одноосной моделью ползучести материала и текущими напряжениями известными соотношениями Прандтля — Рейса, представляющими собой уравнения (3), записанные в приращениях:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{rr}^c &= \frac{\Delta\varepsilon_c}{\sigma_e} [\sigma_{rr} - 0,5(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})], & \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^c &= \frac{\Delta\varepsilon_c}{\sigma_e} [\sigma_{\theta\theta} - 0,5(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})], \\ \Delta\varepsilon_{zz}^c &= \frac{\Delta\varepsilon_c}{\sigma_e} [\sigma_{zz} - 0,5(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr})], \end{aligned}$$

приращение осевой деформации ползучести также может быть получено из условия несжимаемости материала:

$$\Delta\varepsilon_{zz}^c = -(\Delta\varepsilon_{rr}^c + \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^c).$$

Здесь  $\sigma_e$  — эффективное напряжение по Мизесу;  $\Delta\varepsilon_c$  — эффективное приращение деформации ползучести, которое при использовании модели ползучести Шерби (2) может быть записано в виде

$$\Delta\varepsilon_c = [M(\sigma_e - \sigma_0)]^n \Delta t.$$

Получить аналитическое решение дифференциального уравнения (10) с переменными коэффициентами, зависящими от времени, невозможно. Если число подобластей, на которые разбивается цилиндр, велико, то для некоторого промежутка времени для подобласти  $m$  точное решение дифференциального уравнения (10) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} u^{(m)} &= X_1^{(m)} \exp(\lambda_1^{(m)} r^{(m)}) + X_2^{(m)} \exp(\lambda_2^{(m)} r^{(m)}) - C_4^{(m)} / C_3^{(m)}; \\ \lambda_{1,2}^{(m)} &= \frac{-C_2^{(m)} \pm \sqrt{(C_2^{(m)})^2 - 4C_3^{(m)} C_1^{(m)}}}{2C_1^{(m)}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $X_1^{(m)}$ ,  $X_2^{(m)}$  — неизвестные константы для данной подобласти, определяемые из условий сопряжения

$$\begin{aligned} u^{(m)} \Big|_{r=r^{(m)}+h^{(m)}/2} &= u^{(m+1)} \Big|_{r=r^{(m+1)}-h^{(m+1)}/2}, \\ \sigma_{rr}^{(m)} \Big|_{r=r^{(m)}+h^{(m)}/2} &= \sigma_{rr}^{(m+1)} \Big|_{r=r^{(m+1)}-h^{(m+1)}/2} \end{aligned} \quad (12)$$

и граничных условий

$$\sigma_{rr}(r_{in}) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_{out}) = 0. \quad (13)$$

Условия непрерывности (12) с граничными условиями (13) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для определения  $X_1^{(m)}$  и  $X_2^{(m)}$ . Решая эту систему линейных алгебраических уравнений относительно  $X_1^{(m)}$  и  $X_2^{(m)}$ , вычисляем неизвестные коэффициенты уравнения (11). Затем вычисляем компоненты перемещений и напряжений во всех точках по толщине цилиндра. Точность этих вычислений может быть увеличена путем увеличения числа подобластей. В данном случае это число равно 50.

В пренебрежении деформациями ползучести в коэффициенте  $C_4$  рассмотренная выше задача превращается в задачу упругости. На рис. 3 показаны начальные напряжения при термоупругом деформировании для композита, 20 % объема которого составляют равномерно распределенные частицы карбида кремния, при различных размерах частиц. Переход к безразмерным значениям напряжений осуществляется путем деления напряжений на  $\rho_{Al} r_0^2 \omega^2$ .

Согласно результатам решения задачи термоупругости минимальные эффективные напряжения наблюдаются в цилиндре из композита Al–SiC с частицами карбида кремния размером 50 нм, объемная доля которых составляет 20 %. Цилиндр из такого композита рассматривался при квазистатическом анализе.

**4. Зависимость напряжений и деформаций ползучести от времени.** В момент приложения нагрузки деформации ползучести равны нулю. Для получения решения дифференциального уравнения (10) в некоторый момент времени после приложения нагрузки применялся метод последовательных приближений Мендельсона. Использовалась следующая пошаговая процедура.

1. Выбирается величина приращения времени. В данной работе в качестве шага по времени выбран промежуток времени, равный 1 сут, т. е. для  $i$ -го шага  $\Delta t_i = 86400$  с. Общее время, в течение которого развивается процесс ползучести, представляет собой сумму всех приращений времени. Для  $i$ -го шага общее время равно

$$t_i = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t_j + \Delta t_i.$$

2. Для всех точек разбиения  $m$  на  $i$ -м шаге по времени принимаются начальные значения  $\Delta \varepsilon_{rr,im}^c = -0,00051$  и  $\Delta \varepsilon_{\theta\theta,im}^c = 0,00051$ . Эти значения добавляются к накопленной деформации ползучести, полученной на предыдущих шагах по времени во всех точках разбиения вдоль радиуса цилиндра:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr,im}^c &= \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \varepsilon_{rr,im}^c + \Delta \varepsilon_{rr,im}^c, & \varepsilon_{\theta\theta,im}^c &= \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \varepsilon_{\theta\theta,im}^c + \Delta \varepsilon_{\theta\theta,im}^c, \\ \varepsilon_{zz,im}^c &= \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \varepsilon_{zz,im}^c + \Delta \varepsilon_{zz,im}^c, & \Delta \varepsilon_{zz,im}^c &= -(\Delta \varepsilon_{rr,im}^c + \Delta \varepsilon_{\theta\theta,im}^c). \end{aligned}$$

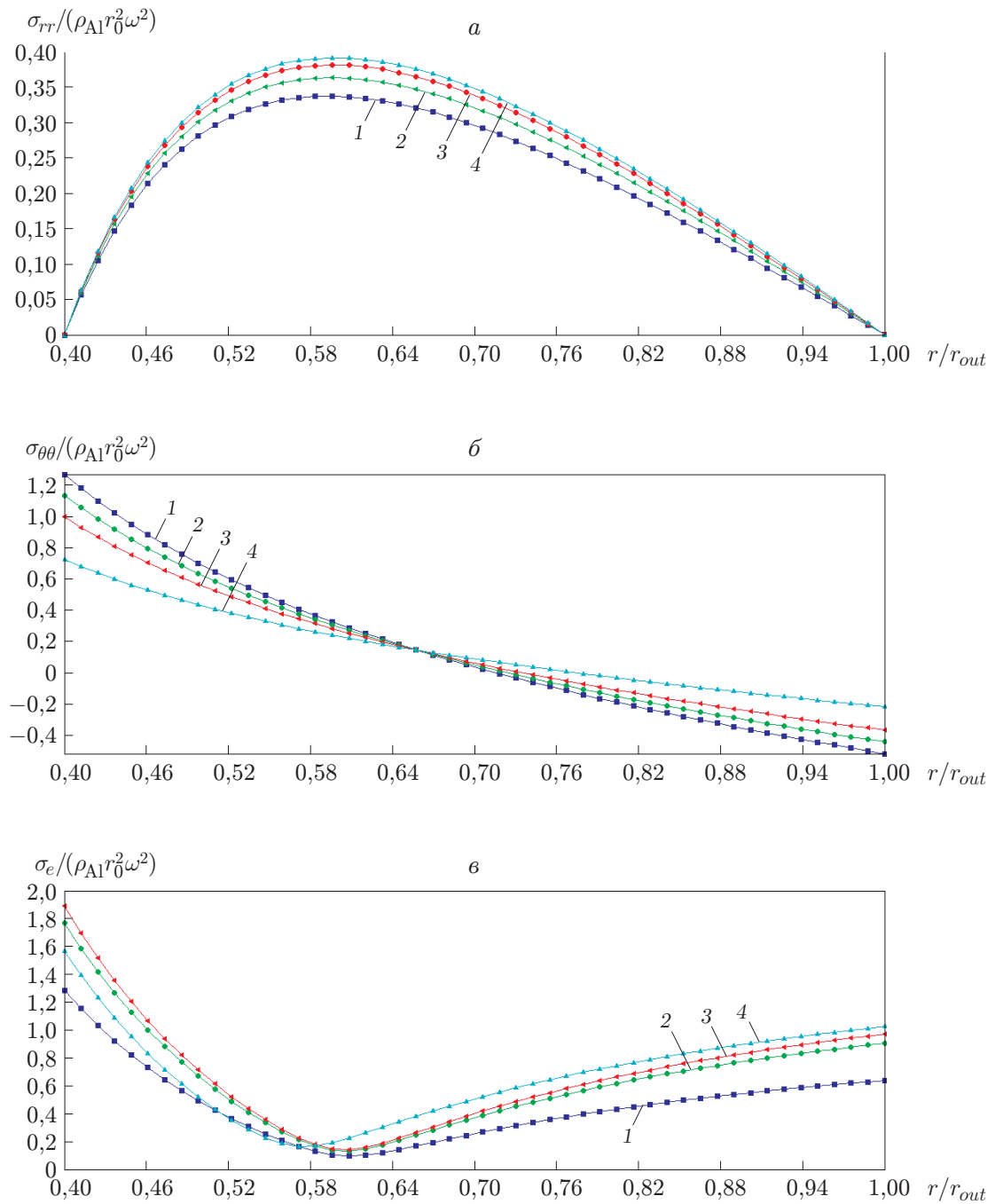


Рис. 3. Распределения начальных радиальных (*a*), начальных окружных (*б*) и начальных эффективных (*в*) напряжений во вращающемся цилиндре при термоупругом деформировании:

1 —  $d = 50$  нм, 2 —  $d = 1,7$  мкм, 3 —  $d = 14,5$  мкм, 4 —  $d = 45,9$  мкм



3. С использованием принятого распределения приращений деформаций ползучести уравнение (10) можно решать как уравнение термоупругости, вычисляя начальные оценки перемещений, а затем — текущие напряжения.

4. Во всех точках разбienia вычисляются эффективные по Мизесу напряжения:

$$\sigma_{\theta,im} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr,im} - \sigma_{\theta\theta,im})^2 + (\sigma_{rr,im} - \sigma_{zz,im})^2 + (\sigma_{\theta\theta,im} - \sigma_{zz,im})^2}.$$

5. Для всех точек разбienia  $m$  на  $i$ -м шаге по времени с использованием модели ползучести Шерби вычисляются эффективные приращения деформаций ползучести:

$$\Delta\varepsilon_{c,im} = [M_m(\sigma_{\theta,im} - \sigma_{0,m})]^n \Delta t_i.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \ln M_m &= -35,38 + 0,2077 \ln d(r_m) + 4,98 \ln T(r_m) - 0,622 \ln V_p(r_m), \\ \sigma_{0,m} &= 0,035\,07d(r_m) + 0,010\,57T(r_m) + 1,005\,36V_p(r_m) - 2,119\,16. \end{aligned}$$

6. Из соотношений Прандтля — Рейса получаются новые значения приращений деформации ползучести:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{rr,im}^{c,new} &= \frac{\Delta\varepsilon_{c,im}}{\sigma_{e,im}} (\sigma_{rr,im} - 0,5(\sigma_{\theta\theta,im} + \sigma_{zz,im})), \\ \Delta\varepsilon_{\theta\theta,im}^{c,new} &= \frac{\Delta\varepsilon_{c,im}}{\sigma_{e,im}} (\sigma_{\theta\theta,im} - 0,5(\sigma_{rr,im} + \sigma_{zz,im})), \\ \Delta\varepsilon_{zz,im}^{c,new} &= \frac{\Delta\varepsilon_{c,im}}{\sigma_{e,im}} (\sigma_{zz,im} - 0,5(\sigma_{\theta\theta,im} + \sigma_{rr,im})). \end{aligned}$$

7. Вычисленные новые значения приращений деформаций ползучести сравниваются с начальными значениями для проверки сходимости численной процедуры. Если сходимость достигается, к текущему значению времени прибавляется выбранное приращение и процедура повторяется начиная с шага 1 для нового значения времени. Если сходимость не достигается, полученное значение приращения деформации ползучести рассматривается как начальное значение для процедуры, повторяющейся начиная с шага 2.

Результаты квазистатического анализа, выполненного в соответствии с приведенной выше процедурой для композита, 20 % объема которого составляют частицы SiC размером 50 нм, приведены на рис. 4, 5.

**5. Обсуждение результатов.** На рис. 3 приведены начальные напряжения при термоупругом деформировании композита Al–SiC, упрочненного равномерно распределенными частицами SiC различного размера, объемная доля которых составляет 20 %. На рис. 3, а показано влияние размера микро- и наночастиц SiC на начальные радиальные напряжения во вращающемся цилиндре при термоупругом деформировании. Радиальные напряжения на внешней и внутренней границах принимают нулевые значения. Минимальные радиальные напряжения достигаются при размере частиц, равном 50 нм. При увеличении размера частиц радиальные напряжения возрастают. На рис. 3, б показано влияние размера частиц карбида кремния на окружные напряжения. Видно, что с увеличением размера частиц окружные напряжения на внешней поверхности возрастают, на внутренней — уменьшаются. На рис. 3, в показано влияние размеров микро- и наночастиц SiC на эффективные напряжения во вращающемся цилиндре. Минимальные эффективные напряжения достигаются при размере частиц, равном 50 нм.

На рис. 4, а показано распределение радиальных напряжений во вращающемся цилиндре из композита Al–SiC, упрочненного равномерно распределенными частицами SiC

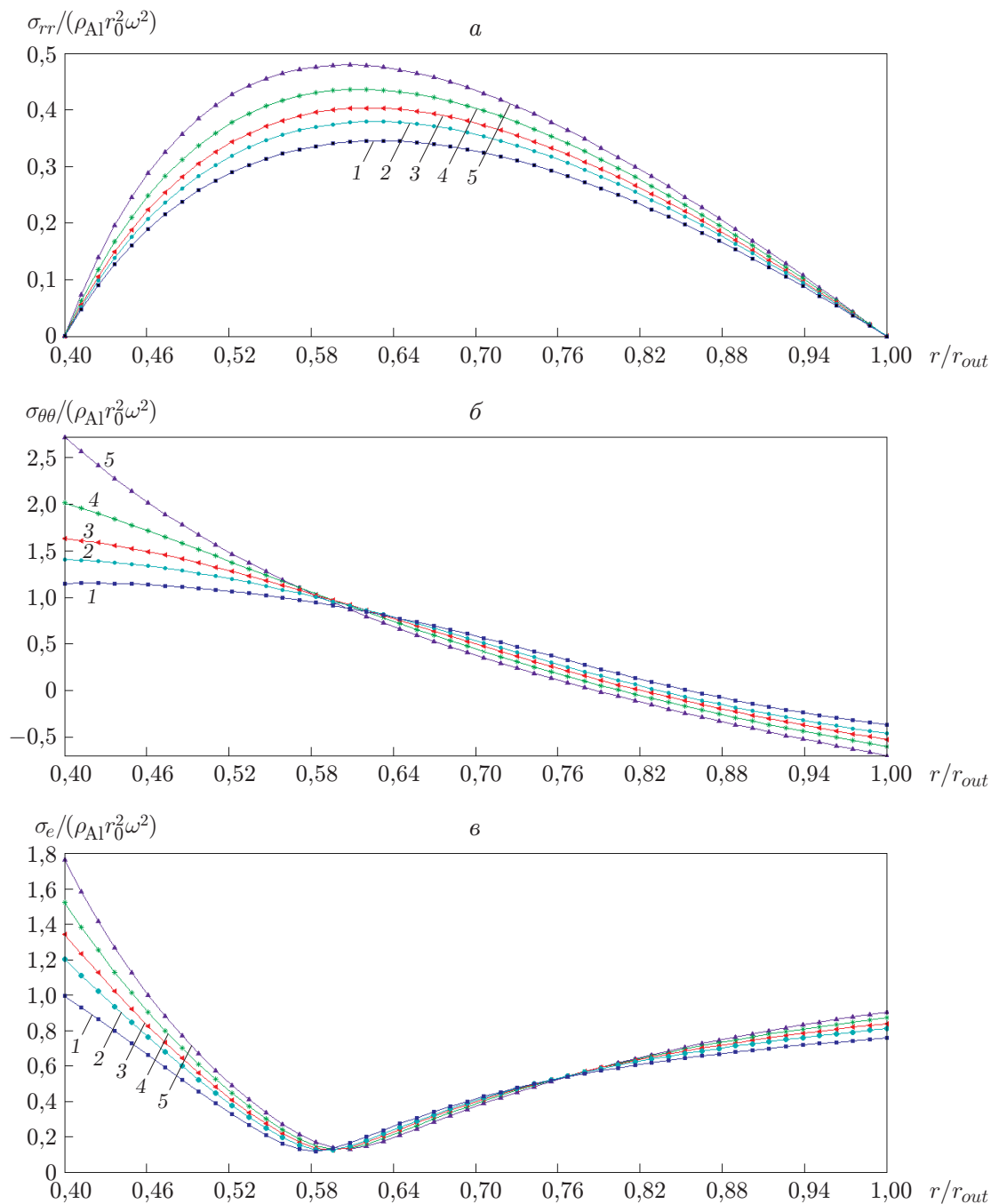


Рис. 4. Распределения радиальных (*a*), окружных (*б*) и эффективных (*в*) напряжений при ползучести во вращающемся цилиндре из композита Al-SiC, упрочненного равномерно распределенными частицами SiC размером 50 нм, объемная доля которых составляет 20 %:

1 — начальное упругое распределение, 2 — через 10 лет, 3 — через 20 лет, 4 — через 30 лет, 5 — через 50 лет

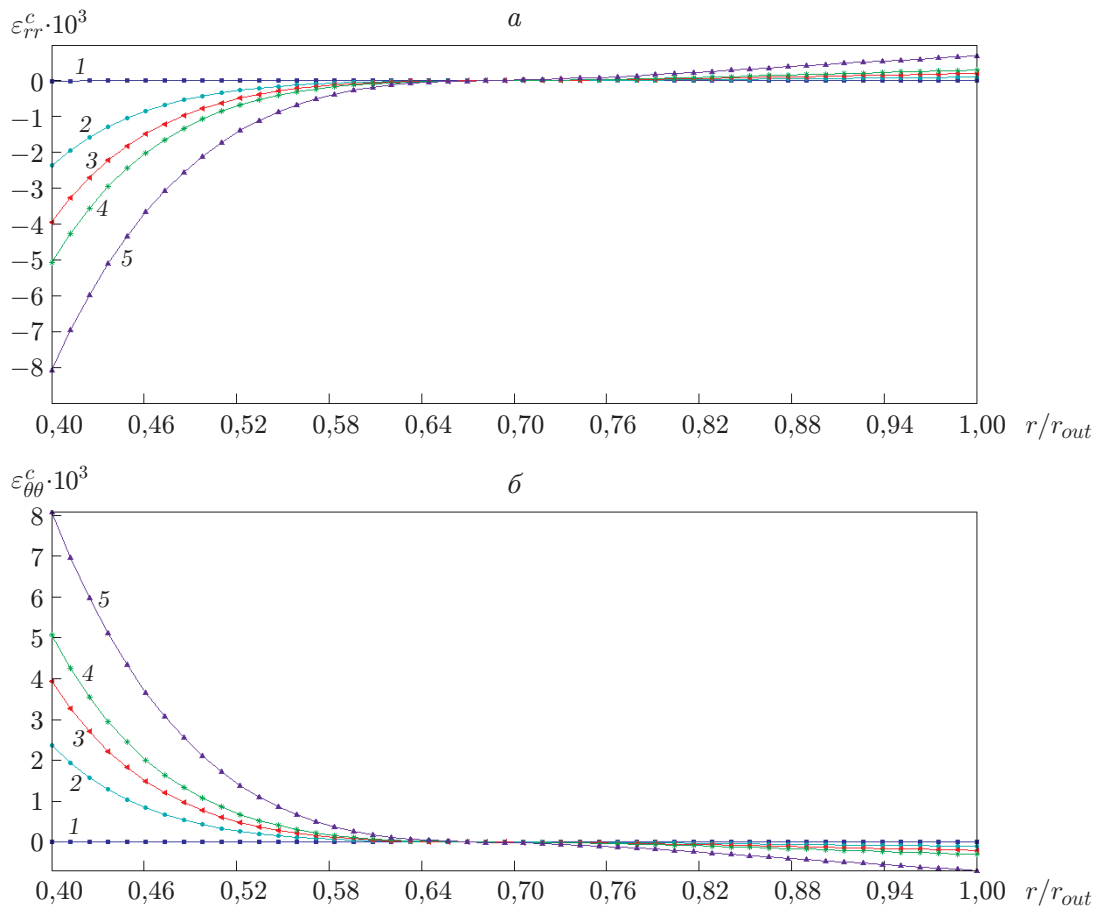


Рис. 5. Распределения радиальных (*а*) и окружных (*б*) деформаций ползучести во вращающемся цилиндре из композита Al–SiC, упрочненного равномерно распределенными частицами SiC размером 50 нм, объемная доля которых составляет 20 % (обозначения те же, что на рис. 4)

размером 50 нм, объемная доля которых составляет 20 %, в различные моменты времени. Радиальные напряжения увеличиваются со временем на протяжении всего времени существования композитного цилиндра. На рис. 4,б показано распределение окружных напряжений. Видно, что в течение всего рассмотренного промежутка времени на внутренней поверхности цилиндра они возрастают, на внешней — уменьшаются. На рис. 4,в показано распределение эффективных напряжений в различные моменты времени. На внутренней поверхности композитного цилиндра эффективные напряжения возрастают со временем, однако в области, примыкающей к внешней поверхности, изменения эффективных напряжений незначительны. Следует отметить, что изменение во времени эффективных напряжений зависит от выбранной модели ползучести материала [16, 17].

Распределения радиальной и окружной деформаций ползучести показаны на рис. 5. В течение всего процесса ползучести выполняется условие несжимаемости. В начальный момент времени деформации ползучести равны нулю. На внутренней поверхности цилиндра радиальные и окружные деформации увеличиваются, однако в области, примыкающей к внешней поверхности цилиндра, изменения деформаций ползучести незначительны.

**Заключение.** В работе исследовано влияние размера частиц на напряжения при термоупругом деформировании. Установлено, что в этом случае эффективные напряжения

достигают минимальных значений при размере частиц, равном 50 нм. Поэтому при проведении квазистатического анализа использовался цилиндр из композита, упрочненного равномерно распределенными частицами SiC размером 50 нм, объемная доля которых составляет 20 %. Исследована зависимость напряжений деформации от времени в течение 50 лет. Обнаружено, что на внутренней поверхности цилиндра эффективные напряжения со временем увеличиваются, однако в области, примыкающей к внешней поверхности, изменения эффективных напряжений незначительны. Радиальные и окружные деформации ползучести на внутренней поверхности цилиндра также увеличиваются, но в области, примыкающей к внешней поверхности, их изменения незначительны.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Loghman A., Wahab M. A.** Creep damage simulation of thick-walled tubes using the theta projection concept // Intern. J. Pressure Vessel Piping. 1996. V. 67. P. 105–111.
2. **Yang Y. Y.** Time-dependent stress analysis in functionally graded material // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37. P. 7593–7608.
3. **Nejad M. Z., Kashkoli M. D.** Time-dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux // Intern. J. Engng Sci. 2014. V. 82. P. 222–237.
4. **Loghman A., Shokouhi N.** Creep damage evaluation of thick-walled spheres using a long-term creep constitutive model // J. Mech. Sci. Tech. 2009. V. 23. P. 2577–2582.
5. **Singh S. B., Ray S.** Creep analysis in an isotropic FGM rotating disk of Al–SiC composite // J. Materials Process. Technol. 2003. V. 143/144. P. 616–622.
6. **You L. H., Ou H., Zheng Z. Y.** Creep deformation and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure // Composite Structures. 2007. V. 78. P. 285–291.
7. **Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N., Ray S.** Modeling of creep behavior of a rotation disk in the presence of both composition and thermal gradients // Trans. ASME. J. Engng Materials. 2005. V. 127. P. 97–105.
8. **Gupta V. K., Singh S. B., Chandrawat H. N., Ray S.** Steady state creep and material parameters in a rotating disk of Al–SiC composite // Eur. J. Mech. A. Solids. 2004. V. 23. P. 335–344.
9. **Sherby O. D., Klundt R. H., Miller A. K.** Flow stress, subgrain size and subgrain stability at elevated temperatures // Metall. Trans. 1977. V. A8. P. 843–850.
10. **Shutov A. V., Altenbach H., Naumenko K.** Steady-state creep analysis of pressurized pipe weldments by perturbation method // Intern. J. Solids Structures. 2006. V. 43, N 22/23. P. 6908–6920.
11. **Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Shajari A. R., Amir S.** Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al–SiC composite // Arch. Appl. Mech. 2011. V. 81. P. 1853–1864.
12. **Pandey A. B., Mishra R. S., Mahajan Y. R.** Steady state creep behavior of silicon carbide particulate reinforced aluminum composites // Acta Metallurgica Materialia. 1992. V. 40, N 8. P. 2045–2052.
13. **Loghman A., Askari Kashan A., Younesi Bidgoli M., et al.** Effect of particle content, size and temperature on magneto-thermo-mechanical creep behavior of composite cylinders // J. Mech. Sci. Tech. 2013. V. 27, N 4. P. 1041–1051.
14. **Sachan K.** Material parameters and creep in a rotating composite cylinder: Master Thesis. Punjab: Dimmed Univ. Patiala, 2006.

15. **Hosseini Kordkheili S. A., Naghdabadi R.** Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk // Composite Structures. 2007. V. 79. P. 508–516.
16. **Daghigh V., Daghigh H., Loghman A., Simoneau A.** Time dependent creep analysis of rotating ferritic steel disk using Taylor series and Prandtl — Reuss relation // Intern. J. Mech. Sci. 2013. V. 77. P. 40–46.
17. **Loghman A., Moradi M.** The analysis of time-dependent creep in FGPM thick-walled sphere under electro-magneto-thermo-mechanical loadings // Mech. Time-Dependent Materials. 2013. V. 17. P. 315–329.

*Поступила в редакцию 9/II 2015 г.,  
в окончательном варианте — 21/IX 2015 г.*

---