

УДК 536.24; 539.217.1, 512.745

## ЭФФЕКТЫ СОРЕ И ДЮФУРА В СЛУЧАЕ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕРМОФЕРЕЗА И ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ НА ПОРИСТОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Н. Сива Раман, К. К. Сивагнана Прабу, Р. Кэндээми\*

Инженерный колледж Университета Анны, 600040 Ченнай, Тамилнад, Индия

\* Исследовательский центр вычислительной гидродинамики

Университета Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Джохор, Малайзия

E-mail: future990@gmail.com

С использованием теоретико-группового метода решена задача о совместном влиянии термодиффузии и диффузионной теплопроводности в случае свободно-конвективного магнитогидродинамического теплопереноса на пористой растягивающейся поверхности при наличии термофоретического осаждения частиц и различных параметрах потока. С помощью однопараметрических групп исходная система определяющих дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями, которые решаются численно методом стрельбы с использованием схемы интегрирования Рунге — Кутты — Джилла. Показано, что при наличии термофореза и химической реакции существенное влияние на область течения оказывают эффекты Соре и Дюфура.

**Ключевые слова:** теоретико-групповое преобразование, магнитогидродинамический, эффекты Соре и Дюфура, химическая реакция, термофоретическое осаждение частицы.

**Введение.** В рамках теоретико-группового подхода математический метод, используемый в настоящей работе, сводится к однопараметрическому групповому преобразованию, что позволяет представить задачу в автомодельном виде. В работе [1] предложена теория, уточняющая ранее использовавшиеся методы подобия. В [2, 3] введено теоретико-групповое преобразование, позволяющее уменьшить количество независимых переменных. В работе [4] представлен общий систематический групповой формализм для анализа подобия, с помощью которого определяющая система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Ранее теоретико-групповой метод применялся для решения некоторых задач гидроаэромеханики. В [5] с использованием группового метода выполнен анализ задачи о нестационарном ламинарном пограничном слое в окрестности точки торможения потока. В работе [6]

теоретико-групповое преобразование применялось при решении системы уравнений, описывающей нестационарное смешанное конвективное течение в пограничном слое микрополярной жидкости вблизи лобовой точки на горизонтально расположенном цилиндре.

Течение жидкости через пористую среду имеет различные технические приложения. Многие диффузионные процессы включают молекулярную диффузию компонентов смеси при наличии химической реакции в пограничном слое. Изучение тепломассопереноса при наличии химической реакции имеет большое практическое значение, что обусловлено использованием этого процесса в различных областях науки и техники. Например, получен закон Фурье, описывающий связь между потоком энергии и температурным градиентом. Наличие потока энергии, обусловленное наличием градиента состава, называется эффектом Дюфура, или диффузионной теплопроводностью. В то же время поток массы может возникнуть вследствие наличия температурного градиента. Этот эффект называется эффектом Соре, или термодиффузией. Вообще, термодиффузия и диффузионная теплопроводность имеют меньший порядок величины, чем эффекты, описываемые законами Фурье или Фика, и поэтому часто не учитывались при изучении процессов тепломассопереноса. Процесс термодиффузии был использован для разделения изотопов и смесей газов с очень малой ( $H_2$ , He) и средней ( $N_2$ , воздух) молекулярной массой. Установлено, что при определенных условиях диффузионной теплопроводностью нельзя пренебречь.

Термофорез — движение мелких частиц от горячей поверхности к холодной. Это явление имеет различные технические приложения (осаждение частиц на пластины в микроэлектронной промышленности, осаждение частиц на поверхности, обусловленное конденсацией парогазовой смеси, столкновение частиц с поверхностью лопастей газовых турбин, газоочистка с помощью фильтрации, обеспечение безопасности ядерного реактора и др.). Использование термофоретических нагревателей привело к сокращению отказов при работе чипов в различных устройствах. Термофорез применяется для удаления радиоактивных аэрозолей из-под куполов защитной оболочки в случае аварии на ядерном реакторе, а также при изготовлении оптоволоконных заготовок.

Совместное влияние инерции, диффузии и термофореза при осаждении частицы в потоке в окрестности лобовой точки на осесимметричную волнообразную пластину исследовано в работе [7]. В [8] развита теоретическая модель связанных механизмов переноса диффузии, конвекции и термофореза, описывающая осаждение частиц на непрерывно движущуюся волнообразную поверхность. Конвективные потоки в пористых средах исследовались также в работе [9]. В [10] изучено совместное воздействие термо- и электрофореза на осаждение частиц на диск с волнообразной поверхностью. В работе [11] исследовано влияние теплового излучения и переменной вязкости жидкости на свободно-конвективное течение при наличии теплообмена на пористой растягивающейся поверхности. Установлено, что вследствие наличия градиента температуры вблизи подложки в химическом реакторе парового осаждения термофорез непосредственно влияет на количество осажденных на подложку макрочастиц. Многие диффузионные процессы включают молекулярную диффузию компонентов смеси при наличии химической реакции в потоке или на его поверхности. В работе [12] изучено влияние химической реакции, тепломассопереноса вдоль вертикальной растягивающейся пластины с источниками тепла и концентрации при наличии отсоса или вдува.

Теоретико-групповой метод используется для нахождения автомодельных решений различных задач (см., например, [1–3, 11, 13, 14]). В настоящей работе исследуется свободно-конвективный магнитогидродинамический тепломассоперенос на растягивающейся пластине при наличии термофоретического осаждения частиц и химической реакции с учетом эффектов Соре и Дюфура. С использованием теоретико-группового преобразования система определяющих уравнений и граничных условий сведена к системе

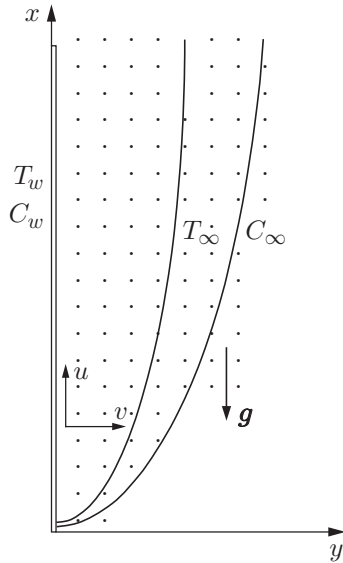


Рис. 1. Схема течения в пограничном слое на вертикальной пористой растягивающейся поверхности

нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями. С использованием метода стрельбы и схемы интегрирования Рунге — Кутты — Джилла численно решены автомодельные уравнения.

**1. Математическая модель.** Рассмотрим свободно-конвективное ламинарное течение и тепломассоперенос в пограничном слое вязкой несжимаемой ньютоновской электропроводящей жидкости на вертикальной растягивающейся пластине, начинающей движение из разреза в начале координат ( $x = 0, y = 0$ ) и перемещающейся с переменной скоростью  $U(x)$ , при наличии теплового излучения (рис. 1). Однородное поперечное магнитное поле  $B_0$  приложено параллельно оси  $y$ . В течении происходит химическая реакция. Учитывается влияние термофореза, но не учитываются вязкая диссипация и джоулев нагрев, поскольку жидкость имеет конечную проводимость. Предполагается, что наведенное магнитное поле, внешнее электрическое поле и электрическое поле, возникающее вследствие поляризации зарядов, незначительны. В уравнении импульса учитываются изменение плотности и эффекты плавучести (приближение Буссинеска), концентрация компонентов вдали от пластины  $C_\infty$  полагается бесконечно малой, член вязкой диссипации в уравнении энергии опускается (поскольку скорость жидкости очень мала). В соответствии с этими предположениями определяющие уравнения задачи имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{K} u - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u + [g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty)]; \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{D_m k_T}{C_s C_p} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}; \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial(V_T C)}{\partial y} - k_1 C + \frac{D_m k_T}{T_m} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (4)$$

$$y = 0: \quad u = U(x) = c_1 x^m, \quad v = V(x) = c_2 x^n, \\ T = T_w = T_\infty + c_3 x^r, \quad C = C_w = C_\infty + c_4 x^r, \quad (5)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u = 0, \quad C = C_\infty, \quad T = T_\infty.$$

Здесь  $u, v$  — компоненты вектора скорости в направлениях осей  $x, y$  соответственно;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $T, T_w, T_\infty$  — температура жидкости, температура пластины и температура жидкости на бесконечности соответственно;  $C, C_w, C_\infty$  — соответствующие концентрации;  $\alpha$  — температуропроводность жидкости;  $D_m$  — коэффициент диффузии;  $K$  — проницаемость пористой среды;  $B_0$  — напряженность постоянного магнитного поля;  $\sigma$  — электропроводность жидкости;  $\beta$  — коэффициент объемного теплового расширения;  $\beta^*$  — коэффициент объемного концентрационного расширения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — константы;  $U(x)$  — скорость пластины;  $V_T = -k(\nu/T) \partial T / \partial y$  — скорость термофореза;  $k\nu$  — термофоретический коэффициент диффузии;  $k$  — термофоретический коэффициент;  $k_1$  — скорость химической реакции (при  $k_1 > 0$  происходит реакция разрушения, при  $k_1 = 0$  реакция отсутствует, при  $k_1 < 0$  имеет место реакция порождения);  $V(x)$  — скорость отсоса (вдува) жидкости; член  $-\nu u/K$  — сопротивление, определяемое линейным законом (законом Дарси);  $k_T$  — коэффициент термодиффузии;  $C_s$  — коэффициент восприимчивости концентрации;  $T_m$  — средняя температура жидкости.

Для  $u, v, \theta, \varphi$  введем следующие зависимости:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}. \quad (6)$$

Подставляя соотношения (6) в уравнения (2)–(4), получаем

$$\begin{aligned} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} - v \psi_{yyy} + \left( \frac{\sigma B_0^2}{\rho} + \frac{\nu}{K} \right) \psi_y - g(\beta(T_w - T_\infty)\theta + \beta^*(C_w - C_\infty)\varphi) &= 0, \\ \psi_y((T_w - T_\infty)\theta)_x - \psi_x((T_w - T_\infty)\theta)_y - \alpha((T_w - T_\infty)\theta)_{yy} - \frac{D_m k_T}{C_s C_p} ((C_w - C_\infty)\varphi)_{yy} &= 0, \\ \psi_y((C_w - C_\infty)\varphi)_x - \psi_x((C_w - C_\infty)\varphi)_y - D_m((C_w - C_\infty)\varphi)_{yy} + & \\ + \tau((T_w - T_\infty)\theta)_y((C_w - C_\infty)\varphi)_y + ((T_w - T_\infty)\theta)_{yy}(C_w - C_\infty)\varphi + & \\ + k_1(C_w - C_\infty)\varphi - \frac{D_m k_T}{T_m} ((T_w - T_\infty)\theta)_{yy} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tau = -k(T_w - T_\infty)/T_r$ ;  $T_r$  — исходная температура.

Согласно [11, 15] граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_1 x^m, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -c_2 x^n, \quad \theta = \varphi = 1, \\ y \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем однопараметрическую группу преобразований [15]

$$\begin{aligned} \bar{x} = a^p x, \quad \bar{y} = a^q y, \quad \bar{\psi} = a^d \psi, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\varphi} = \varphi, \\ \bar{T} - \bar{T}_\infty = a^e (T - T_\infty), \quad \bar{C} - \bar{C}_\infty = a^z (C - C_\infty), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a$  — параметр группы;  $p, q, d, e, z$  — вещественные постоянные, которые нужно определить. Подставляя групповое преобразование (9) в уравнения (7) и граничные условия (8), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\bar{y}} \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{\psi}_{\bar{x}} \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}} - v \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} + \left( \frac{\sigma B_0^2}{\rho} + \frac{\nu}{K} \right) \bar{\psi}_{\bar{y}} - g(\beta(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta} + \beta^*(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi}) &= \\ = -a^{d-3q} v \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}} + a^{2d-p-2q} (\bar{\psi}_{\bar{y}} \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{\psi}_{\bar{x}} \bar{\psi}_{\bar{y}\bar{y}}) + a^{d-q} \left( \frac{\sigma B_0^2}{\rho} + \frac{\nu}{K} \right) \bar{\psi}_{\bar{y}} - & \\ - a^e g \beta (T_w - T_\infty) \theta - a^z g \beta^* (C_w - C_\infty) \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{\bar{y}}((\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta})_{\bar{x}} - \bar{\psi}_{\bar{x}}((\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta})_{\bar{y}} - \alpha((\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta})_{\bar{y}\bar{y}} - \frac{D_m k_T}{C_s C_p} ((\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi})_{\bar{y}\bar{y}} = \\ & = a^{d+e-p-q} [\psi_y((T_w - T_\infty)\theta)_x - \psi_x((T_w - T_\infty)\theta)_y] - a^{e-2q} \alpha((T_w - T_\infty)\theta)_{yy} - \\ & \quad - a^{z-2q} \frac{D_m k_T}{C_s C_p} ((C_w - C_\infty)\varphi)_{yy}; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{\bar{y}}((\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi})_{\bar{x}} - \bar{\psi}_{\bar{x}}((\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi})_{\bar{y}} - D((\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi})_{\bar{y}\bar{y}} + \\ & \quad + k_1(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi} + \tau((\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta})_{\bar{y}}((\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi})_{\bar{y}} + \\ & \quad + \tau((\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta})_{\bar{y}\bar{y}}(\bar{C}_w - \bar{C}_\infty)\bar{\varphi} - \frac{D_m k_T}{T_m} ((\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\bar{\theta})_{\bar{y}\bar{y}} = \\ & = a^{d+z-p-q} [\psi_y((C_w - C_\infty)\varphi)_x - \psi_x((C_w - C_\infty)\varphi)_y] - a^{z-2q} D_m((C_w - C_\infty)\varphi)_{yy} + \\ & \quad + a^z k_1(C_w - C_\infty)\varphi + a^{e+z-2q} [\tau((T_w - T_\infty)\theta)_y((C_w - C_\infty)\varphi)_y + \\ & \quad + ((T_w - T_\infty)\theta)_{yy}(C_w - C_\infty)\varphi] - a^{e-2q} \frac{D_m k_T}{T_m} ((T_w - T_\infty)\theta)_{yy}. \end{aligned}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} y = 0: \quad & \bar{\psi}_{\bar{y}} - c_1 \bar{x}^m = a^{d-q} \psi_y - a^{mp} c_1 x^m = 0, \quad \bar{\psi}_{\bar{x}} + c_2 \bar{x}^n = a^{d-p} \psi_x + c_2 a^{np} x^n = 0, \\ \bar{T}_w - \bar{T}_\infty - c_3 \bar{x}^r = a^e (T_w - T_\infty) - a^{rp} c_3 x^r = 0, \quad \bar{C}_w - \bar{C}_\infty - c_4 \bar{x}^r = a^z (C_w - C_\infty) - a^{rp} c_4 x^r = 0, \\ y \rightarrow \infty: \quad & \bar{\psi}_{\bar{y}} = a^{d-q} \psi_y = 0, \quad \bar{T} - \bar{T}_\infty = a^e (T - T_\infty) = 0, \quad \bar{C} - \bar{C}_\infty = a^z (C - C_\infty) = 0. \end{aligned}$$

Из условия конформной инвариантности следуют соотношения

$$\begin{aligned} 2d - p + 2q = d - q = d - 3q = e = z, \quad d + e - p - q = e - 2q, \\ d + z - p - q = z - 2q = e + z - 2q = e - 2q = z, \\ d - q = mp, \quad d - p = np, \quad e = rp, \quad z = rp, \end{aligned}$$

из которых получаем

$$p = \frac{2q}{1-m}, \quad d = \frac{1+m}{1-m}q, \quad n = \frac{m-1}{2}, \quad e = z = \frac{2(2m-1)}{1-m}q, \quad r = 2m-1. \quad (11)$$

При условии инвариантности преобразования [16, 17] из уравнения (10) следует

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a^{2/(1-m)}x, \quad \bar{y} = a^q y, \\ \bar{\psi} &= a^{(1+m)/(1-m)}\psi, \quad \bar{T}_w - \bar{T}_\infty = a^{2(2m-1)q/(1-m)}(T_w - T_\infty), \\ \bar{C}_w - \bar{C}_\infty &= a^{2(2m-1)q/(1-m)}(C_w - C_\infty), \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\varphi} = \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Сначала найдем абсолютный инвариант, который является функцией зависимой переменной, а именно  $\zeta = yx^N$ . С этой целью запишем (12) в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Ax, \quad A = a^{2/(1-m)}, \quad \bar{y} = A^{(1-m)/2}y, \quad \bar{\psi} = A^{(1+m)/2}\psi, \\ \bar{T}_w - \bar{T}_\infty &= A^{2m-1}(T_w - T_\infty), \quad \bar{C}_w - \bar{C}_\infty = A^{2m-1}(C_w - C_\infty). \end{aligned}$$

Из условия  $\bar{y}\bar{x}^N = yx^N$  следует  $\bar{y}\bar{x}^N = yx^N A^{(1-m)/2+N}$ . Полагая  $(1-m)/2+N = 0$ , получаем  $\bar{y}\bar{x}^N = yx^N$ . Так как  $N = (m-1)/2$ , то  $\zeta = yx^{(m-1)/2}$  — абсолютный инвариант.

Вычислим теперь второй абсолютный инвариант  $f(\zeta)$ , который включает зависящую переменную  $\psi$ . Предположим, что  $f(\zeta) = \bar{x}^L \bar{\psi}$ . Тогда  $\bar{x}^L \bar{\psi} = A^{(1+m)/2+L} x^L \psi$ . Полагая  $(1+m)/2 + L = 0$ , имеем  $L = -(1+m)/2$ . Таким образом, получаем второй абсолютный инвариант  $f(\zeta) = x^{-(1+m)/2} \psi$ , или  $\psi = x^{(1+m)/2} f(\zeta)$ . Аналогично получаем  $T_w - T_\infty = c_3 x^{2m-1}$ ,  $C_w - C_\infty = c_4 x^{2m-1}$ ,  $\theta = \theta(\zeta)$ ,  $\varphi = \varphi(\zeta)$ . Из уравнения (11) следует, что в случае растяжения пластины со скоростью  $U(x) = c_1 x^m$  существует автомодельное решение рассматриваемой задачи при условии  $v_w = c_2 x^{(m-1)/2}$ , в силу которого переменная подобия и зависимые переменные имеют вид

$$\zeta = yx^{(m-1)/2}, \quad \psi = x^{(1+m)/2} f(\zeta), \quad \theta = \theta(\zeta), \quad \varphi = \varphi(\zeta),$$

$$T_w - T_\infty = c_3 x^{2m-1}, \quad C_w - C_\infty = c_4 x^{2m-1}.$$

Выполним преобразования подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U(x)}{\nu x}}, \quad \psi = f(\eta) \sqrt{\frac{2}{m+1} \nu x U(x)}, \quad \theta = \theta(\eta), \quad \varphi = \varphi(\eta),$$

$$T_w - T_\infty = c_3 x^{2m-1}, \quad C_w - C_\infty = c_4 x^{2m-1},$$

с помощью которых уравнения (7) принимают вид

$$f''' + f f'' - \frac{2m}{m+1} f'^2 - \frac{2}{m+1} (M + \lambda) f' + \frac{2}{m+1} (\text{Gr} \theta + \text{Gr}_C \varphi) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\theta''}{\text{Pr}} - \frac{2(2m-1)}{m+1} \theta f' + f \theta' + \text{Df} \varphi'' = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\varphi''}{\text{Sc}} + (f - \tau \theta') \varphi' - \frac{2(2m-1)}{m+1} \varphi f' - \tau \theta'' \varphi - \frac{2}{m+1} \gamma \varphi + \text{Sr} \theta'' = 0. \quad (15)$$

Граничные условия записываются в виде

$$f(0) = S, \quad f'(0) = 1, \quad \theta(0) = 1, \quad \varphi(0) = 1, \quad f'(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0. \quad (16)$$

В (13)–(16) штрихи обозначают дифференцирование по  $\eta$ ;  $\text{Gr} = g\beta(T_w - T_\infty)/(c_1^2 x^{2m-1})$  — локальное число Грасгофа;  $\text{Gr}_C = g\beta^*(C_w - C_\infty)/(c_1^2 x^{2m-1})$  — локальное модифицированное число Грасгофа;  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  — число Прандтля;  $\text{Sc} = \nu/D_m$  — число Шмидта;  $\text{Df} = D_m k_T (C_w - C_\infty)/[C_s C_p (T_w - T_\infty)]$  — число Дюфура;  $\text{Sr} = D_m k_T (T_w - T_\infty)/[T_m (C_w - C_\infty)]$  — число Соре;  $\gamma = k_1/(c_1 x^{m-1})$  — параметр химической реакции;  $\lambda = \nu U/K$  — параметр пористости среды;  $\tau = -k(T_w - T_\infty)/T_r$  — параметр термофореза;  $S = -c_2 \sqrt{2}/[(m+1)\nu c_1]$  — параметр отсоса при  $S > 0$  или вдува при  $S < 0$ ;  $M = \sigma B_0^2 U/\rho$  — магнитный параметр.

**2. Численное решение.** Система уравнений (13)–(15) с граничными условиями (16) решалась численно с использованием схемы интегрирования Рунге — Кутты — Джилла [18] и метода стрельбы с пристрелочными параметрами  $f''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$ , чтобы были выполнены граничные условия на бесконечности. Поиск параметров  $f''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$  проводился до тех пор, пока при заданных параметрах  $\tau$ ,  $M$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  они не убывали экспоненциально до нуля. Исследовано влияние тепломассопереноса при наличии отсоса (вдува) и различных значениях параметра термофореза, магнитного параметра, параметра химической реакции и параметров потока.

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** С использованием метода, описанного в п. 2, выполнен численный расчет при различных значениях параметра химической реакции  $\gamma$ , параметра пористости среды  $\lambda$ , параметра отсоса (вдува)  $S$ , магнитного параметра  $M$ , числа Прандтля  $\text{Pr}$ , параметра термофореза  $\tau$ , числа Соре  $\text{Sr}$ , числа Дюфура  $\text{Df}$  и числа Шмидта  $\text{Sc}$ .

Стационарные значения величин  $f''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$   
при  $\lambda = 0$ ,  $\tau = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $Sc = 0,22$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Gr = 2,0$ ,  $Gr_C = 10$ ,  $M = 0,2$ ,  $m = 1$ ,  $S = 0,5$

Sr	Df	Данные работы [15]			Данные настоящей работы		
		$f''(0)$	$-\theta'(0)$	$-\varphi'(0)$	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	$-\varphi'(0)$
2,0	0,03	7,130 25	1,900 16	0,102 52	7,130 32	1,900 09	0,102 46
0,4	0,15	5,608 21	1,501 30	0,485 66	5,608 26	1,501 24	0,485 59
0,1	0,60	5,496 08	1,293 65	0,568 18	5,496 13	1,293 59	0,568 07

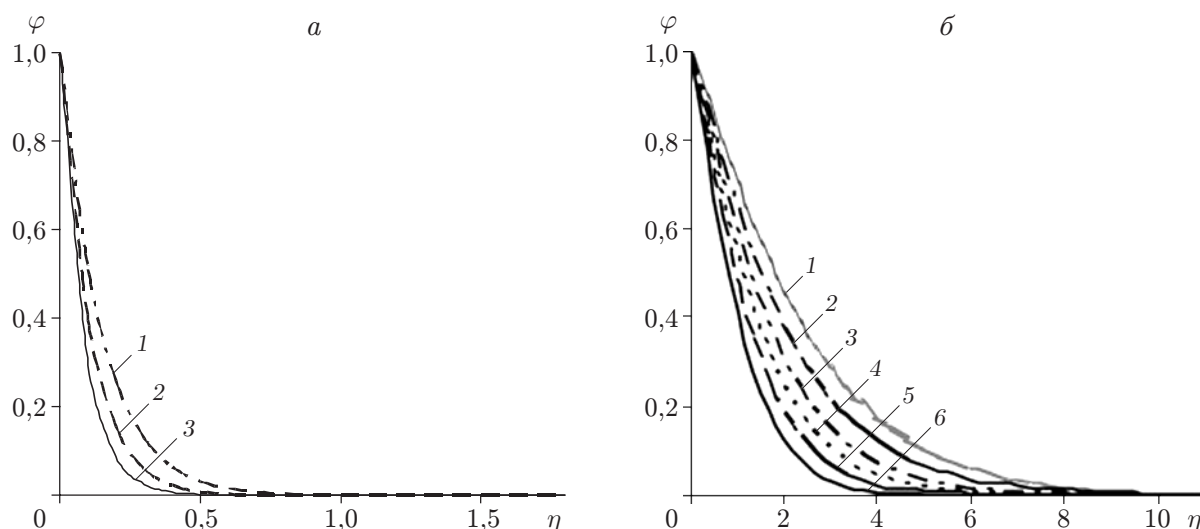


Рис. 2. Профили концентрации:

*a* — результаты, полученные в настоящей работе (1 —  $Sc = 0,22$ , 2 —  $Sc = 0,60$ , 3 —  $Sc = 0,78$ ); *б* — результаты, полученные в [15] (1 —  $Sc = 0,22$ ,  $S = -0,5$ , 2 —  $Sc = 0,60$ ,  $S = -0,5$ , 3 —  $Sc = 0,22$ ,  $S = 0,5$ , 4 —  $Sc = 0,78$ ,  $S = -0,5$ , 5 —  $Sc = 0,60$ ,  $S = 0,5$ , 6 —  $Sc = 0,78$ ,  $S = 0,5$ )

С целью проверки предлагаемого метода проведено сравнение стационарных значений поверхностного трения  $f''(0)$ , скоростей теплообмена  $\theta'(0)$  и массопереноса  $\varphi'(0)$ , полученных при различных значениях  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $Sc$ , с данными работы [15] (см. таблицу). Установлено, что они хорошо согласуются.

Проведено сравнение выполненных численных расчетов с известным точным решением. На рис. 2 показаны профили концентрации при различных значениях числа Шмидта  $Sc$ , полученные в данной работе, и профили, соответствующие точному решению в работе [15]. Видно, что профили концентрации хорошо согласуются с теоретическим решением. При  $S = 0,5$  с увеличением числа Шмидта концентрация уменьшается, что обусловлено уменьшением толщины диффузионного пограничного слоя.

На рис. 3 показано влияние параметра термофореза  $\tau$  на профиль концентрации. Видно, что при наличии однородного магнитного поля с увеличением параметра термофореза концентрация жидкости уменьшается. Увеличение параметра термофореза  $\tau$  ограничено незначительным увеличением угла наклона профилей концентрации вблизи пластины и уменьшением самой концентрации. Это справедливо только при небольших значениях числа Шмидта, когда влияние броуновской диффузии более существенное, чем влияние конвекции. При больших числах Шмидта влияние диффузии значительно слабее влияния конвекции, поэтому параметр термофореза оказывает существенное влияние на концентрационный пограничный слой. В частности, концентрация жидкости постепенно умень-

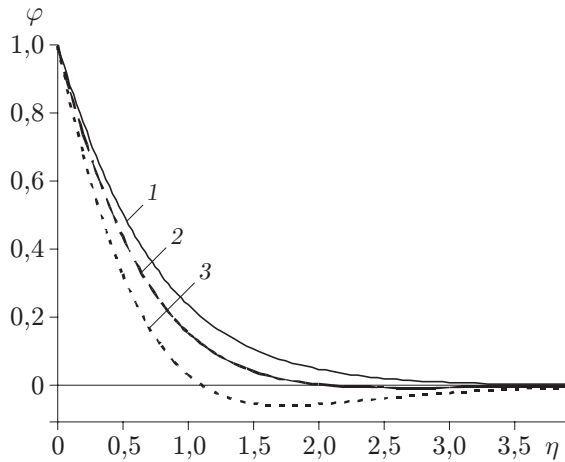


Рис. 3

Рис. 3. Влияние параметра термофореза на профили концентрации при  $Sc = 0,67$ ,  $\lambda = 1,0$ ,  $\gamma = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sr = 0,5$ ,  $Df = 0,2$ ,  $M = 0,5$ ,  $Gr = 2,0$ ,  $Gr_C = 10$ :

1 —  $\tau = 0,1$ ; 2 —  $\tau = 1,0$ ; 3 —  $\tau = 2,0$

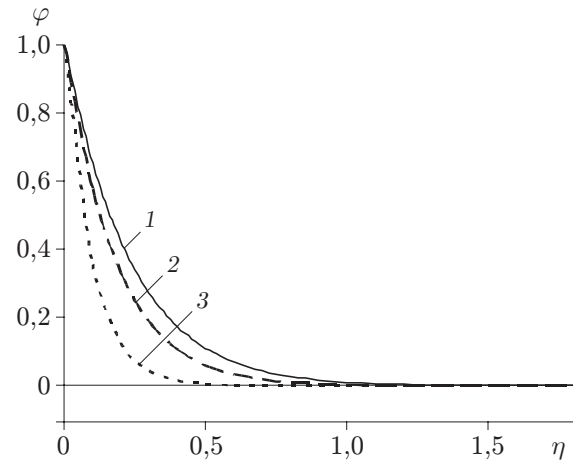


Рис. 4

Рис. 4. Влияние параметра химической реакции на профили концентрации при  $Sc = 0,67$ ,  $\lambda = 1,0$ ,  $\tau = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sr = 0,5$ ,  $Df = 0,2$ ,  $M = 1,0$ ,  $Gr = 2,0$ ,  $Gr_C = 10$ :

1 —  $\gamma = -1,0$ ; 2 —  $\gamma = 0,001$ ; 3 —  $\gamma = 2,0$

шается только в том случае, если интенсивность термофоретического осаждения частиц больше вязкости жидкости, зависящей от температуры. В случае осаждения частиц при  $\tau = 2,0$  получен важный результат — значительное искажение поля концентрации. Отрицательное значение концентрации зафиксировано вне пограничного слоя при  $Sr = 0,5$ ,  $Df = 0,2$ . Такое поведение частиц при осаждении обусловлено совместным влиянием термофореза и эффектов Соре и Дюфура на поверхности пластины.

На рис. 4 представлены профили безразмерной концентрации  $\varphi(\eta)$  при различных значениях параметра химической реакции. Видно, что при наличии равномерного отсоса и источника тепла увеличение интенсивности химической реакции приводит к уменьшению концентрации жидкости вдоль поверхности стенки. Следует отметить, что реакция разрушения оказывает более существенное влияние на профили концентрации, чем реакция порождения. Концентрация жидкости уменьшается, если скорость химической реакции  $k_1$  больше кинематической вязкости жидкости  $\nu$ .

На рис. 5 показано влияние чисел Дюфура  $Df$  и Соре  $Sr$  на температуру  $\theta$  и концентрацию  $\varphi$ . Из рис. 5,б следует, что с увеличением числа Дюфура  $Df$  толщина концентрационного пограничного слоя уменьшается, а с увеличением числа Соре  $Sr$  увеличивается. На рис. 5,б видно, что с увеличением  $Df$  концентрация уменьшается. Следует отметить, что концентрация более существенно зависит от величины  $Df$  (или  $Sr$ ), чем температура. Таким образом, эффекты Дюфура и Соре играют важную роль в молекулярной диффузии при естественной конвекции через пористую среду.

На рис. 6 представлены типичные профили скорости при различных значениях магнитного параметра. Видно, что вследствие однородной пористости поверхности пластины при наличии термофоретического осаждения частиц с увеличением магнитного параметра скорость жидкости уменьшается, тогда как температура и концентрация существенно не меняются. В результате воздействия поперечного магнитного поля на электропроводя-



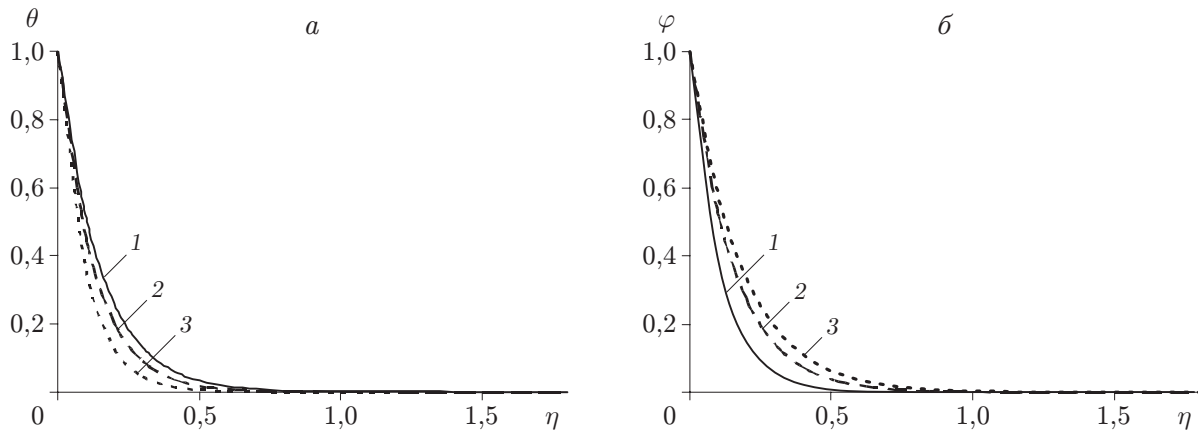


Рис. 5. Влияние чисел Соре и Дюфура на профили температуры (а) и концентрации (б) при  $Sc = 0,67$ ,  $\lambda = 1,0$ ,  $\tau = 1,0$ ,  $\gamma = 1,0$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $M = 1,0$ ,  $Gr = 2,0$ ,  $Gr_C = 10$ :

1 —  $Sr = 0,1$ ,  $Df = 0,2$ ; 2 —  $Sr = 0,5$ ,  $Df = 0,1$ ; 3 —  $Sr = 2,0$ ,  $Df = 0,03$

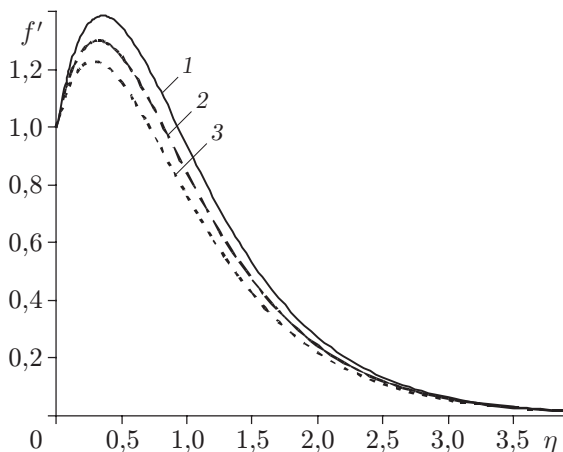


Рис. 6. Влияние магнитного параметра на профили скорости при  $Sc = 0,67$ ,  $\lambda = 1,0$ ,  $\tau = 1,0$ ,  $\gamma = 1,0$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sr = 0,5$ ,  $Df = 0,2$ ,  $Gr = 2,0$ ,  $Gr_C = 10$ :

1 —  $M = 0,5$ ; 2 —  $M = 3,0$ ; 3 —  $M = 4,0$

щую жидкость возникает сила сопротивления (сила Лоренца), что приводит к замедлению движения жидкости и увеличению толщины пограничного слоя.

**Заключение.** Результаты проведенного исследования позволяют сделать вывод, что при учете эффектов Соре и Дюфура термофоретическое осаждение частиц оказывает существенное влияние на движение жидкости вдали от пластины. Влияние поперечного магнитного поля на вязкую несжимаемую проводящую жидкость проявляется в уменьшении скорости потока и повышении температуры. При наличии химической реакции термофоретическое осаждение частиц также оказывает существенное влияние на течение, а значит, на скорость теплопереноса от пластины в жидкость. Установлено, что в результате действия термофоретической силы толщина концентрационного пограничного слоя значительно уменьшается. Следовательно, основную роль в процессе термофоретического осаждения частиц на поверхность пластины играет термофоретический эффект, а не диффузия. Таким образом достигается почти равномерное осаждение кластеров различных размеров.

Скорость теплообмена, массопереноса и термофоретическая скорость осаждения частиц на поверхность пластины зависят от чисел Соре и Дюфура, размеров частиц и термофоретического коэффициента  $k$ . Таким образом, учет влияния всех параметров важен для более точного определения скорости массопереноса и теплообмена.

Авторы выражают благодарность проректору Университета Тун Хуссейн Онн (Малайзия) Моду Но Далмину за поддержку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Morgan A. J. A.** The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations // *Quart. J. Math.* 1952. V. 3. P. 250–259.
2. **Birkhoff G.** *Hydrodynamics*. Princeton (NJ): Princeton Univ. Press, 1960.
3. **Birkhoff G.** *Mathematics for engineers* // *Electr. Engng.* 1948. V. 67. P. 1185–1193.
4. **Moran M. J., Gaggioli R. A.** Reduction of the number of variables in systems of partial differential equations with auxiliary conditions // *SIAM J. Appl. Math.* 1968. V. 16. P. 202–215.
5. **Hassanien I. A., Salama A. A., Hosham H. A.** Group theoretic method analysis for unsteady boundary layer flow near a stagnation point // *Taiwan J. Math.* 2005. V. 9. P. 639–660.
6. **Ibrahim F. S., Hamad M. A. A.** Group method analysis of mixed convection boundary-layer flow of a micro polar fluid near a stagnation point on a horizontal cylinder // *Acta Mech.* 2006. V. 181. P. 65.
7. **Wang C. C.** Combined effects of inertia and thermophoresis on particle deposition onto a wafer with wavy surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2006. V. 49. P. 1395–1402.
8. **Wang C. C., Chen C. K.** Thermophoresis deposition of particles from a boundary layer flow onto a continuously moving wavy surface // *Acta Mech.* 2006. V. 181. P. 139–151.
9. **Nield D. A.** *Convection in porous media*. 2nd ed. / D. A. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer, 1999.
10. **Chieh-Li Chen, Kun-Chieh Chan.** Combined effects of thermophoresis and electrophoresis on particle deposition onto a wavy surface disk // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 51. P. 2657–2664.
11. **Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Effects of thermal radiation and variable fluid viscosity on free convective flow and heat transfer past a porous stretching surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 51. P. 2167–2178.
12. **Kandasamy R., Periasamy K., Sivagnana Prabhu K. K.** Chemical reaction, heat and mass transfer on MHD flow over a vertical stretching surface with heat source and thermal stratification effects // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48. P. 4557–4561.
13. **Layek G. C., Mukhopadhyay S., Samad S. K. A.** Heat and mass transfer analysis for boundary layer stagnation-point flow towards a heated porous stretching sheet with heat absorption/generation and suction/blowing // *Intern. J. Commun. Heat Mass Transfer.* 2007. V. 34. P. 347–356.
14. **Pakdemirli M.** Similarity analysis of boundary layer equations of a class of non-Newtonian fluids // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1994. V. 29. P. 187–196.
15. **Ahmed A.** Similarity solution in MHD: Effects of thermal diffusion and diffusion thermo on free convective heat and mass transfer over a stretching sheet considering suction or injection // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. V. 14. P. 2202–2214.
16. **Ovsyannikov L. V.** *Group analysis of differential equations*. N. Y.: Acad. Press, 1982.
17. **Andreev V. K.** *Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics* / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. Amsterdam: Kluwer Acad. Publ., 1998.
18. **Gill S.** A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1951. V. 47. P. 96–108.

*Поступила в редакцию 18/II 2011 г.,  
в окончательном варианте — 2/VII 2011 г.*