УДК 519.6

Кососимметричный итерационный метод решения стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции со знакопеременным коэффициентом реакции*

Л.А. Крукиер[1], Б.Л. Крукиер[1], Ю.-М. Хуанг[2]

[1]Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, просп. Стачки 200/1, корпус 2, Ростов-на-Дону, 344090

[2]Школа математики и статистики, университет Ланджоу, Ланджоу, 730000, КНР

E-mails: krukier@sfedu.ru (Крукиер Л.А.), bk@sfedu.ru (Крукиер Б.Л.), huangym@lzu.edu.cn (Хуанг Ю.-М.)

Крукиер Л.А., Крукиер Б.Л., Хуанг Ю.-М. Кососимметричный итерационный метод решения стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции со знакопеременным коэффициентом реакции // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 75–85.

Итерационный попеременно-треугольный кососимметричный метод (ПТКМ) используется для решения СЛАУ, полученной при аппроксимации центрально-разностной схемой первой краевой задачи конвекции–диффузии–реакции и использовании стандартного перебора узлов сеточной области. Для знакопеременного коэффициента реакции даны достаточные условия неотрицатльной определенности матрицы СЛАУ, полученной в результате такой аппроксимации. Это свойство гарантирует сходимость достаточно широкого класса итерационных методов, в частности ПТКМ. На тестовых задачах проверено соответствие теории вычислительному эксперименту и дано сравнение ПТКМ и SSOR.

DOI: 10.15372/SJNM20160106

Ключевые слова: *уравнение конвекции–диффузии–реакции, знакопеременный коэффициент реакции, центрально-разностная схема, итерационные методы.*

Krukier L.A., Krukier B.L., Huang Yu-Mei. The skew-symmetric iterative method for solving the convection–diffusion–reaction equation with the alternating-sign reaction coefficient // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 75–85.

The iterative product, that is, the triangular skew-symmetric method (PTSM) is used to solve linear algebraic equation systems obtained by approximation of a central-difference scheme of the first boundary value problem of convection–diffusion–reaction and standard grid ordering. Sufficient conditions of a non-negative definiteness of the matrix resulting from this approximation have been obtained for a non-stationary sign of the reaction coefficient. This feature ensures the convergence of a sufficiently wide class of iterative methods, in particular, the PTSM. In the test problems, the compliance of the theory with computational experiments is verified, and comparison of the PTSM and the SSOR is made.

Keywords: *convection–diffusion–reaction equation, alternating sign coefficient of reaction, central difference scheme, iterative method.*

1. Введение

Конвективно-диффузионный перенос и учет химических реакций играют определяющую роль при изучении процессов переноса субстанции в движущейся среде. В качестве базовой математической модели при его описании выступают краевые задачи

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-00441-а, № 15-51-53066, № 14-01-31076 мол-а) и Государственного фонда естественных наук Китая (проект № 11101195).

"конвекции–диффузии–реакции" (КДР). Для их исследования привлекаются различные численные методы. После конечно-разностной, конечно-элементной или конечно-объемной аппроксимации по пространству мы приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, если рассматривается нестационарная задача, и к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), если решается стационарная задача. Основные особенности этих задач, в обоих случаях, связаны с несимметричностью и знаконеопределенностью исходного оператора [1].

Различный масштаб процессов диффузии и конвекции приводит к появлению в краевой задаче малого параметра при старшей производной. Его стремление к нулю при несогласованности краевых условий и правой части порождает сингулярно возмущенную задачу [11]. Необходимость решения таких задач дала импульс к разработке специальных вычислительных технологий, обеспечивающих нужный порядок точности приближенного решения и имеющих разумные требования к ресурсам. Очевидно, что основой для численных исследований этого класса задач является правильно построенная в области расчета сетка [11]. Вместе с тем, даже если в расчетной области пограничные слои не возникают, получаемые в результате центрально-разностной аппроксимации СЛАУ обладают рядом недостатков при доминировании конвекции, таких как потеря диагонального преобладания матрицы и сильная несимметрия системы, т. е. преобладание нормы кососимметричной части матрицы над нормой ее симметричной части [16, 18]. Использование для аппроксимации конвективных членов разностей "против потока" приводит к системам с М-матрицами [2]. М-матричность СЛАУ является достаточным условием сходимости для многих эффективных итерационных методов [21]. Однако схемы с разностями "против потока" сильно "размывают" численное решение за счет схемной вязкости, что недопустимо при больших числах Пекле, так как в этом случае численная схемная вязкость превышает физическую [23]. Наиболее полно проблема решения задачи конвекции–диффузии рассмотрена в [10] и [22].

Наличие источников и стоков в химически реагирующих потоках отражается в коэффициенте реакции уравнения КДР и вносит дополнительные сложности при численном решении задачи. Переменный знак коэффициента реакции еще больше усложняет задачу. Все это приводит к серьезным проблемам при численном решении задачи КДР в широком диапазоне изменения коэффициентов уравнения.

2. Постановка и аппроксимация задачи

Рассмотрим двумерную краевую задачу КДР в квадрате $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ с краевыми условиями 1-го рода. Уравнение КДР запишем в симметричной форме [5]:

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta C + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial (vC)}{\partial y}\right) + \alpha C = f(x,y), \tag{1}$$

$$C \mid_{\delta\Omega} = C_{\mathrm{gr}}, \tag{2}$$

$$\vec{\mathrm{div}}\tilde{U} = 0, \tag{3}$$

где Pe — число Пекле, $\tilde{U} = \{U, V\}$ — поле скоростей в Ω, C — неизвестная функция, α — коэффициент реакции (при $\alpha = 0$ величина C консервативна), $\vec{\mathrm{div}}\tilde{U} = 0$ (для несжимаемой среды), f — правая часть уравнения, $\delta\Omega$ — граница области Ω, C_{gr} — значение функции на границе $\delta\Omega$ (как правило, $C_{\mathrm{gr}} = 0$ в силу подстановки $\tilde{C} = C - C_{\mathrm{gr}}$ и линейности (1)).

Задача (1)–(3) появляется во многих областях исследований как самостоятельно, так и при решении более общей задачи, например, уравнений Навье-Стокса. Как правило, задача КДР рассматривается при условии, что $\alpha \geq 0$ [10]. Вместе с тем ограничения на знак коэффициента реакции связаны не с сущностью задачи, а с возможностью ее решать численно, так как в случае переменного коэффициента реакции, принимающего как положительные, так и отрицательные значения, спектр разностного аналога оператора Лапласа и члена реакции уравнения может не принадлежать правой полуплоскости. Часть данного спектра может сдвинуться в левую полуплоскость, в нем могут появиться нулевые собственные числа, и он потеряет важное для сходимости итерационных методов свойство знакоопределенности.

Известно [21], что знаконеопределенность, даже в случае самосопряженности СЛАУ, сильно затрудняет ее решение. Ранее, как правило, эти задачи решались прямыми методами или посредством перехода к соответствующей системе нормальных уравнений. В настоящее время решение знаконеопределенных СЛАУ актуально и для несамосопряженных задач [17].

Построим в области Ω равномерную по x и y сетку G с шагом $h = \frac{1}{N}$, где N — количество узлов. На этой сетке введем функции $C(x_i, y_k) = C_{ik}$, $x_i = i\dfrac{1}{h}$, $y_k = k\dfrac{1}{h}$, все неизвестные вычисляются в центре ячейки. Тогда уравнение (1) примет вид

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta_h C + \frac{1}{2}\bigg(U_{ik}\frac{C_{i+1k} - C_{i-1k}}{2h} + \frac{U_{i+1k}C_{i+1k} - U_{i-1k}C_{i-1k}}{2h} + V_{ik}\frac{C_{ik+1} - C_{ik-1}}{2h} + \frac{V_{ik+1}C_{ik+1} - V_{ik-1}C_{ik-1}}{2h}\bigg) + \alpha C_{ik} = f_{ik}. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_h C$ — разностный аналог оператора Лапласа. Преобразуем (4), умножив обе его части на $\mathrm{Pe}\, h^2$. Тогда

$$(4C_{ik} - C_{i+1k} - C_{i-1k} - C_{ik+1} - C_{ik-1}) + \frac{\mathrm{Pe}\, h}{2}\bigg[\frac{U_{ik} + U_{i+1k}}{2}C_{i+1k} - \frac{U_{ik} + U_{i-1k}}{2}C_{i-1k} + \frac{V_{ik} + V_{ik+1}}{2}C_{ik+1} - \frac{V_{ik} + VU_{ik-1}}{2}C_{ik-1}\bigg] + \alpha \mathrm{Pe}\, h^2 C_{ik} = \mathrm{Pe}\, h^2 f_{ik},$$

или

$$(4 + \alpha \mathrm{Pe}\, h^2)C_{ik} + \bigg[\Big(-1 + \frac{\mathrm{Pe}\, h}{2}\tilde{U}_{ik}\Big)C_{i+1k} + \Big(-1 - \frac{\mathrm{Pe}\, h}{2}\tilde{U}_{i-1k}\Big)C_{i-1k} + \Big(-1 + \frac{\mathrm{Pe}\, h}{2}\tilde{V}_{ik}\Big)C_{ik+1} + \Big(-1 - \frac{\mathrm{Pe}\, h}{2}\tilde{V}_{ik-1}\Big)C_{ik-1}\bigg] = \tilde{f}_{ik}, \tag{5}$$

где

$$\tilde{U}_{ik} = \frac{U_{ik} + U_{i+1k}}{2}, \qquad \tilde{U}_{i-1k} = \frac{U_{ik} + U_{i-1k}}{2},$$
$$\tilde{V}_{ik} = \frac{V_{ik} + V_{ik+1}}{2}, \qquad \tilde{V}_{ik-1} = \frac{V_{ik} + V_{ik-1}}{2},$$
$$\tilde{f}_{ik} = \mathrm{Pe} h^2 f_{ik}.$$

Установив на сетке G естественный порядок перебора узлов, получим систему:

$$Ay = b, \tag{6}$$

где y, b — векторы неизвестных и правой части соответственно, A — пятидиагональная матрица.

Исходная матрица (6) естественным образом рассклadывается на сумму симметричной A_0 и кососимметричной A_1 матриц:

$$A = A_0 + A_1, \quad A_0 = A_0^\top, \quad A_1 = -A_1^\top,$$

причем в симметричную матрицу A_0 попадают разностные аналоги членов диффузии и реакции уравнения (1), а в кососимметричную матрицу A_1 — разностный аналог конвективных членов уравнения (1), что связанно со специальной “симметричной” записью исходной задачи, впервые предложенной в [7] и обобщенной в [5] и [10].

Определение 1 [15]. Если

$$A_0 = A_0^\top \geq 0,$$

то матрица A называется неотрицательно (положительно, если неравенство строгое) определенной.

Известно [18], что если $\alpha \geq 0$, то матрица A положительно определена, и ее спектр лежит в правой полуплоскости.

Рассмотрим случай, когда $\alpha < 0$. Отметим, что в случае регулярной области Ω, краевых условий 1-го рода и равномерной сетки собственные векторы и собственные числа разностного аналога оператора $L_h = -\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta_h + \alpha$ известны [8, 9] и имеют следующий вид:

$$\lambda_{mp}(L_h) = \frac{4}{\mathrm{Pe}\, h^2}\left(\sin^2\frac{m\pi h}{2} + \sin^2\frac{p\pi h}{2}\right) + \alpha, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1, \quad p = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\frac{2\pi^2}{\mathrm{Pe}} + \alpha \leq \lambda_i \leq \frac{8}{\mathrm{Pe}\, h^2} + \alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad N = (n-1)(n-1).$$

Следовательно, при $\alpha \leq -\frac{2\pi^2}{\mathrm{Pe}}$ разностный оператор, соответствующий членам диффузии и реакции, может терять свойство знакопостоянства в соответствии с теоремой Хирша [3], и его спектр частично смещается в левую полуплоскость. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Матрица СЛАУ* (6), *полученная из* (5) *при использовании естественного порядка перебора узлов сеточной области*, *является неотрицательной*, *если*

$$\alpha_{\mathrm{conv}} \geq -\frac{2\pi^2}{\mathrm{Pe}}.$$

Заметим, что при $\alpha < 0$ коэффициент $\alpha_{\mathrm{crit}} = -\frac{2}{h^2\mathrm{Pe}}$, попадающий на главную диагональ матрицы (см. (5)), может обращаться в ноль или приближаться к нулю, что может отрицательно сказаться на сходимости методов. Поэтому в численных экспериментах будет проверяться поведение итерационных методов в следующих случаях:

$$1)\ \alpha = 0; \qquad 2)\ \alpha_{\mathrm{crit}} = -\frac{2}{h^2\mathrm{Pe}}; \qquad 3)\ \alpha_{\mathrm{conv}} = -\frac{2\pi^2}{\mathrm{Pe}}.$$

3. Кососимметричные итерационные методы

Для решения СЛАУ (6) используется итерационный метод, записанный в следующей канонической форме [9]:

$$B(\omega)\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}+Ay_k=f, \tag{7}$$

где A, $B \in \mathrm{R}^{n\times n}$ — невырожденные матрицы, $y_k \in \mathrm{R}^n$ — k-е итерационное приближение, y_0 — начальное приближение, $f \in \mathrm{R}^n$ — вектор правой части, k — номер итерации, τ, $\omega \in \mathrm{R}$ — итерационные параметры.

Рассмотрим класс итерационных методов, предложенный в [6] и основанный на следующем разложении исходной матрицы:

- матрица A в (6) раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной матриц [4]:
$$A=A_0+A_1,\quad A_0=A_0^\top,\ A_1=-A_1^\top,$$
- кососимметричная матрица A_1 раскладывается на сумму K_U и K_L — строго верхней и строго нижней треугольных матриц соответственно:
$$A_1=K_\mathrm{U}+K_\mathrm{L}.$$

Класс кососимметричных треугольных итерационных методов (ТКМ) [6, 16], определяется (7) с матрицей

$$B(\omega)=B_\mathrm{c}+\omega((1+j)K_\mathrm{L}+(1-j)K_\mathrm{U}),\quad j=\pm1,\quad B_\mathrm{c}=B_\mathrm{c}^\top. \tag{8}$$

Класс кососимметричных попеременно-треугольных итерационных методов (ПТКМ) [12] определяется (7) с матрицей

$$B=(B_\mathrm{c}+\omega K_L)\,B_\mathrm{c}^{-1}\,(B_\mathrm{c}+\omega K_U)\,. \tag{9}$$

В (8) и (9) B_c — симметричная матрица, ω — действительный параметр. Запишем B из (8) и (9) в виде

$$B=B_0+B_1,\quad B_0=\frac{1}{2}\big(B+B^\top\big),\ B_1=\frac{1}{2}\big(B-B^\top\big),$$

где для ТКМ:

$$B_0=B_\mathrm{c}+\omega_j(K_\mathrm{L}-K_\mathrm{U}),\quad j=\pm1,$$

и для ПТКМ:

$$B_0=B_\mathrm{c}+\omega^2K_\mathrm{L}B_\mathrm{c}^{-1}K_\mathrm{U}. \tag{10}$$

Для обоих случаев выполняется равенство

$$B_1=\omega A_1,$$

являющееся основным для данного класса методов и показывающее, что кососимметричные части матриц A и B совпадают с точностью до параметра.

Ранее было показано [16, 19], что методы этого класса эффективно работают как сами, так и в качестве переобуславливателей для методов подпространства Крылова, если СЛАУ (6) положительно определена и строго несимметрична, т. е.

$$SSC=\|A_0\|\,/\,\|A_1\|\sim O(1),$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма.

В дальнейшем для решения СЛАУ будет использоваться метод ПТКМ, матрица перехода F которого имеет вид

$$F = B^{-1}(B - \tau A) = (B_0 + B_1)^{-1}(B_0 + B_1 - \tau A_0 - \tau A_1). \tag{11}$$

Введем оператор

$$L_0 = B_0 - \omega A_0,$$

где B_0 из (10), и потребуем, чтобы

$$L_0 = B_0 - \omega A_0 = L_0^{\top} > 0. \tag{12}$$

Очевидно, что оператор L_0 задает энергетическую норму $\|F\|_{L_0}$ и

$$\|F\|_{L_0} = \left\|(I + \omega P_0)^{-1}(I - (\tau - \omega)P_0)\right\|, \quad P_0 = L_0^{-1/2} A L_0^{-1/2}.$$

Теорема 2 [16]. *Метод ПТКМ* (7), (9) *сходится, если исходная матрица положительно определена, выполняются условия* (12) *и* $0 < \tau \le \omega$.

4. Численные эксперименты

Задачу (1)–(3), после аппроксимации на равномерной сетке центральными разностями при использовании натурального упорядочивания неизвестных, решаем численно с полями скоростей, взятыми из [13, 18]. Это позволит сравнить результаты расчетов с полученными ранее другими авторами. Аналитическое решение задачи (1)–(3) взято из [14]. Значения поля скоростей приведены в табл. 1. Компоненты скорости удовлетворяют условию (3) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (условие несжимаемости среды).

Таблица 1. Значения скоростей для тестовой задачи

№ задачи	v_1	v_2
1	1	-1
2	$1 - 2x$	$2y - 1$
3	$x + y$	$x - y$
4	$\sin 2\pi x$	$-2\pi y \cos 2\pi x$

Полученную СЛАУ решаем итерационным методом SSOR [21] и попеременно-треугольным кососимметричным методом (ПТКМ) [20]. Свойство исходной матрицы быть положительно определенной достаточно для сходимости ПТКМ [16]. В качестве начального приближения для обоих методов берется нулевой вектор. Критерием окончания итераций служит условие

$$\|r^m\| \,/\, \|r^0\| \le 10^{-6}, \tag{13}$$

где r^m — вектор невязки и $\|\cdot\|$ — Евклидова норма.

Численные эксперименты для каждой из четырех задач проведены в случаях:

1. $\alpha = 0$ (табл. 2);
2. Обращения в ноль диагонального элемента исходной матрицы $\alpha_{\text{crit}} = \frac{2}{h^2 \mathrm{Pe}}$ (табл. 3);
3. Для проверки выполнения условий теоремы 1 (табл. 4): $\alpha_{\text{conv}} \ge -\frac{2\pi^2}{\mathrm{Pe}}$.
4. Изменения коэффициента α в широком диапазоне отрицательных значений (табл. 5).

Таблица 2. Количество итераций при $\alpha = 0$

Pe	Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR
10^0	2803	182	2841	130	2826	99	2748	192
10^1	1029	59	2160	82	1437	52	932	42
10^2	83	68	322	44	181	97	93	144
10^3	77	113	50	106	66	107	68	157
10^4	565	863	297	565	279	632	369	1054
10^5	5196	6725	1990	3531	1694	4980	2538	7416

Таблица 3. Обращение диагонального элемента матрицы в ноль, н/с — нет сходимости, числа в столбцах — количество итераций методов

Pe	α_{crit}	Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
		ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR
10^0	-2048	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с
10^1	-204.8	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с
10^2	-20.48	281	77	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с	н/с
10^3	-2.048	239	297	н/с	н/с	667	2552	371	3036
10^4	-0.205	1564	1529	557	1755	611	1472	1088	3098
10^5	-0.020	11860	13787	3365	6254	3981	9375	5156	> 20000

Таблица 4. Выполнение условия теоремы 1 (значение α_{conv})

Pe	α_{conv}	Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
		ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR
10^0	-19.72	-20	-19	-20	-19	-20	-19	-20	-19
10^1	-1.97	-6	-6	-2	-2	-3	-4	-5	-6
10^2	-0.2	-30	-30	-2	-2	-4	-4	-12	-12
10^3	-0.02	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999
10^4	-0.002	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999
10^5	-0.0002	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999	> -999

Данные, приведенные в табл. 3, показывают, что при обращении диагонального элемента матрицы в ноль и преобладании в уравнении диффузии (числа $\text{Pe} < 10^2$) итерационные методы, как правило, перестают сходиться (в нашем случае сходимость есть лишь для задачи 1 при $\text{Pe} = 100$). Обращение диагонального элемента матрицы в ноль α_{crit} коррелирует с условием на α_{conv}. Для задач 1–4 и чисел Пекле, меньших 10, сходимости нет у обоих методов, так как $\alpha_{\text{crit}} > \alpha_{\text{conv}}$. По этой же причине методы не работают при числах Пекле, равных 100, для задач 2–4. Для задачи 1 методы работают, так как полученное в экспериментах $\alpha_{\text{conv}} > \alpha_{\text{crit}}$. Вместе с тем в случае преобладания конвекции ($\text{Pe} \geq 10^3$) сходимость методов (за исключением задачи 2 при $\text{Pe} = 1000$) есть, хотя и не очень быстрая. Отсутствие сходимости методов для задачи 2 при числе Пекле, равном 1000, пока объяснения не нашло. Поведение методов в данной критической ситуации требует дальнейших исследований, которые планируются выполнить в дальнейшем.

Данные расчетов при $\alpha = 0$ показывают, что ПТКМ работает эффективно при больших числах Пекле и неконкурентоспособен для задач с доминированием диффузии. SSOR ведет себя прямо противоположным образом — он эффективен для задач с преобладанием диффузии и сильно проигрывает ПТКМ для задач с преобладанием конвекции.

Проверка работоспособности и эффективности методов при различных отрицательных значениях α (табл. 5) показала, что методы становятся очень эффективными при числах $\alpha < -100$, так как в матрице системы появляется сильное диагональное преобладание. Это связано с наличием на главной диагонали матрицы члена $a_1 = (4 + \alpha \mathrm{Pe}\, h^2)$, полученного при аппроксимации коэффициента реакции. В этот коэффициент входят числа α и Re_h, растущие по модулю α и при увеличивающимся сеточным числе Рейнольдса. Во всех остальных случаях преобладания конвекции и приближения α_{conv} к нулю, условия теоремы 1 перестают играть решающую роль.

Таблица 5. Количество итераций при различных α

Pe	Задача 1		Задача 2		Задача 3		Задача 4	
	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR	ПТКМ	SSOR
$\alpha = 0$								
10^3	77	113	50	106	66	107	68	157
10^4	565	863	297	565	279	632	369	1054
10^5	5196	6725	1990	3531	1694	4980	2538	7416
$\alpha = -10$								
10^3	51	72	31	37	45	54	59	108
10^4	32	41	22	23	33	34	33	65
10^5	30	41	23	23	32	33	32	65
$\alpha = -100$								
10^3	7	5	9	6	9	7	12	13
10^4	7	5	9	6	9	7	12	13
10^5	7	5	9	6	9	7	12	13
$\alpha = -1000$								
10^3	5	3	6	3	5	3	7	4
10^4	5	3	6	3	5	3	7	4
10^5	5	3	6	3	5	3	7	4
$\alpha = -5000$								
10^3	5	2	4	3	4	3	6	3
10^4	5	2	4	3	4	3	6	3
10^5	5	2	4	3	4	3	6	3
$\alpha = -10000$								
10^3	4	2	4	3	4	3	5	3
10^4	4	2	4	3	4	3	5	3
10^5	4	2	4	3	4	3	5	3

5. Выводы

Поведение итерационных методов решения СЛАУ, полученных при аппроксимации уравнения конвекции–диффузии, при доминировании конвекции [18] существенно отличается (табл. 5) от поведения тех же методов при решении аналогичных задач для уравнения конвекции–диффузии–реакции при доминировании конвекции, но с большими (по модулю) коэффициентами реакции. Очевидно, в матрице системы появляется строгое диагональное преобладание, и методы работают достаточно эффективно при больших значениях отрицательного коэффициента реакции, несмотря на доминирование конвекции. В данной работе в полном объеме не представлены результаты исследований матриц, потерявших свойство диагонального преобладания. В некоторых частных случаях ответ можно найти в данных, приведенных в табл. 3. Исследованию этого случая будет посвящена отдельная работа, показывающая поведение методов и свойства матриц при значениях параметров задачи, близких к критическим. Предварительно можно сказать, что поведение итерационных методов и свойства матриц связаны со значениями скоростей течений и сеточным числом Рейнольдса.

Литература

1. **Вабищевич П.Н., Васильева М.В.** Явно-неявные схемы для задач конвекции–диффузии–реакции // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.—Новосибирск, 2012.—Т. 15, № 4.—С. 359–369.
2. **Виноградова С.А., Крукиер Л.А.** Использование метода неполного LU-разложения при моделировании конвективно-диффузионных процессов в анизотропной среде // Математическое моделирование.—2012.—Т. 24, № 9.—С. 125–136.
3. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления.—М.: Наука, 1984.
4. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.—М.: Наука, 1967.
5. **Крукиер Л.А., Мартынова Т.С.** Влияние формы записи уравнения конвекции–диффузии на сходимость метода верхней релаксации // ЖВМ и МФ.—1999.—Т. 39, № 11.—С. 1821–1827.
6. **Крукиер Л.А.** Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений // Изв. ВУЗов. Математика.—1979.—Т. 7.—С. 41–52.
7. **Марчук Г.И.** Численные методы и прогноз погоды.—Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
8. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики.—Новосибирск: Наука, 1973.
9. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений.—М.: Наука, 1978.
10. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения задач конвекции-диффузии.—М.: Эдиториал УРСС, 1999.
11. **Шишкин Г.И.** Первая краевая задача для уравнения второго порядка с малыми параметрами при производных // Дифф. уравнения.—1977.—Т. 13, № 2.—С. 376–378.
12. **Botchev M.A., Krukier L.A.** Iterative solution of strongly nonsymmetric systems of linear algebraic equations // J. Comp. Math. Math. Physics.—1997.—Vol. 37, № 11.—P. 1241–1251.
13. **Elman H.C.** Relaxed and stabilized incomplete factorizations for nonself-adjoint linear systems // BIT (Dan.).—1989.—Vol. 29, № 4.—P. 890–915.
14. **Elman H.C., Golub G.H.** Line iterative methods for cyclically reduced discrete convection-diffusion problems // SIAM J. Sci. Stat. Comput.—1992.—Vol. 13, № 1.—P. 339–363.
15. **Johnson C.R., Krukier L.A.** General resolution of a convergence question of L. Krukier // Numerical Linear Algebra with Applications.—2009.—Vol. 16, № 11.—P. 949–950.
16. **Krukier L.A.** Convergence acceleration of triangular iterative methods based on the skew-symmetric part of the matrix // Appl. Numer. Math.—1999.—Vol. 30.—P. 281–290.
17. **Krukier B.L., Krukier L.A.** Using the skew-symmetric iterative methods for solution of an indefinite nonsymmetric linear systems // J. Comp. Math.—2014.—Vol. 32, № 3.—P. 266–271.
18. **Krukier L.A., Pichugina O.A., and Krukier B.L.** Numerical solution of the steady convection-diffusion equation with dominant convection // Procedia Computer Science.—2013.—Vol. 18.—P. 2095–2100.
19. **Krukier L.A., Chikina L.G., and Belokon T.V.** Triangular skew-symmetric iterative solvers for strongly nonsymmetric positive real linear system of equations // Appl. Numer. Math.—2002.—Vol. 41.—P. 89–105.

20. **Krukier L.A., Martinova T.S., and Bai Z.Z.** Product-type skew-hermitian triangular splitting iteration methods for strongly non-hermitian positive definite linear systems // J. Comput. and Appl. Math. — 2009. — Vol. 232, № 1. — P. 3–16.
21. **Meurant G.** Computer Solutions of Large Linear Systems. — Amsterdam: Elsevier Science, 1999.
22. **Morton K.W.** Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. — NY.: Chapman and Hall, 1996.
23. **Zhang J.** Preconditioned iterative methods and finite difference schemes for convection-diffusion // Appl. Math. & Comp. — 2000. — Vol. 109. — P. 11–30.

Поступила в редакцию 23 декабря 2014 г.,
в окончательном варианте 25 марта 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Vabishchevich P.N., Vasil'eva M.V.** Yavno-neyavnye skhemy dlya zadach konvektsii–diffuzii–reaktsii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2012. — T. 15, № 4. — C. 359–369.
2. **Vinogradova S.A., Krukier L.A.** Ispol'zovanie metoda nepolnogo LU-razlozheniya pri modelirovanii konvektivno-diffuzionnykh protsessov v anizotropnoy srede // Matematicheskoe modelirovanie. — 2012. — T. 24, № 9. — C. 125–136.
3. **Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A.** Matritsy i vychisleniya. — M.: Nauka, 1984.
4. **Gantmakher F.R.** Teoriya matrits. — M.: Nauka, 1967.
5. **Krukier L.A., Martynova T.S.** Vliyanie formy zapisi uravneniya konvektsii–diffuzii na skhodimost' metoda verkhney relaksatsii // ZhVM i MF. — 1999. — T. 39, № 11. — C. 1821–1827.
6. **Krukier L.A.** Neyavnye raznostnye skhemy i iteratsionnyy metod ikh resheniya dlya odnogo klassa sistem kvazilineynykh uravneniy // Izv. VUZov. Matematika. — 1979. — T. 7. — S. 41–52.
7. **Marchuk G.I.** Chislennye metody i prognoz pogody. — L.: Gidrometeoizdat, 1967.
8. **Marchuk G.I.** Metody vychislitel'noy matematiki. — Novosibirsk: Nauka, 1973.
9. **Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.** Metody resheniya setochnykh uravneniy. — M.: Nauka, 1978.
10. **Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N.** Chislennye metody resheniya zadach konvektsii-diffuzii. — M.: Editorial URSS, 1999.
11. **Shishkin G.I.** Pervaya kraevaya zadacha dlya uravneniya vtorogo poryadka s malymi parametrami pri proizvodnykh // Diff. uravneniya. — 1977. — T. 13, № 2. — S. 376–378.
12. **Botchev M.A., Krukier L.A.** Iterative solution of strongly nonsymmetric systems of linear algebraic equations // J. Comp. Math. Math. Physics. — 1997. — Vol. 37, № 11. — P. 1241–1251.
13. **Elman H.C.** Relaxed and stabilized incomplete factorizations for nonself-adjoint linear systems // BIT (Dan.). — 1989. — Vol. 29, № 4. — P. 890–915.
14. **Elman H.C., Golub G.H.** Line iterative methods for cyclically reduced discrete convection-diffusion problems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1992. — Vol. 13, № 1. — P. 339–363.
15. **Johnson C.R., Krukier L.A.** General resolution of a convergence question of L. Krukier // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2009. — Vol. 16, № 11. — P. 949–950.
16. **Krukier L.A.** Convergence acceleration of triangular iterative methods based on the skew-symmetric part of the matrix // Appl. Numer. Math. — 1999. — Vol. 30. — P. 281–290.
17. **Krukier B.L., Krukier L.A.** Using the skew-symmetric iterative methods for solution of an indefinite nonsymmetric linear systems // J. Comp. Math. — 2014. — Vol. 32, № 3. — P. 266–271.

18. **Krukier L.A., Pichugina O.A., and Krukier B.L.** Numerical solution of the steady convection-diffusion equation with dominant convection // Procedia Computer Science. — 2013. — Vol. 18. — P. 2095–2100.

19. **Krukier L.A., Chikina L.G., and Belokon T.V.** Triangular skew-symmetric iterative solvers for strongly nonsymmetric positive real linear system of equations // Appl. Numer. Math. — 2002. — Vol. 41. — P. 89–105.

20. **Krukier L.A., Martinova T.S., and Bai Z.Z.** Product-type skew-hermitian triangular splitting iteration methods for strongly non-hermitian positive definite linear systems // J. Comput. and Appl. Math. — 2009. — Vol. 232, № 1. — P. 3–16.

21. **Meurant G.** Computer Solutions of Large Linear Systems. — Amsterdam: Elsevier Science, 1999.

22. **Morton K.W.** Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. — NY.: Chapman and Hall, 1996.

23. **Zhang J.** Preconditioned iterative methods and finite difference schemes for convection-diffusion // Appl. Math. & Comp. — 2000. — Vol. 109. — P. 11–30.