

УДК 539.6

РАЗРУШЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО СОСУДА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ ОРТОТРОПНОГО ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

Ц. Чжэн, Я. Ху*

Центр экспериментального и междисциплинарного исследования гипергравитации
Чжэцзянского университета, 310058 Ханчжоу, Китай

* Колледж компьютерных наук и технологий Чжэцзянского технического университета,
310023 Ханчжоу, Китай

E-mails: zhengjianjing@zju.edu.cn, huyahong@zjut.edu.cn

С использованием теории Хилла анизотропного материала получено аналитическое выражение для предельного давления и соответствующих эквивалентных напряжений и деформаций толстостенного сферического сосуда. Сосуд изготовлен из пластически ортотропного материала. При построении решения учитываются деформационное упрочнение материала и большие деформации. Исследуется влияние пластической ортотропии, деформационного упрочнения, отношения внешнего радиуса сосуда к внутреннему и внешнего давления на величину предельного давления. Установлено, что от внешнего давления зависит предельное давление и не зависят соответствующие эквивалентные напряжения и деформации.

Ключевые слова: толстостенный сферический сосуд, разрывающее (предельное) давление, пластическая ортотропия, пластическое разрушение.

DOI: 10.15372/PMTF20200617

Введение. Сферические сосуды высокого давления используются во многих отраслях промышленности (нефтехимической, самолето- и кораблестроении и др.) для хранения газообразных и жидких веществ. Поскольку такие сосуды часто применяются для хранения легковоспламеняющихся, взрывоопасных и токсичных веществ, необходимо обеспечить их сохранность в процессе эксплуатации. Следовательно, требуется определить значение давления, при котором сосуды высокого давления могут разрушиться.

Под давлением, при котором происходит разрушение сосуда, обычно понимается предельное (максимальное) давление, которое достигается в процессе его пластического деформирования под действием давления. Определению предельного давления для сферических сосудов, находящихся под действием внутреннего давления, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ [1–10]. В [11] с использованием критерия текучести Мизеса и теории пластической неустойчивости получено выражение

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 51988101), фондов фундаментальных исследований центральных университетов (гранты № 2019QNA4034, 2019QNA4035) и в рамках Национальной основной программы исследований и разработок Китая (грант № 2016YFC0701309).

для разрушающего давления для толстостенного сферического сосуда, изготовленного из материала, обладающего деформационным упрочнением. В работах [12, 13] максимальное давление тонкостенного сферического сосуда, находящегося под действием внутреннего давления, рассматривалось как давление, при котором возникает пластическая неустойчивость, обусловленная растяжением материала, и получено аналитическое выражение для величины такого давления. В [14–16] развиты численные методы определения предельных нагрузок для осесимметричных сосудов высокого давления. Отмечено, что определенное таким образом давление является верхней оценкой давления, при котором происходит разрушение сосуда. Пластическая неустойчивость тонкостенных сферических сосудов, находящихся под действием статических и динамических нагрузок, исследовалась в работах [17, 18]. В [19] получено аналитическое решение задачи о деформировании под действием внутреннего давления сферического сосуда, изготовленного из упругопластического материала, обладающего линейным деформационным упрочнением. В [20] получено аналитическое решение упругопластической задачи о деформировании с учетом больших деформаций толстостенного сферического сосуда, изготовленного из материалов, обладающих линейным и нелинейным деформационным упрочнением. Распределение напряжений и деформаций в толстостенных сферических оболочках, находящихся под действием внешнего давления, изучено в [21]. С использованием критериев текучести Треска и Мизеса в работе [22] предложен метод оценки оптимальных предварительных напряжений и толщины стенки толстостенного сферического сосуда, находящегося под действием внутреннего давления. С использованием единой теории прочности и с учетом среднего главного напряжения в [23] получено выражение для давления, при котором происходит разрушение тонкостенной оболочки, изготовленной из материала, имеющего различные пределы прочности при растяжении и сжатии. В работе [24] рассматривалась задача о неустойчивости сферической оболочки из гиперупругого материала.

Следует отметить, что в указанных выше работах не учитывалось влияние анизотропии на механические свойства материала оболочек. Однако материал реальных оболочек может обладать пластической анизотропией. В [25] с учетом пластической анизотропии материала получено аналитическое выражение для давления, при котором происходит разрыв длинной тонкостенной трубки с закрытыми торцами под действием внутреннего и внешнего давления.

В данной работе с учетом больших деформаций и пластической анизотропии материала, обладающего деформационным упрочнением, рассматривается задача о разрушении толстостенного сферического сосуда под действием внутреннего и внешнего давления, выводятся аналитические выражения для предельного давления и соответствующих эквивалентных напряжений и деформаций. Исследуется влияние пластической ортотропии, деформационного упрочнения, отношения внешнего радиуса оболочки к внутреннему и внешнего давления на величину предельного давления и величины эквивалентных напряжений и деформаций.

1. Уравнения задачи. Рассмотрим толстостенный сферический сосуд, находящийся под действием внутреннего и внешнего давления. Сосуд изготовлен из материала, обладающего пластической ортотропией. Внутренний и внешний радиусы сосуда обозначены через R_{in} и R_{out} соответственно. До момента разрушения пластические материалы испытывают большие пластические деформации. Зависимость напряжений от деформаций при одноосном деформировании таких материалов может быть описана соотношением Людви́ка [11]

$$\sigma = K \varepsilon^n, \quad (1)$$

где σ , ε — истинные напряжения и деформации соответственно; K — коэффициент жесткости; n — показатель деформационного упрочнения.

Следует отметить, что при построении экспериментальной зависимости $\sigma \sim \varepsilon$ при одноосном растяжении, как правило, используются номинальные напряжения σ' и инженерные деформации ε' . Полагая, что деформирование происходит при постоянном объеме, получаем

$$\varepsilon = \ln(1 + \varepsilon'), \quad \sigma = \sigma'(1 + \varepsilon').$$

2. Определение предельного давления. Ниже выводятся выражения для давления, при котором происходит разрушение толстостенного сосуда, изготовленного из материала, обладающего пластической ортотропией. Согласно теории материалов с ортогональной анизотропией [26] в случае толстостенного сферического сосуда выражение для эквивалентного напряжения записывается в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{F(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + G(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + H(\sigma_\varphi - \sigma_\theta)^2}{F + G + H} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где σ_r — радиальное главное напряжение; $\sigma_\theta, \sigma_\varphi$ — тангенциальные главные напряжения; F, G, H — параметры ортотропии.

В случае пропорционального нагружения выражение для соответствующей эквивалентной деформации имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} (F + G + H)^{1/2} \left(\frac{F(G\varepsilon_\theta - H\varepsilon_r)^2 + G(H\varepsilon_r - F\varepsilon_\varphi)^2 + H(F\varepsilon_\varphi - G\varepsilon_\theta)^2}{(FG + GH + HF)^2} \right)^{1/2} \quad (3)$$

($\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$ — главные деформации).

В случае сферической симметрии уравнение равновесия с учетом больших деформаций записывается в виде [11]

$$\frac{r + u}{2} \frac{d\sigma_r}{d(r + u)} = \sigma_\theta - \sigma_r, \quad (4)$$

где $r, u, r + u$ — начальная радиальная координата точки, ее смещение и текущая радиальная координата соответственно.

Формула для деформаций, выраженных через смещение, и уравнение совместности деформаций имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \ln(1 + du/dr); \\ \varepsilon_\theta &= \ln(1 + u/r); \end{aligned} \quad (5)$$

$$(r + u) \frac{d\varepsilon_\theta}{d(r + u)} = 1 - e^{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}. \quad (6)$$

Безразмерные параметры r_φ и r_θ :

$$r_\varphi = H/G, \quad r_\theta = H/F \quad (7)$$

определяют свойства анизотропии материала в двух взаимно ортогональных направлениях на сферической поверхности. Эти параметры можно определить в экспериментах на растяжение образцов, вырезанных в соответствующих направлениях.

В силу сферической симметрии задачи

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi; \quad (8)$$

$$F = G;$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi. \quad (9)$$

Следовательно, из уравнений (7) находим

$$r_\varphi = r_\theta = H/G = H/F = R. \quad (10)$$

Из (2), (10) следует

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{R(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2}{2 + R} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

из (3), (10) получаем

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2(2 + R)}{3}} \frac{[(\varepsilon_\theta - R\varepsilon_r)^2 + (R\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + R(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\theta)^2]^{1/2}}{1 + 2R}. \quad (12)$$

С учетом (9), (11) выражение для эквивалентного напряжения можно упростить:

$$\sigma = \sqrt{3/(2 + R)} (\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (13)$$

В случае конечных пластических деформаций условие несжимаемости материала записывается в виде

$$\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 0. \quad (14)$$

Из уравнений (8) и (14) следует

$$\varepsilon_r = -2\varepsilon_\theta. \quad (15)$$

С учетом уравнений (8), (12), (15) получаем

$$\varepsilon = 2\sqrt{(2 + R)/3} \varepsilon_\theta. \quad (16)$$

Вводя безразмерную переменную x :

$$x = (r + u)/R_{in},$$

с учетом (15) уравнение совместности деформаций (6) можно представить в следующем виде:

$$x \frac{d\varepsilon_\theta}{dx} = 1 - e^{3\varepsilon_\theta}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^3}{x^3 + c} \right), \quad (17)$$

где c — постоянная интегрирования. Из (5) находим выражение для деформации ε_θ на внутренней поверхности сосуда

$$\varepsilon_{\theta in} = \ln x_{in}, \quad (18)$$

где $x_{in} = (R_{in} + u_{in})/R_{in}$; u_{in} — радиальное смещение на внутренней поверхности ($r = R_{in}$). С учетом (18) из (17) получаем

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^3}{x^3 - x_{in}^3 + 1} \right). \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (16), имеем выражение для эквивалентной деформации в виде

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \eta \ln \left(\frac{x^3}{x^3 - x_{in}^3 + 1} \right), \quad (20)$$

где $\eta = \sqrt{(2 + R)/3}$.

В силу несжимаемости объем материала сосуда до деформации равен его объему после деформации:

$$(4/3)\pi[(R_{out} + u_{out})^3 - (R_{in} + u_{in})^3] = (4/3)\pi(R_{out}^3 - R_{in}^3). \quad (21)$$

Здесь u_{out} — смещение внешней поверхности ($r = R_{out}$).

Из (21) следует

$$x_{out}^3 - x_{in}^3 = \varkappa^3 - 1, \quad (22)$$

где $x_{out} = (R_{out} + u_{out})/R_{in}$; $\varkappa = R_{out}/R_{in}$.

С учетом (20), (22) получаем выражения для эквивалентной деформации на внутренней и внешней поверхностях:

$$\varepsilon_{in} = 2\eta \ln x_{in}; \quad (23)$$

$$\varepsilon_{out} = \frac{2\eta}{3} \ln \left(1 - \frac{1 - e^{3\varepsilon_{in}/(2\eta)}}{\varkappa^3} \right). \quad (24)$$

Подставляя (23), (24) в (1), находим выражения для эквивалентного напряжения на внутренней и внешней поверхностях:

$$\sigma_{in} = K\varepsilon_{in}^n = K(2\eta \ln x_{in})^n, \quad \sigma_{out} = K\varepsilon_{out}^n = K \left[\frac{2\eta}{3} \ln \left(1 - \frac{1 - e^{3\varepsilon_{in}/(2\eta)}}{\varkappa^3} \right) \right]^n. \quad (25)$$

В соответствии с [11] параметр K определяется по формуле

$$K = \frac{\sigma_u}{n^n} = \left(\frac{e}{n} \right)^n \sigma'_u, \quad (26)$$

где σ_u, σ'_u — истинное и номинальное временные сопротивления при растяжении соответственно.

При $R = 1$ получаем выражения для эквивалентных напряжения и деформации без учета пластической анизотропии [11]:

$$\varepsilon_{in} = 2 \ln x_{in}, \quad \varepsilon_{out} = \frac{2}{3} \ln \left(1 - \frac{e^{3\varepsilon_{in}/2}}{\varkappa^3} \right),$$

$$\sigma_{in} = \left(\frac{e}{n} \right)^n (2 \ln x_{in})^n \sigma'_u, \quad \sigma_{out} = \left(\frac{e}{n} \right)^n \left[\frac{2}{3} \ln \left(1 - \frac{e^{3\varepsilon_{in}/2}}{\varkappa^3} \right) \right]^n \sigma'_u.$$

Из (4), (6), (13), (16) следует

$$\frac{d\sigma_r}{d\varepsilon} = \frac{\sigma}{1 - e^{3\varepsilon/(2\eta)}}. \quad (27)$$

Подставляя (1) в (27) и учитывая краевые условия $\sigma_r = -P$, $\varepsilon = \varepsilon_{in}$ на внутренней поверхности и $\sigma_r = -\alpha P$, $\varepsilon = \varepsilon_{out}$ на внешней поверхности, находим уравнение, после интегрирования которого имеем выражение для давления

$$P = \frac{K}{1 - \alpha} \int_{\varepsilon_{in}}^{\varepsilon_{out}} \frac{\varepsilon^n}{1 - e^{3\varepsilon/(2\eta)}} d\varepsilon. \quad (28)$$

С учетом (26) выражение (28) для давления принимает следующий вид:

$$P = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{e}{n} \right)^n \sigma'_u \int_{\varepsilon_{in}}^{\varepsilon_{out}} \frac{\varepsilon^n}{1 - e^{3\varepsilon/(2\eta)}} d\varepsilon. \quad (29)$$

Пренебрегая пластической ортотропией ($R = 1$) и считая внешнее давление равным нулю ($\alpha = 0$), из (29) получаем решение [11]:

$$P = \left(\frac{e}{n}\right)^n \sigma'_u \int_{\varepsilon_{in}}^{\varepsilon_{out}} \frac{\varepsilon^n}{1 - e^{3\varepsilon/2}} d\varepsilon.$$

Из (24), (29) следует, что эквивалентная деформация на внешней поверхности сосуда ε_{out} и давление P являются функциями ε_{in} . В точке пластической неустойчивости давление P достигает максимального значения. Следовательно, давление P_b , при котором наступает пластическая неустойчивость, определяется из условия $\partial P / \partial \varepsilon_{in} = 0$.

3. Результаты численных расчетов и их обсуждение. Эквивалентная деформация на внутренней поверхности сосуда ε_{in} при предельном значении давления может быть определена из условия пластической неустойчивости $\partial P / \partial \varepsilon_{in} = 0$. Эта деформация не зависит от внешнего давления. Подставляя выражение для ε_{in} в (24), получаем выражение для ε_{out} — эквивалентной деформации на внешней поверхности в момент разрушения. Подставляя выражения для ε_{in} , ε_{out} в (29) и интегрируя полученное уравнение, находим выражение для давления P_b . Выражения для соответствующих эквивалентных напряжений σ_{in} , σ_{out} в момент разрушения можно получить, подставив выражения для ε_{in} , ε_{out} в первое и второе выражения (25) соответственно. Так как эквивалентная деформация ε_{in} не зависит от внешнего давления, то согласно уравнениям (23)–(25) эквивалентная деформация ε_{out} и эквивалентные напряжения σ_{in} , σ_{out} в момент достижения предельного давления также не зависят от внешнего давления.

Давление P_b , при котором возникает пластическая неустойчивость (разрушение толстостенного сферического сосуда), зависит от внешнего давления и параметров пластического материала сосуда (рис. 1). Давление P_b увеличивается с увеличением внешнего давления и параметра пластической анизотропии материала R . При $P = P_b$ эквивалентные деформации и напряжения на внутренней и внешней поверхностях сосуда увеличиваются с увеличением параметра R (рис. 2, 3).

С увеличением показателя n в законе деформационного упрочнения давление P_b уменьшается (рис. 4). При $P = P_b$ эквивалентные деформации и напряжения на внутренней и внешней поверхностях увеличиваются при увеличении показателя n (рис. 5, 6).

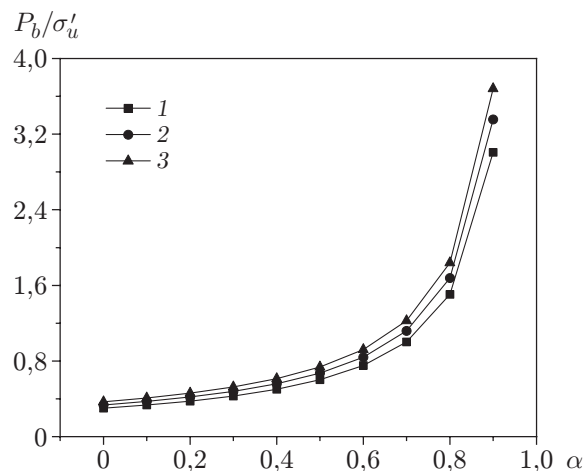


Рис. 1. Зависимость критического давления от параметра α при $n = 1,2$, $n = 0,2$ и различных значениях параметра R :
1 — $R = 0,5$, 2 — $R = 1,0$, 3 — $R = 1,5$

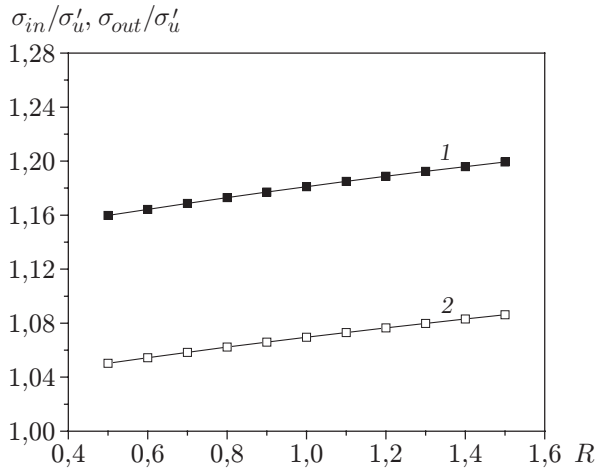


Рис. 2

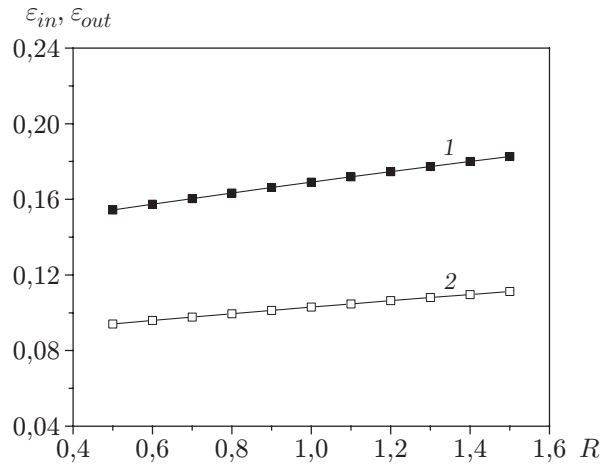


Рис. 3

Рис. 2. Зависимости эквивалентных напряжений σ_{in}/σ'_u (1) и σ_{out}/σ'_u (2) от параметра R при $\kappa = 1,2$, $n = 0,2$, $P = P_b$

Рис. 3. Зависимости эквивалентных деформаций ϵ_{in} (1) и ϵ_{out} (2) от параметра R при $\kappa = 1,2$, $n = 0,2$, $P = P_b$

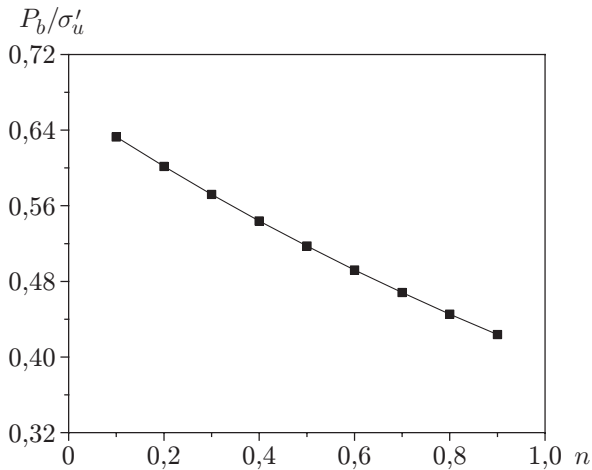


Рис. 4

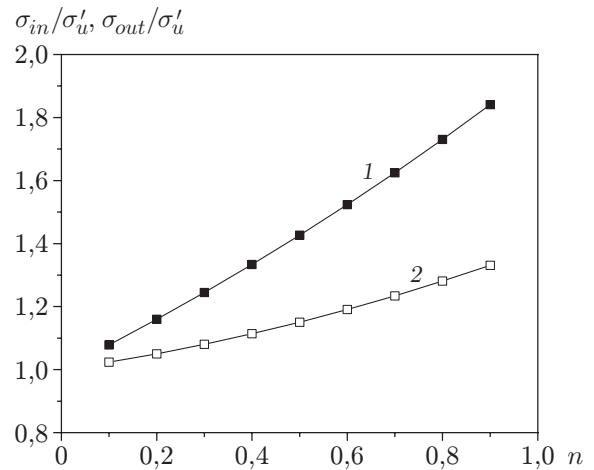


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость критического давления от показателя n при $\kappa = 1,2$, $\alpha = 0,5$, $R = 0,5$

Рис. 5. Зависимости эквивалентных напряжений σ_{in}/σ'_u (1) и σ_{out}/σ'_u (2) от показателя n при $\kappa = 1,2$, $R = 0,5$, $P = P_b$

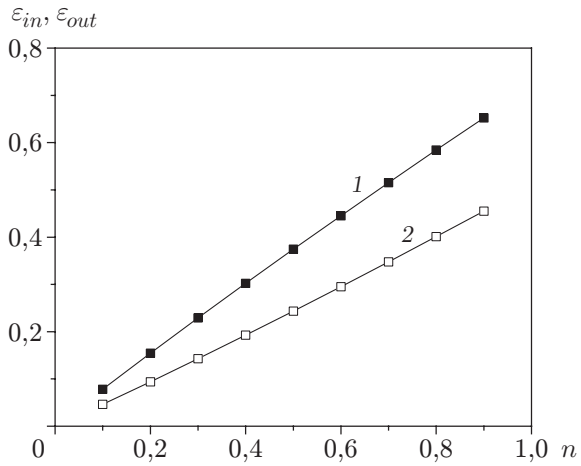


Рис. 6

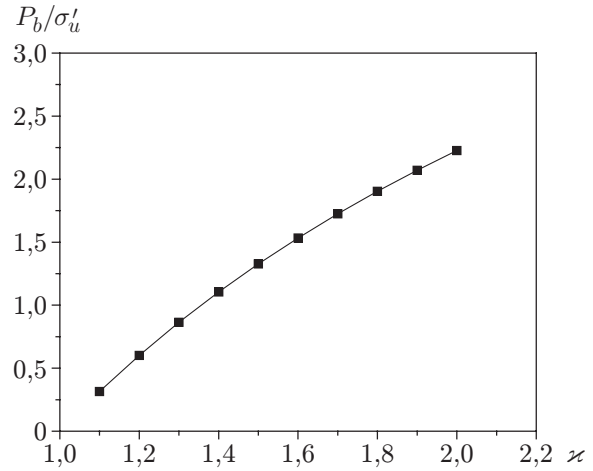


Рис. 7

Рис. 6. Зависимости эквивалентных деформаций ε_{in} (1) и ε_{out} (2) от показателя n при $\kappa = 1,2$, $R = 0,5$, $P = P_b$

Рис. 7. Зависимость критического давления P_b от параметра κ при $n = 0,2$, $\alpha = 0,5$, $R = 0,5$

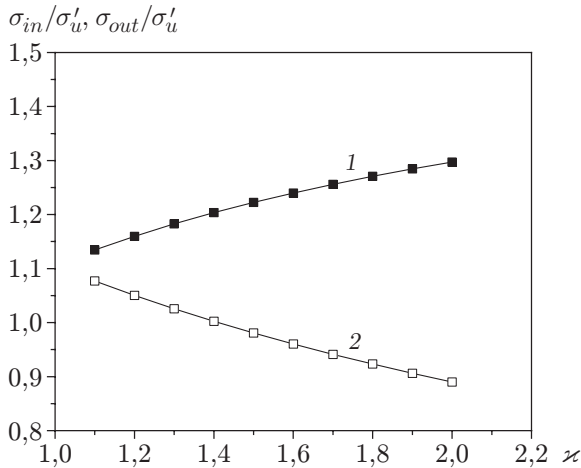


Рис. 8

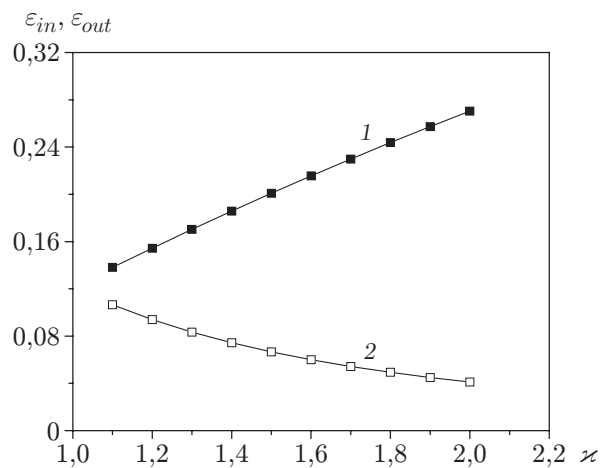


Рис. 9

Рис. 8. Зависимости эквивалентных напряжений σ_{in}/σ'_u (1) и σ_{out}/σ'_u (2) от параметра κ при $n = 0,2$, $R = 0,5$, $P = P_b$

Рис. 9. Зависимости эквивалентных деформаций ε_{in} (1) и ε_{out} (2) от параметра κ при $n = 0,2$, $R = 0,5$, $P = P_b$

С увеличением параметра κ давление P_b увеличивается (рис. 7). При $P = P_b$ с увеличением параметра κ эквивалентные деформации и напряжения на внутренней поверхности сферического сосуда увеличиваются, а на внешней уменьшаются (рис. 8, 9).

Заключение. Получено выражение для давления, при котором начинается разрушение толстостенного сферического сосуда, находящегося под действием внутреннего и внешнего давления. Задача решена с использованием теории ортогональной анизотропии (теории Хилла) и с учетом больших деформаций. Предельное давление зависит от отношения внутреннего и внешнего радиусов сосуда, показателя степени в законе деформационного упрочнения, соотношения внутреннего и внешнего давления и параметров анизотропии. Получены выражения для эквивалентных напряжений и деформаций в момент достижения предельного значения давления. Установлено, что в момент достижения предельного давления эквивалентные напряжения и деформации не зависят от внешнего давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Partom Y.** Large elastoplastic deformation of a thick-walled spherical shell // Intern. J. Non-Linear Mech. 1970. V. 5, N 3. P. 475–490.
2. **Wang A. S. D., Ertepinar A.** Stability and vibrations of elastic thick-walled cylindrical and spherical shells subjected to pressure // Intern. J. Non-Linear Mech. 1972. V. 7, N 5. P. 539–555.
3. **Goodall I. W., Griffiths J. E.** On the limit analysis of a spherical pressure vessel with fully circumferential defects // Intern. J. Mech. Sci. 1982. V. 24, N 10. P. 635–645.
4. **Belov A. I., Kornilo V. A., Klapovskii V. E., et al.** Comparative investigation of the elastic reaction of cylindrical and spherical shells under internal explosive loading // Combust. Explos. Shock Waves. 1990. V. 26, N 3. P. 354–357.
5. **Haghi M., Anand L.** Analysis of strain-hardening viscoplastic thick-walled sphere and cylinder under external pressure // Intern. J. Plasticity. 1991. V. 7, N 3. P. 123–140.
6. **Kalnins A., Updike D. P.** Limit pressures of cylindrical and spherical shells // J. Pressure Vessel Technol. 2001. V. 123, N 3. P. 288–292.
7. **Gao X. L.** Strain gradient plasticity solution for an internally pressurized thick-walled spherical shell of an elastic-plastic material // Mech. Res. Comm. 2003. V. 30, N 5. P. 411–420.
8. **You L. H., Zhang J. J., You X. Y.** Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2005. V. 82, N 5. P. 347–354.
9. **Gao X. L.** Strain gradient plasticity solution for an internally pressurized thick-walled spherical shell of an elastic linear-hardening material // Mech. Adv. Materials Structures. 2006. V. 13, N 1. P. 43–49.
10. **Saidi A. R., Atashipour S. R., Jomehzadeh E.** Exact elasticity solutions for thick-walled FG spherical pressure vessels with linearly and exponentially varying properties // Intern. J. Engng. 2009. V. 22, N 4. P. 405–416.
11. **Svensson N. L.** The bursting pressure of cylindrical and spherical vessels // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1958. V. 25. P. 89–96.
12. **Johnson W.** Engineering plasticity / W. Johnson, P. B. Mellor. Chichester: Ellis Horwood, 1983.
13. **Mellor P. B.** Tensile instability in thin-walled tubes // J. Mech. Engng Sci. 1962. V. 4, N 3. P. 251–256.
14. **Updike D. P., Kalnins A.** Burst by tensile plastic instability of vessels with torispherical heads // Proc. of the 1994 Pressure vessels and piping conf., Minneapolis (USA), 19–23 Jun. 1994. N. Y.: ASME, 1994. P. 89–94. (Recertification and stress classification issues; V. 277).

15. **Urdike D. P., Kalnins A.** Ultimate load analysis for design of pressure vessels // Proc. of the 1997 Pressure vessels and piping conf. N. Y.: ASME, 1997. P. 289–293. (Pressure vessels and piping division; V. 353).
16. **Urdike D. P., Kalnins A.** Tensile plastic instability axisymmetric pressure vessels // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1998. V. 120, N 1. P. 6–11.
17. **Duffey T. A., Doyle D.** Plastic instabilities in spherical shells under load, displacement, and impulsive loading // Proc. of the 2006 Pressure vessels and piping conf., Vancouver (Canada), July 23–27, 2006. N. Y.: ASME, 2006. P. 99–110. (Pressure vessels and piping division; V. 5).
18. **Duffey T. A.** Plastic instabilities in spherical vessels for static and dynamic loading // J. Pressure Vessel Technol. 2011. V. 133, N 5. P. 1–6.
19. **Gao X.** An exact elasto-plastic solution for a thick-walled spherical shell of elastic linear-hardening material with finite deformations // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 1994. V. 57, N 1. P. 45–56.
20. **Darijani H., Naghdabadi R., Shamsaei N., et al.** Elastoplastic stress study in thick-walled spherical vessels considering finite deformation // Proc. of ASME the 8th Biennial conf. on engineering systems design and analysis, Torino (Italy), July 4–7, 2006. S. 1., 2006. P. 475–482.
21. **Borisov A. V.** Elastic analysis of multilayered thick-walled spheres under external load // Mechanika. 2010. V. 4, N 84. P. 28–32.
22. **Kargarnovin M. H., Darijani H., Naghdabadi R.** Evaluation of the optimum pre-stressing pressure and wall thickness determination of thick-walled spherical vessels under internal pressure // J. Franklin Inst. 2007. V. 344, N 5. P. 439–451.
23. **Yan L., Junhai Z., Ergang X., et al.** Research on burst pressure for thin-walled elbow and spherical shell made of strength differential materials // Materials Res. Innovat. 2015. V. 19, N S5. P. 80–87.
24. **Zamani V., Pence T. J.** Swelling, inflation, and a swelling-burst instability in hyperelastic spherical shells // Intern. J. Solids Structures. 2017. V. 125. P. 134–149.
25. **Zhang Y. Q., Wang L. Z.** Burst pressure of pipelines with plastic anisotropy under combined internal and external pressures // J. Engng Mech. 2012. V. 139, N 7. P. 920–924.
26. **Hill R.** The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon press, 1950.

*Поступила в редакцию 23/І 2020 г.,
после доработки — 16/ІІІ 2020 г.
Принята к публикации 30/ІІІ 2020 г.*
