

УДК 532.59

РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

О. Ю. Цвелодуб

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

С учетом межфазного поверхностного взаимодействия изучено поведение длинноволновых возмущений на границе раздела двух слоев различных жидкостей, образующих резонансные триплеты, описываемые псевдодифференциальным уравнением.

1. Рассматривается система, состоящая из двух идеальных несмешивающихся жидкостей, находящихся в поле силы тяжести. Тяжелая жидкость плотности ρ_0 занимает нижнюю часть полупространства ($z < 0$). Над ней расположен тонкий слой более легкой жидкости плотности ρ_1 , ограниченной сверху твердой горизонтальной плоскостью. Введем следующие обозначения: h_0 — толщина слоя в отсутствие возмущений, σ — коэффициент межфазного поверхностного взаимодействия.

В случае очень тонких слоев при рассмотрении возмущений границы для длинноволновых возмущений задача сводится к анализу решений одного эволюционного уравнения, полученного в [1]:

$$u_t + (u + u^2 - \alpha Lu - \beta u_{xx})_x = 0. \quad (1.1)$$

Здесь u — смещение границы раздела; индексы t, x обозначают дифференцирование по t, x соответственно; L — линейный, симметричный псевдодифференциальный оператор, в k -пространстве его действие сводится к операции умножения соответствующей фурье-гармоники на $|k|$.

При выводе уравнения (1.1) условия $\alpha = \rho_2/(2\rho_1)$, $\beta = \sigma/[g(\rho_2 - \rho_1)h_0^2]$, $\beta \gg \alpha$ предполагались выполненными.

Уравнение (1.1) представляет собой длинноволновое эволюционное уравнение, учитывающее влияние малой нелинейности и дисперсии для волны, распространяющейся в одну сторону. При $\alpha = 0$ оно переходит в известное уравнение Кортевега — де Фриза, в случае $\beta = 0$ — в уравнение Бенжамина — Оно [2]. Это уравнение, в частности, является хорошей моделью для изучения поведения внутренних волн в стратифицированной жидкости. Четвертое слагаемое в (1.1) отражает нелокальный характер связи между возмущениями границы раздела и давления, а последнее моделирует дисперсию, обусловленную учетом сил межфазного поверхностного взаимодействия.

Уравнение (1.1) получено также в работе [3] и использовалось при изучении возмущений в пограничном слое.

С помощью специальной замены (1.1) переписывается в виде [4]

$$H_t + (H^2 - LH - H_{xx})_x = 0. \quad (1.2)$$

Стационарно бегущие периодические и солитонные решения уравнения (1.2) построены численно в [4]. Решения малой, но конечной амплитуды для данного волнового числа

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-05-65441), Совета по поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта 00-15-96810) и Сибирского отделения РАН (комплексная интеграционная программа № 01-00).

представлялись в виде рядов по малому параметру. В [4] показано, что они являются регулярными для всех значений волновых чисел k , за исключением окрестности особой точки $k_* = 1/3$. Это связано с тем, что в данном случае фазовые скорости линейных возмущений для первой и второй гармоник совпадают и выполняются условия их резонанса [5].

Целью настоящей работы является изучение взаимодействия триплетов возмущений, удовлетворяющих условиям пространственного синхронизма.

Если в (1.2) пренебречь нелинейным членом, то фазовая скорость периодических бесконечно малых (линейных) возмущений будет функцией волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны)

$$c = k^2 - |k|. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что уравнение (1.2) записано в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью бесконечно длинных ($k = 0$) линейных волн. Из (1.2), (1.3) следует также, что для трех гармоник с бесконечно малыми амплитудами выполняется условие резонанса, если их волновые числа удовлетворяют соотношениям

$$k_1^0 + k_2^0 = k_3^0, \quad k_1^0 c_1^0 + k_2^0 c_2^0 = k_3^0 c_3^0, \quad c_i^0 = k_i^{02} - |k_i^0|. \quad (1.4)$$

2. Рассмотрим эволюционное поведение трех гармоник, образующих резонансный триплет. Полагая амплитуды гармоник малыми, но конечными, будем искать решения уравнения (1.2) в виде ряда

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots \quad (2.1)$$

Введем набор быстрых и медленных времен

$$t_n = t\varepsilon^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в (1.2), с учетом (2.2) получим бесконечную систему линейных уравнений. В этой системе первому порядку по ε соответствует уравнение

$$\frac{\partial H_1}{\partial t_0} - \frac{\partial}{\partial x} \left(L H_1 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Условия полного синхронизма для трех гармоник бесконечно малых амплитуд требуют выполнения соотношений (1.4). Решение системы (1.4) имеет вид

$$k_3^0 = 2/3, \quad k_1^0 + k_2^0 = 2/3.$$

Будем рассматривать возмущения, являющиеся комбинацией трех гармоник малых, но конечных амплитуд, у которых волновые числа k_1, k_2, k_3 вполне определены: каждое из них лежит в окрестности соответствующего волнового числа k_i^0 . При этом для них точно выполнены условия синхронизма по волновым числам

$$k_1 + k_2 = k_3. \quad (2.4)$$

Для частот эти условия нарушены, так как

$$k_i = k_i^0 + \Delta_i, \quad \Delta_i \ll k_i^0. \quad (2.5)$$

Ясно, что для выполнения (2.4) отклонения волновых чисел Δ_i должны удовлетворять соотношению

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3. \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.3) ищем в виде

$$H_1 = A \exp [ik_1(x - c_1^0 t)] + B \exp [ik_2(x - c_2^0 t)] + D \exp [ik_3(x - c_3^0 t)] + \text{к.с.} \quad (2.7)$$

Здесь к.с. — операция комплексного сопряжения; k_i — волновые числа, для которых выполняются соотношения (2.4), (2.5); c_i^0 удовлетворяют соотношениям (1.4). Поскольку теперь амплитуды гармоник A, B, D малы, но конечны, в результате нелинейных взаимодействий они будут некоторыми функциями времени. Будем строить решения, в которых эти амплитуды являются функциями времен более медленных, чем $t_0 \equiv t$. Для этого требуется, чтобы выполнялось условие

$$O(\Delta_i) \leq O(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Действительно, подставляя (2.6) в (2.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых экспонентах к нулю, для функции A , например, получим уравнение

$$\left[\frac{\partial A}{\partial t_0} - ik_1(c_1^0 + |k_1| - k_1^2)A \right] \exp[ik_1(x - c_1^0 t_0)] = 0. \quad (2.9)$$

Из (1.3) и (2.9) следует, что для выполнения условия $\partial A / \partial t_0 = 0$ необходимо, чтобы по порядку малости Δ_1 было не больше ε . В дальнейшем будем полагать, что эти величины имеют одинаковый порядок малости, т. е. в соотношении (2.8) выполняется равенство. Тогда слагаемое $ik_1(c_1^0 + |k_1| - k_1^2)A$ в (2.9), пропорциональное A , должно быть перенесено в уравнение второго порядка. Аналогичные выкладки справедливы и для остальных гармоник. В этом случае следующему порядку по ε соответствует уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial t_1} + \frac{\partial H_2}{\partial t_0} + \frac{\partial(H_1^2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(LH_2 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} \right) + \\ + \text{члены порядка } \Delta/\varepsilon \text{ из } \varepsilon\text{-приближения} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь последнее слагаемое представляет собой члены из первого приближения (2.3). В уравнении (2.10) подчеркнуты секулярные члены (для H_1^2 секулярными членами будет только часть слагаемых). Для того чтобы существовало ограниченное решение H_2 , необходимо, чтобы секулярные члены были равны нулю. Это требование приводит к системе уравнений для амплитуды гармоник A, B, D

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt_1} + ik_1^0 \frac{\Delta_1}{\varepsilon} (2k_1^0 - 1)A + 2i(k_3 - k_2)\bar{B}D \exp[-i(k_3 c_3^0 - k_2 c_2^0 - k_1 c_1^0)t_0] = 0, \\ \frac{dB}{dt_1} + ik_2^0 \frac{\Delta_2}{\varepsilon} (2k_2^0 - 1)B + 2i(k_3 - k_1)\bar{A}D \exp[-i(k_3 c_3^0 - k_1 c_1^0 - k_2 c_2^0)t_0] = 0, \\ \frac{dD}{dt_1} + ik_3^0 \frac{\Delta_3}{\varepsilon} (2k_3^0 - 1)D + 2i(k_1 + k_2)AB \exp[i(k_3 c_3^0 - k_1 c_1^0 - k_2 c_2^0)t_0] = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь и далее черта сверху обозначает операцию комплексного сопряжения.

Полагая, что малым параметром ε в (2.1) является, например, отклонение волнового числа первой гармоники Δ_1 от k_1^0 (т. е. $\varepsilon \equiv \Delta_1$), и учитывая связь между отклонениями волновых чисел от линейных резонансных гармоник (2.6), после замены

$$A \rightarrow A \exp(i\gamma t_1/2), \quad B \rightarrow B \exp(i\gamma t_1/2), \quad D \rightarrow D$$

систему (2.11) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt_1} + i \left[\frac{\gamma}{2} + k_1^0(2k_1^0 - 1) \right] A + 2ik_1^0 \bar{B}D = 0, \quad \frac{dB}{dt_1} + i \left[\frac{\gamma}{2} + k_2^0 \Delta(2k_2^0 - 1) \right] B + 2ik_2^0 \bar{A}D = 0, \\ \frac{dD}{dt_1} + i \frac{2(1 + \Delta)}{9} D + \frac{4}{3} iAB = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $\Delta = \Delta_2/\Delta_1$; $\gamma = k_1^{02}(1 + \Delta) - k_1^0(1 + \Delta/3) + 2/9$.

Для анализа решений системы (2.12) представим комплексные функции A , B , D в виде

$$A = A_1 \exp(i\varphi_A), \quad B = B_1 \exp(i\varphi_B), \quad D = D_1 \exp(i\psi),$$

где A_1 , φ_A , B_1 , φ_B , D_1 , ψ — вещественные функции.

Выделяя вещественные и мнимые части в (2.12), получим систему шести уравнений для этих вещественных функций

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt_1} &= 2k_1^0 B_1 D_1 \sin \chi, & \frac{dB_1}{dt_1} &= 2k_2^0 A_1 D_1 \sin \chi, & \frac{dD_1}{dt_1} &= -\frac{4}{3} A_1 B_1 \sin \chi, \\ \frac{d\varphi_A}{dt_1} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + k_1^0(2k_1^0 - 1)\right] - 2k_1^0 \frac{B_1 D_1}{A_1} \cos \chi, \\ \frac{d\varphi_B}{dt_1} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + k_2^0(2k_2^0 - 1)\Delta\right] - 2k_2^0 \frac{A_1 D_1}{B_1} \cos \chi, \\ \frac{d\psi}{dt_1} &= -\frac{2}{9}(1 + \Delta) - \frac{4}{3} \frac{A_1 B_1}{D_1} \cos \chi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $\chi = \psi - \varphi_A - \varphi_B$.

Из первых трех уравнений системы (2.13) следует интеграл

$$A_1^2 + B_1^2 + D_1^2 = C_{00}, \quad (2.14)$$

из первых двух — второй интеграл движения

$$k_1^0 B_1^2 - k_2^0 A_1^2 = k_1^0 C_1. \quad (2.15)$$

С учетом (2.14), (2.15) из (2.13) получим “усеченную” систему

$$\frac{dA_1}{dt_1} = 2k_1^0 B_1 D_1 \sin \chi, \quad \frac{d\chi}{dt_1} = \gamma_1 + \left[2k_1^0 \frac{B_1 D_1}{A_1} + 2k_2^0 \frac{A_1 D_1}{B_1} - \frac{4}{3} \frac{A_1 B_1}{D_1}\right] \cos \chi, \quad (2.16)$$

где $\gamma_1 = \gamma + k_1^0(2k_1^0 - 1) + \Delta k_2^0(2k_2^0 - 1) - 2(1 + \Delta)/9$.

Знание решений системы (2.14)–(2.16) не дает полной информации об эволюции решения (2.7) (так как в результате будет получена информация о поведении только некоторой комбинации фаз χ , а не самих фаз ψ , φ_A , φ_B). Для этого необходимо решать систему (2.13). Система (2.14)–(2.16) легко разрешается в квадратурах, а анализ структуры фазовых кривых решений этой системы, например на плоскости (A_1, χ) , дает достаточно много информации и о решении (2.7) в целом.

Согласно (2.16) фазовые кривые описываются уравнением

$$-\frac{d \cos \chi}{dA_1} = \frac{\gamma_1}{2k_1^0 B_1 D_1} + \left(\frac{1}{A_1} + a \frac{A_1}{B_1^2} - \frac{2}{3k_1^0} \frac{A_1}{D_1^2}\right) \cos \chi,$$

решения которого имеют вид

$$\cos \chi = (C - a_1 A_1^2) / [2(C_1 + a A_1^2)^{1/2} (C_{00} - C_1 - a_2 A_1^2)^{1/2} A_1]. \quad (2.17)$$

Здесь $a = k_2^0/k_1^0$; $a_2 = 1 + a$; C — константа интегрирования, задающая соответствующую траекторию и определяемая начальными данными:

$$C = 2A_1^0 (C_1 + a A_1^{02})^{1/2} (C_{00} - C_1 - a_2 A_1^{02})^{1/2} \cos \chi_0 + a_1 A_1^{02}$$

(A_1^0 , χ_0 — координаты начальной точки, определяющей данную траекторию).

Несмотря на то что фазовые траектории удается найти явно в виде простых формул (2.14), (2.15), (2.17), даже анализ фазовых портретов решений затруднен из-за большого

числа параметров. Сложной проблемой является также представление характерных решений системы (2.13) и соответствующих им решений (2.7). Анализ упрощает наличие некоторых структурных особенностей. Так, в случае $k_1^0 = k_2^0 = 1/3$, $\Delta = 1$ задача вырождается, и после соответствующих перенормировок ($A + B \rightarrow A$) получается система, описывающая двухволновой резонанс [5]. Если $\Delta \neq 1$, то две гармоники из трех имеют близкие волновые числа.

Система (2.13) инвариантна относительно преобразования

$$A_1 \rightarrow -A_1, \quad B_1 \rightarrow -B_1, \quad D_1 \rightarrow -D_1, \quad \chi \rightarrow \pi - \chi, \quad t_1 \rightarrow -t_1.$$

Кроме того, справедливо преобразование

$$A_1 \rightarrow A_1, \quad B_1 \rightarrow -B_1, \quad D_1 \rightarrow -D_1$$

и аналогично

$$A_1 \rightarrow -A_1, \quad B_1 \rightarrow -B_1, \quad D_1 \rightarrow D_1.$$

Так как фазовое пространство решений системы (2.13) имеет по переменной χ период 2π , то достаточно, например, на фазовой плоскости (A_1, χ) ограничиться рассмотрением области $0 < \chi < 2\pi$, $A_1 > 0$.

Из (2.16) следует, что фазовое пространство может иметь стационарные точки, для которых должны выполняться соотношения

$$\chi = 0, \pi, \quad \gamma_1 = \mp \left(2k_1^0 \frac{B_1 D_1}{A_1} + 2k_2^0 \frac{A_1 D_1}{B_1} - \frac{4}{3} \frac{A_1 B_1}{D_1} \right). \quad (2.18)$$

Соответствующие этим точкам решения H_1 представляют собой нелинейную суперпозицию трех стационарно бегущих волн, каждая из которых имеет свою фазовую скорость и, вообще говоря, несоизмеримые волновые числа. Кроме того, фазовая скорость каждой из этих волн отличается от соответствующей величины c_i^0 . Одной из причин этого отличия является то, что каждая из фаз ψ , φ_A , φ_B , как следует из (2.13), меняется со своей постоянной скоростью, несмотря на постоянство χ . Решения H_1 , соответствующие нетривиальным фазовым кривым (2.17), имеют еще более сложную структуру.

Кроме стационарных точек (2.18) важными структурными элементами фазового пространства являются сепаратрисы, на которых амплитуда какой-либо гармоники проходит через нуль. Приведем формулы для проекций этих сепаратрис на фазовую плоскость (A_1, χ) .

1. Сепаратриса, на которой $A_1^0 = 0$:

$$\cos \chi = -a_1 A_1 / [2(C_1 + aA_1^2)^{1/2} (C_{00} - C_1 - a_2 A_1^2)^{1/2}]. \quad (2.19)$$

2. Сепаратриса, на которой $B_1^0 = 0$:

$$\cos \chi = -a_1 (C_1 + aA_1^2)^{1/2} / [2a(C_{00} - C_1 - a_2 A_1^2)^{1/2} A_1]. \quad (2.20)$$

Сравнение формул (2.19) и (2.20) с учетом интегралов сохранения (2.14) и (2.16) (из которых следует, что в первом случае $C_1 = B_1^{02}$, а во втором $C_1 = -A_1^{02}/a$) показывает, что эти формулы могут описывать одну и ту же кривую только в случае, если $C_1 = 0$. В других случаях одна из этих гармоник обязательно отлична от нуля.

3. Сепаратриса, на которой $D_1^0 = 0$:

$$\cos \chi = a_1 (C_{00} - C_1 - a_2 A_1^2)^{1/2} / [2a_2 (C_1 + aA_1^2)^{1/2} A_1].$$

Из анализа фазовых кривых следует, что поведение изображающей точки, движущейся в фазовом пространстве по соответствующей сепаратрисной траектории, имеет достаточно простой характер: за конечное время она уходит из точки, в которой задающая ее

гармоника равна нулю, и за конечное же время достигает подобной точки. При прохождении через нуль знак данной гармоники (например, для сепаратрисы (2.19) речь идет о гармонике A_1) меняется на противоположный. Две другие гармоники в эти моменты достигают своих экстремальных для данного решения значений. При достижении этих точек проекция изображающей точки на плоскости, на которой по одной из осей откладываются значения соответствующей гармоники, а по другой — значения величины χ (в указанном выше случае это плоскости (B_1, χ) и (D_1, χ)), начинает двигаться в противоположном направлении.

Особый случай имеет место при $C_1 = 0$. В этом случае, как отмечалось выше, формулы (2.19) и (2.20) описывают одну и ту же кривую. На этой кривой гармоники A_1 и B_1 достигают своего предельного значения при временах $t_1 \rightarrow \pm\infty$, т. е. данной сепаратрисе соответствует решение системы (2.13), вклад гармоник A_1 и B_1 в которое является солитоном огибающей. Таким образом, на больших временах решение (2.13), соответствующее данным параметрам, представляет собой практически периодическую стационарно бегущую волну с волновым числом k_3 и амплитудой D_1^0 .

Хотя поведение фазовых траекторий дает достаточно много информации о характере соответствующего решения (2.7), для его полного описания необходимо рассмотреть систему (2.13). Эта система решалась численно методом Рунге — Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага и контролем погрешности.

На рис. 1 представлен фазовый портрет решений системы (2.16) для типичного случая $C_{00} = 1$, $C_1 = 0,5$. Приведены проекции фазовых траекторий на плоскости (A_1, χ) , (B_1, χ) и (D_1, χ) при $k_1^0 = 1/2$, $k_2^0 = 1/6$, $\Delta = 1$. Видно, что в данной области имеется две

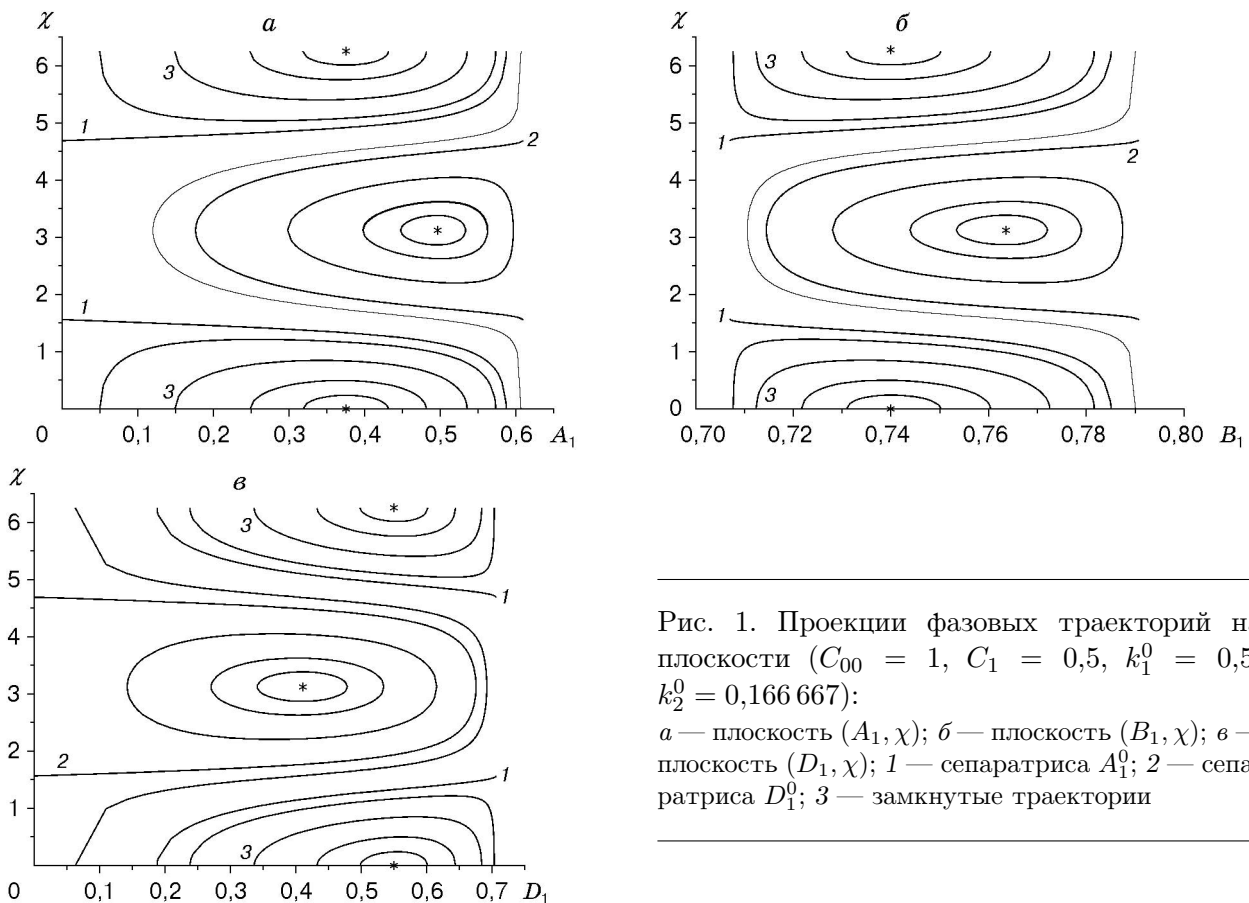


Рис. 1. Проекция фазовых траекторий на плоскости ($C_{00} = 1$, $C_1 = 0,5$, $k_1^0 = 0,5$, $k_2^0 = 0,166\ 667$):
 а — плоскость (A_1, χ) ; б — плоскость (B_1, χ) ; в — плоскость (D_1, χ) ; 1 — сепаратриса A_1^0 ; 2 — сепаратриса D_1^0 ; 3 — замкнутые траектории

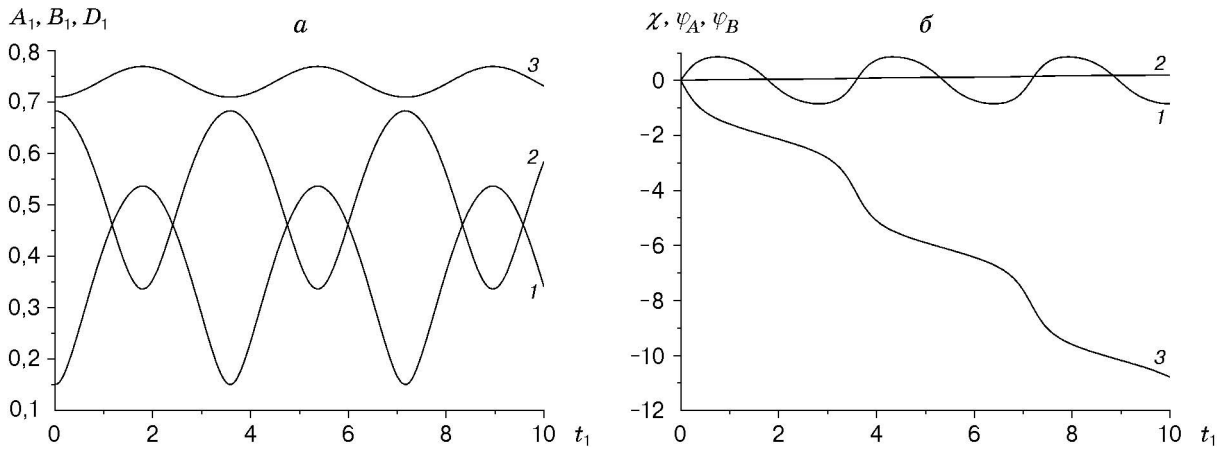


Рис. 2. Зависимости амплитуд (а) и фаз (б) гармоник от времени ($C_{00} = 1$, $C_1 = 0,5$, $k_1^0 = 0,5$, $k_2^0 = 0,166\ 667$, $\Delta = 1$):
 а — 1 — гармоника A_1 , 2 — гармоника B_1 , 3 — гармоника D_1 ; б — 1 — фаза χ , 2 — фаза φ_B , 3 — фаза φ_A

стационарных точки (с учетом периодичности фазового пространства по χ). На рис. 1 они показаны звездочками. Это особые точки типа “центр”, их координаты A_1, B_1, D_1, χ соответственно равны 0,38; 0,74; 0,5545; 0 и 0,497; 0,763; 0,413; π .

Условно можно выделить два типа траекторий. Первые представляют собой траектории, замыкающиеся вокруг соответствующих центров. На этих траекториях величины χ, A_1, B_1, D_1 совершают периодические колебания. Для малых отклонений от соответствующей стационарной точки колебания этих функций являются практически гармоническими с частотой, пропорциональной “квадрату амплитуды отклонения” от данной точки. По мере удаления траекторий от стационарной точки характер колебаний становится все более сложным. В пределе эти замкнутые фазовые кривые переходят в соответствующие сепаратрисные траектории, отделяющие их от разомкнутых траекторий. Траектории второго типа в проекции на любую из плоскостей, где одной из осей является ось χ , являются незамкнутыми кривыми, которые находятся между сепаратрисами.

На рис. 2 показана эволюция во времени решения системы (2.16), соответствующего фазовой траектории, представленной на рис. 1 кривыми 3. Из рис. 2 следует, что амплитуды гармоник меняются существенно (рис. 2,а), разность фаз χ остается ограниченной (кривая 1 на рис. 2,б), а фаза гармоника $A_1 \rightarrow \varphi_A$, пульсируя, неограниченно убывает (кривая 3 на рис. 2,б). В результате вид соответствующего решения H_1 (рис. 3) не имеет сходства с бегущей волной. На плоскости (x, t_1) изолинии не имеют какого-либо определенного наклона и периодичности, хотя в направлении x здесь представлен интервал, соответствующий шести длинам волн гармоника D_1 (т. е. в качестве пространственного масштаба длины здесь используется величина $\lambda = 2\pi/k_3^0$, $k_3^0 = 2/3$).

Как отмечено выше, при $C_1 = 0$ сепаратрисе $A_1^0 = 0, B_1^0 = 0$ соответствует решение (2.13), на больших временах представляющее собой практически периодическую стационарно бегущую волну с волновым числом k_3 и амплитудой D_1^0 (рис. 4). На рис. 4 показана зависимость амплитуд гармоник от времени. Видны области, в которых все три гармоники существенны, и области, в которых решение определяется только третьей гармоникой D_1 . Таким образом, решение представляет собой некоторое локализованное солитоноподобное образование.

Для фазовых кривых, близких к сепаратрисе $A_1^0 = 0, B_1^0 = 0$, зависимость амплитуд гармоник A_1 и B_1 от времени представляет собой последовательность солитонов. Исход-

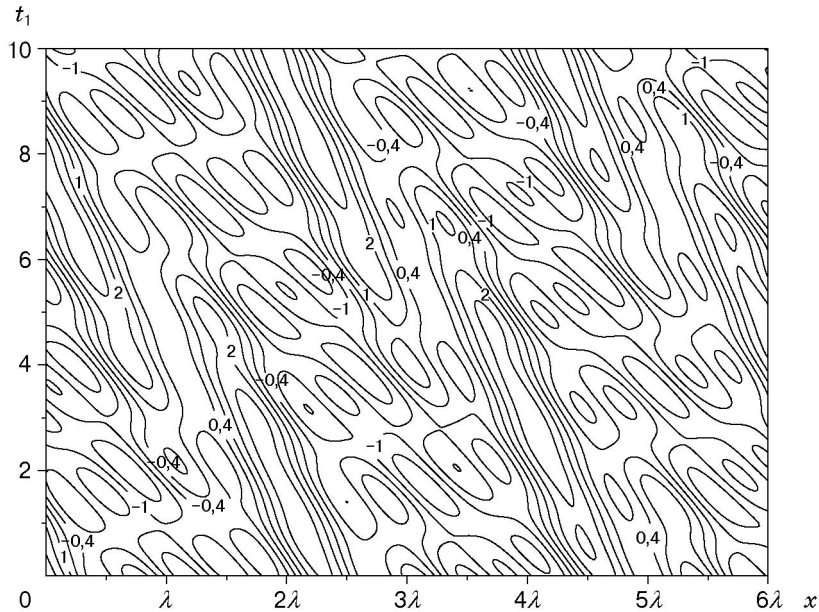


Рис. 3. Изолинии решения H_1 , соответствующего фазовой кривой 3 на рис. 1 ($C_{00} = 1, C_1 = 0,5, k_1^0 = 0,5, k_2^0 = 0,166\ 667, \Delta = 1, \Delta_1 = 0,1$)

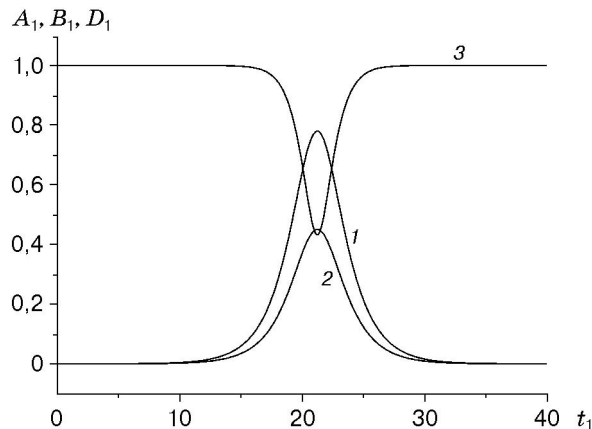


Рис. 4. Зависимость амплитуд гармоник от времени для сепаратрисной фазовой кривой $A_1^0 = B_1^0 = 0$ ($C_{00} = 1, C_1 = 0, k_1^0 = 0,5, k_2^0 = 0,166\ 667, \Delta = 1$):

1 — гармоника A_1 , 2 — гармоника B_1 , 3 — гармоника D_1

ное решение (2.13), соответствующее этому случаю, в течение длительных промежутков времени практически представляет собой синусоиду с амплитудой D_1^0 , затем в достаточно узком интервале времени появляется область “перемежаемости”, в которой амплитуды всех трех гармоник соизмеримы. Этот процесс периодически повторяется. Период “перемежаемости” не соизмерим с собственными основными периодами волны H_1 .

Таким образом, для рассмотренных в рамках модели (1.4) длинноволновых возмущений на границе раздела двух жидкостей изучена структура волновых режимов с волновыми числами, образующими резонансные триплеты. Анализ решений систем (2.13) и (2.16) показывает, что она достаточно сложна. Показано, что два семейства решений, представленные в фазовом пространстве стационарными точками, являются сложной суперпозицией трех стационарно бегущих волн. В окрестности каждого из этих решений существуют семейства, представляющие собой их дальнейшее усложнение вследствие мо-

дуляции во времени частот и амплитуд триплетов. При определенных условиях в пределе они переходят в специфические решения, которые в основном представлены стационарно бегущей волной с постоянной амплитудой D_1^0 , а в узкой зоне являются суперпозицией трех гармоник, ограниченных солитонами огибающих.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benjamin T. В.** A new kind of solitary wave // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 401–411.
2. **Benjamin T. В.** Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29, pt 3. P. 559–592.
3. **Ryzhov O. S.** The development of nonlinear oscillations in a boundary layer and the onset of random disturbances // Nonlinear instability of nonparallel flows: Proc. of the IUTAM symp., Potsdam, New York, July 26–31, 1993. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. P. 52–68.
4. **Цвелодуб О. Ю.** Длинные волны для одной модели двухслойной системы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 5. С. 166–170.
5. **Цвелодуб О. Ю.** Резонансные взаимодействия двух волн в модели двухслойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 92–98.

Поступила в редакцию 25/III 2002 г.
