

**ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗОВ
В УПРУГО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ
НА СТАДИИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ПОЛОСТИ**

*В. М. Колобашкин, Н. А. Кудряшов, В. В. Мурзенко
(Москва)*

1. Движение газа и жидкости через проницаемые деформируемые среды сопровождается рядом процессов: утечка продуктов детонации из полости подземного взрыва, изменение напряженного состояния в пластах при добыче нефти и газа, технологические процессы в химических реакторах и т. д.

Утечка газообразных продуктов из полости подземного взрыва после ее остановки рассматривалась в [1] в предположении, что одномерное (плоское и сферически-симметричное) движение газа описывается двумерным законом Дарси. Двумерная задача о распространении газа через разрушенную породу и переносе радиоактивной примеси фильтрационным потоком решалась в [2]. Теплообмен газового потока с пористой средой при фильтрации из полости подземного взрыва учитывали авторы [1]. В перечисленных работах считалось, что газ движется в недеформируемой среде, а пористость и проницаемость с течением времени не изменяются.

Однако, как показали экспериментальные исследования по детонации тэна в песке [4], утечка продуктов в процессе динамического расширения полости оказывает влияние на механическое действие взрыва. Фильтрационные свойства среды при этом изменяются и движение газа зависит от возникающих деформаций. Эксперименты по детонации в хрупких материалах [5] косвенно подтверждают, что на ранней стадии развития взрыва из полости вытекает 30—40% массы газа.

В данной работе методом математического моделирования рассматривается взаимное влияние упругих деформаций пористой среды и фильтрации газа.

Одномерные движения газа и пористой среды описываются системой уравнений непрерывности и движения [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_1 m)}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial(\rho_1 m u r^\nu)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial[\rho_2(1-m)]}{\partial t} + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial(\rho_2(1-m) u' r^\nu)}{\partial r} &= 0, \\ \rho_1 m \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) - m \frac{\partial p_1}{\partial r} - m F, \\ \rho_2 m \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial r} \right) &= \frac{\partial \sigma_1^f}{\partial r} + \frac{\nu(\sigma_1^f - \sigma_2^f)}{r} - (1-m) \frac{\partial p_1}{\partial r} + m F, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_1 , u и p_1 — плотность, скорость и давление газа; ρ_2 и u' — плотность и скорость твердой фазы; m — пористость среды; F — сила межфазного трения; σ^f — тензор «эффективных» напряжений в твердой фазе, связанный с относительными перемещениями зерен [6]; r — координата; t — время. Для плоской задачи ($\nu = 0$) компоненты тензора напряжений σ^f в декартовых координатах (x, y, z) имеют вид: $\sigma_1^f = \sigma_{xx}^f$, $\sigma_2^f = \sigma_{yy}^f$, $\sigma_3^f = \sigma_{zz}^f$ ($x = r$), причем $\sigma_2^f = \sigma_3^f$; при цилиндрическом движении ($\nu = 1$) $\sigma_1^f = \sigma_{rr}^f$, $\sigma_2^f = \sigma_{\varphi\varphi}^f$, $\sigma_3^f = \sigma_{zz}^f$; в случае сферической симметрии ($\nu = 2$) $\sigma_1^f = \sigma_{rr}^f$, $\sigma_2^f = \sigma_{\varphi\varphi}^f$, $\sigma_3^f = \sigma_{\theta\theta}^f$ и $\sigma_2^f = \sigma_3^f$.

Для замыкания систем (1) используем уравнения состояния газа и пористой среды. Для идеального газа при постоянной температуре имеем

$$p_1 = c^2 \rho_1 \quad (2)$$

(c — изотермическая скорость звука в газе). Далее предположим, что пористый скелет деформируется упругим образом, а само вещество твердой

фазы является несжимаемым ($\rho_2 = \text{const}$), т. е. увеличение удельного объема пористой среды $v = 1/[\rho_2(1-m)]$ обусловлено изменением пористости. «Эффективное» давление в твердой фазе $p_2 = -\sigma_{ii}^f/3$ определяется через удельный объем [7]. Из сферической модели, предложенной в [8], получается следующая зависимость:

$$p_2 = \frac{4}{3} G \frac{v_0 - v}{v - 1/\rho_2}, \quad (3)$$

где G — упругий модуль сдвига вещества твердой фазы; v_0 — значение v при $p_2 = 0$.

Напряжения сдвига $\tau = \sigma_1^f - \sigma_2^f$ считаются связанными с деформациями по закону Гука

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu \frac{\partial u'}{\partial r} (v = 0), \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{u'}{r} \right) \quad (v = 1, 2). \quad (4)$$

Упругий модуль сдвига μ пористой среды, вообще говоря, зависит от G и m .

Зависимость силы межфазного трения F в (1) от $u' - u$ определяется формулой [6]

$$F = \mu_1/k \cdot m(u' - u). \quad (5)$$

Здесь μ_1 — вязкость газа; k — проницаемость пористой среды.

Запишем систему (1) в массовых лагранжевых координатах, определенных для вещества твердой матрицы

$$s(r, t) = \int_{a(t)}^r \rho_2(1-m) r'^v dr',$$

где $a(t)$ — эйлерова координата границы пористой среды; r' — текущая эйлерова координата. Уравнения (1) в переменных (s, t) имеют вид

$$\frac{\partial \left[\frac{\rho_1 m}{\rho_2(1-m)} \right]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_1 m r^v (u - u')]}{\partial s} = 0, \quad (6)$$

$$r^v \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{\rho_2(1-m)}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \left[\frac{\rho_1 m}{\rho_2(1-m)} u \right]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_1 m r^v (u - u')]}{\partial s} = - \frac{m}{\rho_2(1-m)} \left[\frac{\partial p_1}{\partial r} + F \right], \quad (8)$$

$$\rho_2(1-m) \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1^f}{\partial r} + \frac{v(\sigma_1^f - \sigma_2^f)}{r} - (1-m) \frac{\partial p_1}{\partial r} + mF. \quad (9)$$

Эйлерова координата становится зависимой, уравнение для нее запишется в виде

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u'. \quad (10)$$

Сделаем предположение, что силы межфазного трения (5) в (8) велики по сравнению с инерционными членами, тогда уравнения (6) и (9) запишутся иначе:

$$\frac{\partial [p_1(v - 1/\rho_2)]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(p_1 r^v \frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial r} \right), \quad (11)$$

$$v \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1^f}{\partial r} + \frac{v(\sigma_1^f - \sigma_2^f)}{r} - \frac{\partial p_1}{\partial r}. \quad (12)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ на границе неподвижной недеформированной среды с давлением газа $p_1(s; t = 0) = p_0$ в порах соз-

дается повышенное давление $p_1(s=0, t) = f(t)$. Начальные условия для такой задачи:

$$\begin{aligned} u'(s; t=0) &= \frac{\partial p_1}{\partial s}(s; t=0) = \tau(s; t=0) = 0, \\ v(s; t=0) &= v_0, \quad p_1(s; t=0) = p_0, \\ r(s; t=0) &= [a(0)^{v+1} + (v+1)v_0s]^{1+v}. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия при $r = a(t)$ ($s = 0$):

$$p_1(s=0; t) = f(t), \quad \sigma_1^f(s=0; t) = 0. \quad (14)$$

Аналитически решить задачи из-за нелинейности уравнений трудно, поэтому системы (3), (4), (7), (10) с условиями (13), (14) решали численным методом. С этой целью задавалась равномерная сетка по лагранжевой массовой координате s . Дифференциальные операторы в уравнениях заменяли разностными. Для аппроксимации (7) и (12) использовали разностную схему из [9], которая имела второй порядок точности по координате и по времени. Для сквозного счета газодинамических скачков применяли искусственную линейно-квадратичную вязкость Неймана — Рихтмайера.

Уравнение (11) аппроксимировали неявной трехточечной схемой второго порядка точности по координате и первого порядка точности по времени, предложенной для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности [10].

Устойчивость разностной схемы обеспечивалась выбором соответствующих шагов по времени и координате, согласованных с условием Куранта. Численный алгоритм и работоспособность составленной программы проверяли решением простых задач, допускающих аналитические решения (задача о поршне, отражение ударной волны от жесткой стенки и свободной поверхности и т. д.). Оценка точности численного решения путем сравнения результатов расчетов с двумя различными шагами по координате и времени показала, что максимальная погрешность в решениях не превышает 1%.

2. Рассмотрим плоское движение газа в деформируемой пористой среде ($v=0$), если на границе среды поддерживается постоянное давление газа $s(t) = p_1^* = \text{const}$. Из (4), (7) и (10) следует, что касательные напряжения τ являются функциями v , поэтому $\sigma_1^f = -p_1 + \frac{2}{3}\tau$ также зависит от v .

Введем безразмерные переменные и параметры, используя величины ρ_2 , p_1^* и k/μ_1 : $p_1 = p_1^* \bar{p}_1$, $v = 1/\rho_2 \cdot \bar{v}$, $r = \frac{k}{\mu_1} \sqrt{p_1^* \rho_2} \bar{r}$, $t = k/\mu_1 \cdot \rho_2 \bar{t}$, $s = \rho_2 \left(\frac{k}{\mu_1} \sqrt{p_1^* \rho_2} \right) \bar{s}$, $\sigma_1^f = p_1^* \bar{\sigma}_1^f$, $p_2 = p_1^* \bar{p}_2$, $\tau = p_1^* \bar{\tau}$, $u' = \sqrt{\frac{p_1^*}{\rho_2}} \bar{u}'$, $G = p_1^* \bar{G}'$, $\mu = p_1^* \bar{\mu}'$, $v_0 = 1/\rho_2 \cdot \bar{v}_0$, $p_0 = p_1^* \bar{p}_0$.

Краевая задача (3), (4), (7), (10) — (14) для описания движения газа в деформируемой пористой среде в безразмерных переменных имеет вид (здесь и далее черта над безразмерными переменными опускается)

$$\frac{\partial [p_1(v-1)]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(p_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right), \quad (15)$$

$$v \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1^f}{\partial r} - \frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = v, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u', \quad (17)$$

$$\sigma_1^f = -p_2 + \frac{2}{3}\tau, \quad p_2 = \frac{4}{3} G' \frac{v_0 - v}{v - 1}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu' \frac{\partial u'}{\partial r} \quad (18)$$

при

$$\begin{aligned} u'(s; t=0) &= \frac{\partial p_1}{\partial r}(s; t=0) = \tau(s; t=0) = 0, \\ v(s; t=0) &= v_0, \quad p_1(s; t=0) = p_0, \quad r(s; t=0) = v_0 s, \\ p_1(s=0; t) &= 1, \quad \sigma_1^f(s=0; t) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В начальном условии для r предполагается, что при $t=0$ граница пористой среды находилась в точке $a(0)=0$.

В результате численного решения системы (16)–(18) с условиями (19) получены зависимости давлений и скоростей движения среды и газа, «эффективных» напряжений и пористости от пространственных аргументов.

На рис. 1 показаны зависимости «эффективного» давления в среде p_2 , давления газа p_1 и скорости движения среды u' от расстояния. Видно, что в начальные моменты времени скорость фронта распространения газа D больше скорости звука в среде c_s . Возмущения в твердой матрице на этом этапе распространяются медленнее, чем газ. С течением времени D становится меньше c_s , при этом в твердой фазе образуется ударная волна. За фронтом движения газа происходит разгрузка твердого скелета.

Численные расчеты показали, что при уменьшении величины упругого модуля G' время образования ударной волны повышается. Из рис. 2 видно, что время t^* зависит от v_0 . Расчеты при $p_0 \neq 0$ показали, что с увеличением фонового давления скачок в σ_1 уменьшается, при этом на ударной волне газ сжимается. Фильтрация приводит к размытию фронта ударной волны в среде.

3. Рассмотрим движение газа в упруго-деформируемой пористой среде на стадии динамического расширения полости. Для данной задачи введем безразмерные переменные и параметры: $p_1 = p_1^* \bar{p}_1$, $v = 1/\rho_2 \cdot \bar{v}$, $r = a_0 \bar{r}$, $t = a_0 \sqrt{\frac{\rho_2}{p_1^*}} \bar{t}$, $s = \rho_4 a_0^3 \bar{s}$, $p_2 = p_1^* \bar{p}_2$, $\sigma_1^f = p_1^* \bar{\sigma}_1^f$, $\sigma_2^f = p_1^* \bar{\sigma}_2^f$, $\tau = p_1^* \bar{\tau}$, $u' = \sqrt{\frac{p_1^*}{p_1^* \rho_2}} \bar{u}'$, $G = p_1^* \bar{G}'$, $\mu = p_1^* \bar{\mu}'$, $v_0 = 1/\rho_2 \cdot \bar{v}_0$, $p_0 = p_1^* \bar{p}_0$, $\kappa = \sqrt{\frac{k}{p_1^* \rho_2}} \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{a_0}$, $a(t) = a_0 \bar{a}(t)$, p_1^* — начальное давление газа в полости, $a_0 = a(t=0)$ — начальный радиус полости. Система (3), (4), (7), (10)–(12) при $\nu = 2$ в безразмерных переменных запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial [p_1(v-1)]}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(r_1^2 r_2^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right), \\ v \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_1^f}{\partial r} + \frac{2\tau}{r} - \frac{\partial p_1}{\partial r}, \\ r^2 \frac{\partial r}{\partial s} &= v, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u', \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= 2\mu' \left(\frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{u'}{r} \right), \quad p_2 = \frac{4}{3} G' \frac{v_0 - v}{v - 1}, \quad \sigma_1^f = -p_2 + \frac{2}{3} \tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Начальные условия для системы (20) совпадают с (13) при $a(0)=1$.

Давление газа в полости $f(t)$ изменяется за счет расширения полости и утечки. В зависимости от времени оно определяется уравнением

$$\frac{d(fa^3)}{dt} = 3fa^2 \kappa \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=a(t)}, \quad f(0) = 1. \quad (21)$$

Граничные условия для системы (20) имеют вид (14). Алгоритм численного решения краевой задачи (20), (21), (13), (14) тот же, что и для случая $\nu = 0$.

Некоторые результаты численного решения задачи о движении газа из упруго-расширяющейся полости представлены на рис. 3–6. На первой

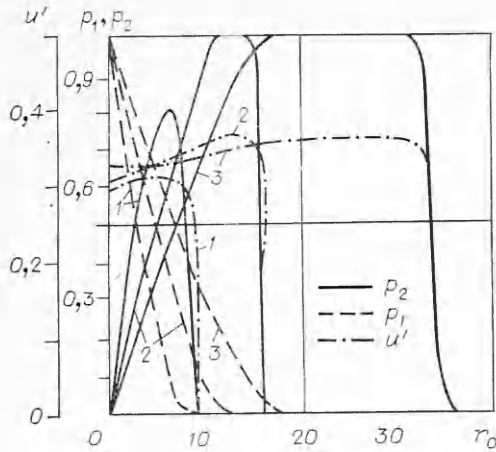


Рис. 1. Зависимость давления в среде и газе и скорости среды от r_0 ; $t = 2$ (1), 4 (2) и 8 (3) при $G' = 0,75$, $\mu' = 1$, $v_0 = 1,2$, $p_0 = 0$.

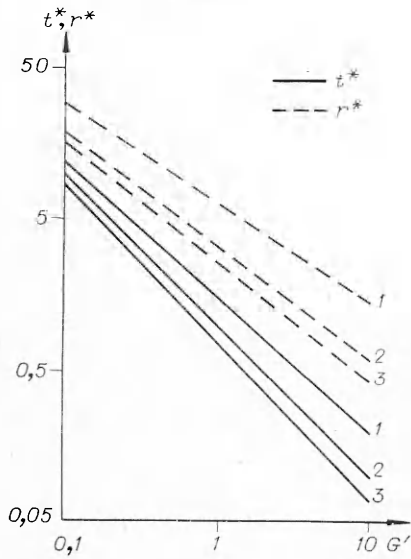


Рис. 2. Время образования ударной волны t^* и координата точки ее образования r^* в зависимости от G' при $p_0 = 0$, $\mu' = 0,75$, $v_0 = 1,2$ (1), 2 (2) и 3 (3).

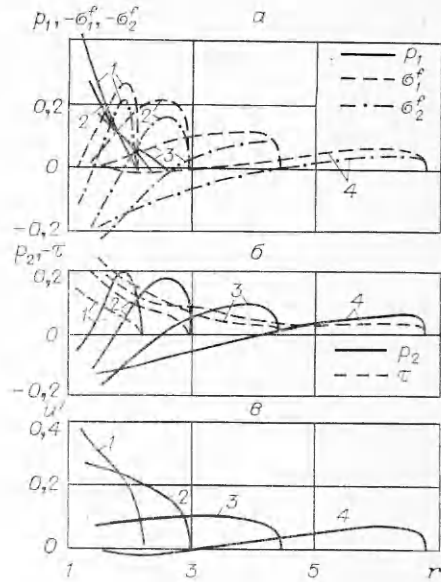


Рис. 3. Характерные давления, напряжения и скорость среды в зависимости от r при $t = 0,5$ (1), 1,0 (2), 1,5 (3) и 2,0 (4); $G' = 0,15$, $v_0 = 1,2$, $p_0 = 0$, $\kappa = 0,11$, $\mu' = 0,2$.

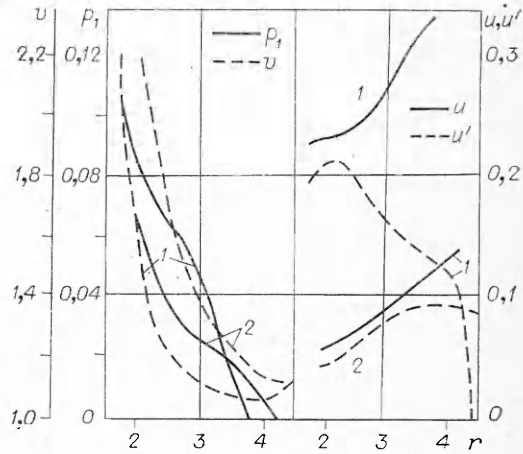


Рис. 4. Зависимости p_1 , v , u , u' от r при $t = 2,0$ (1) и 4,0 (2); $G' = 0,038$, $\mu' = 0,05$, $v_0 = 1,2$, $\kappa = 0,22$, $p_0 = 0$.

стадии движения среды в области, занятой газом, распространяется волна сжатия. Затем, как и в плоской задаче, образуется ударная волна, которая отрывается от фронта газа. На поздней стадии скорости распространения газа становится меньше по сравнению со скоростью ударной волны. В момент времени, близкий к окончанию расширения полости, фильтрация газа существенно замедляется (см. рис. 3). Давление газа в полости на момент ее остановки зависит от прочностных свойств среды G' и от ее начальной пористости v_0 и не зависит от проницаемости κ . Из рис. 5 видно, что с уменьшением v_0 давление газа в полости изменяется медленнее. Это объясняется более быстрой утечкой газа при больших v_0 на стадии динамического расширения полости. Количество вытекающих газов из полости зависит от κ и v_0 . В случае $\kappa = 0,22$ ($k = 10^{-12}$ м², $a_0 = 3$ м, $p_1^* = 10^{11}$ Па, $\mu_1 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho_2 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³) и $v_0 = 1,2$ на момент остановки из полости вытекает около 20% газа.

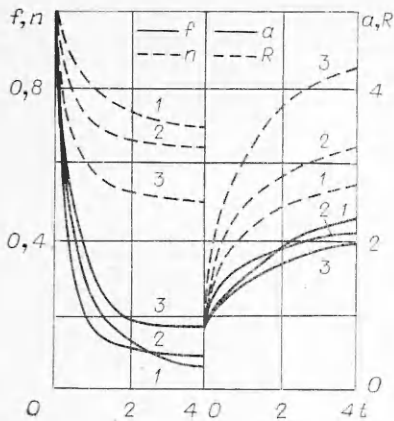


Рис. 5. Зависимость давления f и массовой доли газа n в полости, радиуса полости a и фронта распространения газа R от t при $p_0 = 0$, $G' = 0,038$.
 1 — $\kappa = 0,045$, $\mu' = 0,05$, $v_0 = 1,2$; 2 — $\kappa = 0,045$, $\mu' = 0,05$, $v_0 = 2$; 3 — $\kappa = 0,22$, $\mu' = 0,05$ (для зависимости $f(t)$ $G' = 0,15$, $\kappa = 0,022$, $\mu' = 0,2$), $v_0 = 1,2$.

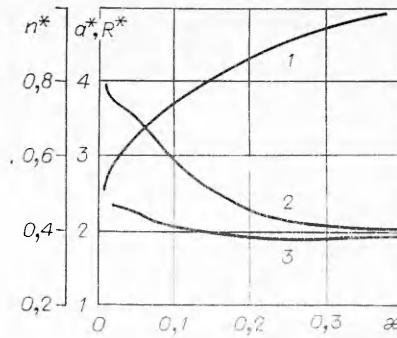


Рис. 6. Зависимость R^* (1), n^* (2) и a^* (3) от x на момент остановки полости при $G' = 0,038$,
 $v_0 = 1,2$, $\mu' = 0,05$, $p_0 = 0$.

Выход продуктов детонации на динамической стадии приводит к уменьшению радиуса полости на момент ее остановки. Увеличение пористости от 1,2 до 2 приводит к уменьшению a . Из зависимости $R(t)$ (см. рис. 5) следует, что увеличение v_0 при $\kappa = 0,045$ характеризуется уменьшением области, занятой газом.

Зависимости от проницаемости κ радиуса полости a^* , относительной доли оставшихся газов n^* и координаты фронта распространения газа R^* на момент окончания расширения полости представлены на рис. 6.

Таким образом, численное исследование фильтрации газа через деформируемую пористую среду показало, что на первой стадии в пористой среде распространяется газ со скоростью, большей скорости звука в твердой фазе. За фронтом движения газа идет волна сжатия твердой среды. Уменьшение скорости движения газа ведет к тому, что в некоторый момент времени образуется ударная волна, которая отрывается от фронта движения газа, при этом в области пространства, занятой газом, происходит разгрузка твердой среды. Этот процесс во многом аналогичен образованию ударной волны при распространении тепловой [11].

На стадии динамического расширения полости в зависимости от свойств среды, ее пористости и проницаемости происходит утечка газов. Это обстоятельство приводит к существенному изменению радиуса образующейся полости.

Поступила в редакцию 19/IX 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Адушкин, П. Б. Каазик. ПМТФ, 1976, 1, 111.
2. Е. Г. Басанский, В. М. Колобашкин, Н. А. Кудряшов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, 5, 61.
3. М. Н. Габбасов, В. М. Колобашкин, Н. А. Кудряшов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, 4, 80.
4. В. М. Кузнецов, А. Ф. Шацкевич. ФГВ, 1977, 13, 5, 733.
5. В. М. Комир, В. М. Кузнецов, А. Ф. Шацкевич. ФТПРПИ, 1979, 6, 42.
6. В. Н. Николаевский. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
7. W. Negtman. J. Appl. Phys., 1969, 40, 6, 2490.
8. С. З. Дуни, В. В. Сурков. Физ. Земли, 1978, 11, 63.
9. М. Л. Уилкинс. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
10. А. А. Самарский. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
11. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.