

УДК (532.591+539.3):534.1

## ДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Представлено решение линейной гидроупругой задачи об установившихся вынужденных колебаниях полубесконечного ледяного покрова под действием локализованной внешней нагрузки. Ледяной покров моделируется вязкоупругой тонкой пластиной, толщина слоя жидкости полагается малой, используется теория мелкой воды. Жидкость ограничена твердой вертикальной стенкой, прямолинейный край упругой пластины, примыкающий к стенке, может быть как свободным, так и защемленным. Решение получено с помощью интегрального преобразования Фурье. Исследовано поведение ледяного покрова в зависимости от частоты внешней нагрузки и граничных условий на краю пластины. Показано, что в случае свободного края пластины на нем возникают значительные прогибы, сопоставимые с прогибами в центре области воздействия давления. Установлено, что вследствие существования волновых движений типа краевых волн энергия внешней нагрузки переносится на большие расстояния вдоль свободного края, на краю защемленной пластины возникают значительные изгибающие моменты, которые при достаточно большой интенсивности внешней нагрузки могут привести к разрушению ледяного покрова.

Ключевые слова: линейная теория мелкой воды, изгибно-гравитационные волны, вязкоупругий ледяной покров, вертикальная стенка, периодическая внешняя нагрузка, краевые волны.

DOI: 10.15372/PMTF20170109

При исследовании динамических явлений, происходящих в ледяном покрове в результате воздействия различных механических внешних сил, большое внимание уделяется изучению изгибных возмущений, вызванных воздействием области давления [1–3]. Обычно поведение ледяного покрова моделируется плавающей тонкой упругой пластиной, описываемой моделью Кирхгофа — Лява. Интерес к исследованию нестационарного взаимодействия упругих пластин с жидкостью, возникший в последнее время, обусловлен проектированием и эксплуатацией искусственных плавающих платформ больших размеров.

Одной из наиболее простых задач является изучение воздействия периодического во времени локализованного поверхностного давления на безграничный ледяной покров [1, 2]. Поведение плавающей на свободной поверхности жидкости упругой пластины ограниченных размеров под действием такой нагрузки рассмотрено в [4] в рамках линейной теории мелкой воды. Также представляет интерес изучение поведения изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове при взаимодействии их с твердой границей, в качестве которой

может быть рассмотрена вертикальная стенка. В упрощенном варианте такая задача решена в работах [5, 6] для полубесконечной пластины, лежащей на упругом гидравлическом (винклеровском) основании. В этом приближении воздействие жидкости на упругую пластину описывается только гидростатической частью давления. Исследовано воздействие точечной нагрузки на пластину в случае свободного [5] и заземленного [6] краев.

В данной работе рассмотрена линейная задача гидроупругости о воздействии локализованного периодического давления на полубесконечную вязкоупругую пластину при наличии твердой вертикальной стенки, ограничивающей жидкость. Толщина слоя жидкости полагается малой, задача решается в рамках модели мелкой воды. Прямолинейный край упругой пластины может быть как заземленным, так и свободным. Исследовано изменение прогибов пластины и изгибающих моментов в зависимости от частоты внешней нагрузки и граничных условий на краю пластины. Показано, что в случае свободного края возникают краевые волны, подобно тому как это происходит, например, при наличии трещины в упругой пластине [7, 8]. Краевые волны локализованы вблизи края пластины и экспоненциально затухают по мере удаления от него.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается слой идеальной несжимаемой жидкости толщиной  $H$ , занимающий горизонтальную полуплоскость в области переменных  $x$  и  $y$ :  $0 < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ . Ледяной покров моделируется тонкой вязкоупругой, изначально не напряженной изотропной пластиной и расположен на верхней границе жидкости. Слева ( $x = 0$ ) жидкость ограничена твердой вертикальной стенкой. Течение жидкости полагается потенциальным, а скорость частиц жидкости и прогиб пластины — малыми. На поверхности пластины действует внешнее давление  $p(x, y, t)$ , которое является заданным,  $t$  — время.

Нормальный прогиб вязкоупругой пластины  $w(x, y, t)$  описывается уравнением [1]

$$D \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta^2 w + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \rho_0 w + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -p(x, y, t), \quad (1.1)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad M = \rho h, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$\varphi(x, y, t)$  — потенциал скоростей частиц жидкости;  $E$ ,  $\rho$ ,  $h$ ,  $\nu$  — модуль Юнга, плотность, толщина и коэффициент Пуассона пластины;  $\tau$  — время релаксации деформаций льда;  $\rho_0$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения.

Согласно линейной теории мелкой воды справедливо соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -H \Delta \varphi. \quad (1.2)$$

Предполагается, что внешнее давление является периодической по времени функцией

$$p(x, y, t) = P(x, y) \exp(-i\omega t),$$

где  $\omega$  — частота; функция  $P(x, y)$  зависит только от величины  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ , т. е.  $P(x, y) = ag\rho_0 f(R)$ ;  $a$  — множитель, имеющий размерность длины;  $f(R)$  — безразмерная функция, отличная от нуля только при  $R < L$ ;  $L$  — радиус области давления. Координаты центра области воздействия внешнего давления равны  $x = x_0$ ,  $y = 0$ , предполагается, что  $x_0 > L$ . Исследуем колебания жидкости и пластины, вызванные действием этого давления.

Считая, что движения жидкости и пластины являются установившимися во времени, потенциал скоростей жидкости и прогиб пластины будем искать в виде

$$\varphi(x, y, t) = \Phi(x, y) \exp(-i\omega t), \quad w(x, y, t) = W(x, y) \exp(-i\omega t).$$

Уравнения для определения  $\Phi(x, y)$  и  $W(x, y)$  имеют вид

$$D(1 - i\omega\tau)\Delta^2 W - \omega^2 MW + g\rho_0 W - i\omega\rho_0\Phi = -P(x, y), \quad W = -iH\Delta\Phi/\omega. \quad (1.3)$$

На вертикальной стенке выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, \quad -\infty < y < \infty). \quad (1.4)$$

Рассматриваются два типа граничных условий на краю ледяного покрова:

1) защемленный край, моделирующий примерзание ледяного покрова к вертикальной стенке:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, \quad -\infty < y < \infty); \quad (1.5)$$

2) свободный край, т. е. изгибающий момент и перерезывающая сила на краю пластины равны нулю:

$$\Delta W - \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta W + \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (x = 0, \quad -\infty < y < \infty). \quad (1.6)$$

Здесь  $\nu_1 = 1 - \nu$ . Вдали от области воздействия давления выполняются условия затухания волнового движения

$$W \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow 0 \quad (\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} \rightarrow \infty). \quad (1.7)$$

В данной задаче наряду с вертикальными прогибами ледяного покрова вычисляются изгибающие моменты

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (1.8)$$

**2. Метод решения.** Введем безразмерные переменные

$$(x', y', W', a', L', R') = (x, y, W, a, L, R)/H, \quad \omega' = \omega\sqrt{H/g}, \quad \Phi' = \Phi/\sqrt{gH^3} \quad (2.1)$$

и коэффициенты

$$\chi = D/(\rho_0 g H^4), \quad \gamma = M/(\rho_0 H), \quad \sigma = \tau\sqrt{g/H}.$$

Уравнения (1.3) можно свести к одному уравнению для функции  $\Phi(x, y)$ , которое в безразмерных переменных имеет вид (здесь и далее штрихи опущены)

$$\chi(1 - i\omega\sigma)\Delta^3 \Phi + (1 - \gamma\omega^2)\Delta\Phi + \omega^2\Phi = -i\omega f(R). \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) будем искать в виде (суммирование проводится от  $m = 1$  до  $m = 3$ )

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \sum \Psi_m(x, y),$$

где функции  $\Psi_m(x, y)$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Psi_m + \mu_m^2\Psi_m = 0, \quad (2.3)$$

а величины  $\mu_m$  являются корнями уравнения

$$\chi(1 - i\omega\sigma)\mu^6 + (1 - \gamma\omega^2)\mu^2 - \omega^2 = 0.$$

Функция  $\Phi_0(x, y)$  представляет собой сумму

$$\Phi_0(x, y) = \Phi_0^{(1)}(x, y) + \Phi_0^{(2)}(x, y), \quad (2.4)$$

где  $\Phi_0^{(1)}(x, y)$  и  $\Phi_0^{(2)}(x, y)$  — решения задачи о воздействии на безграничную вязкоупругую пластину периодического давления, локализованного в области с центром в точках  $x = x_0$ ,  $y = 0$  и  $x = -x_0$ ,  $y = 0$  соответственно. Эти функции определяются с помощью двойного преобразования Фурье. Решение осесимметричной задачи о действии периодического давления в области с центром в точке  $x = y = 0$  на безграничную пластину имеет вид

$$\bar{\Phi}_0(r) = \frac{ia\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k\tilde{f}(k)J_0(kr)}{Z(k)} dk, \quad (2.5)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tilde{f}(k) = 2\pi \int_0^L r f(r) J_0(kr) dr; \\ Z(k) = \chi(1 - i\omega\sigma)k^6 + (1 - \gamma\omega^2)k^2 - \omega^2, \quad (2.6)$$

$J_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Решение данной задачи при нулевом значении времени релаксации ( $\sigma = 0$ ) приведено в [2, 4].

С использованием решения (2.5) из соотношения (2.4) получаем  $\Phi_0^{(1,2)} = \bar{\Phi}_0(R_{1,2})$ , где  $R_{1,2} = \sqrt{(x \mp x_0)^2 + y^2}$ .

Решение исходной задачи представляет собой четную функцию по координате  $y$ , поэтому решение уравнения (2.3) можно искать в виде

$$\Psi_m(x, y) = \int_0^\infty X_m(\alpha, x) \cos(\alpha y) d\alpha,$$

где

$$X_m(\alpha, x) = A_m(\alpha) \exp[-(a_m + ib_m)x], \quad a_m + ib_m = \sqrt{\alpha^2 - \mu_m^2}. \quad (2.7)$$

При вычислении квадратного корня из комплексной величины в (2.7) в силу граничного условия (1.7) в дальнейшем поле выбирается значение с положительной вещественной частью.

Неизвестные функции  $A_m(\alpha)$  определяются из граничного условия на вертикальной стенке (1.4) и условий на краю пластины (1.5) или (1.6) для защемленного или свободного края соответственно. При выполнении условия (1.4) получаем

$$\sum (a_m + ib_m)A_m(\alpha) = 0.$$

Два дополнительных уравнения в случае защемленного края имеют вид

$$\sum \mu_m^2 A_m(\alpha) = Q(\alpha), \quad \sum \mu_m^2 (a_m + ib_m) A_m(\alpha) = 0,$$

где

$$Q(\alpha) = -\frac{2ia\omega}{\pi^2} \int_\alpha^\infty \frac{k^3 \tilde{f}(k) \cos[x_0 \sqrt{k^2 - \alpha^2}]}{Z(k) \sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk.$$

Для свободного края дополнительные уравнения имеют вид

$$\sum \mu_m^2 (\mu_m^2 - \nu_1 \alpha^2) A_m(\alpha) = S(\alpha), \quad \sum \mu_m^2 (a_m + ib_m) (\mu_m^2 + \nu_1 \alpha^2) A_m(\alpha) = 0,$$

где

$$S(\alpha) = \frac{2ia\omega}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{k^3 \tilde{f}(k)(\nu_1 \alpha^2 - k^2)}{Z(k)\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \cos(x_0 \sqrt{k^2 - \alpha^2}) dk.$$

При вычислении функций  $Q(\alpha)$  и  $S(\alpha)$  использовалось известное соотношение (см. формулу 6.726.2 в [9])

$$\int_0^{\infty} J_0(k\sqrt{x^2 + y^2}) \cos(sy) dy = \begin{cases} \cos[x\sqrt{k^2 - s^2}]/\sqrt{k^2 - s^2}, & 0 < s < k, \\ 0, & 0 < k < s. \end{cases}$$

После определения функций  $A_m(\alpha)$  ( $m = 1, 2, 3$ ) вычисляется прогиб пластины из соотношения

$$W(x, y) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^3 \tilde{f}(k)}{Z(k)} [J_0(kR_1) + J_0(kR_2)] dk + \\ + \frac{i}{\omega} \int_0^{\infty} \cos(\alpha y) \sum \mu_m^2 A_m(\alpha) \exp[-(a_m + ib_m)x] d\alpha.$$

Значения изгибающих моментов находятся из (1.8), где

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^3 \tilde{f}(k)}{Z(k)} \left( \frac{\partial^2 J_0(kR_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_0(kR_2)}{\partial x^2} \right) dk + \\ + \frac{i}{\omega} \int_0^{\infty} \cos(\alpha y) \sum \mu_m^2 (\alpha^2 - \mu_m^2) A_m(\alpha) \exp[-(a_m + ib_m)x] d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^3 \tilde{f}(k)}{Z(k)} \left( \frac{\partial^2 J_0(kR_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_0(kR_2)}{\partial y^2} \right) dk - \\ - \frac{i}{\omega} \int_0^{\infty} \alpha^2 \cos(\alpha y) \sum \mu_m^2 A_m(\alpha) \exp[-(a_m + ib_m)x] d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 J_0(kR_{1,2})}{\partial x^2} = \frac{k}{R_{1,2}^3} \{ [(x \mp x_0)^2 - y^2] J_1(kR_{1,2}) - k(x \mp x_0)^2 J_0(kR_{1,2}) \},$$

$$\frac{\partial^2 J_0(kR_{1,2})}{\partial y^2} = \frac{k}{R_{1,2}^3} \{ [y^2 - (x \mp x_0)^2] J_1(kR_{1,2}) - ky^2 J_0(kR_{1,2}) \}.$$

**3. Результаты численных расчетов.** Для выполнения численных расчетов использовалось параболическое распределение внешнего давления в виде

$$f(r) = \begin{cases} 1 - (r/L)^2, & r < L, \\ 0, & r > L, \end{cases} \quad \tilde{f}(k) = \frac{4\pi J_2(kL)}{k^2}.$$

Размерные значения исходных параметров равны  $E = 5 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 922,5$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 2$  м,  $\tau = 0,7$  с,  $\rho_0 = 1025$  кг/м<sup>3</sup>,  $H = 10$  м,  $L = 25$  м,  $x_0 = 50$  м.

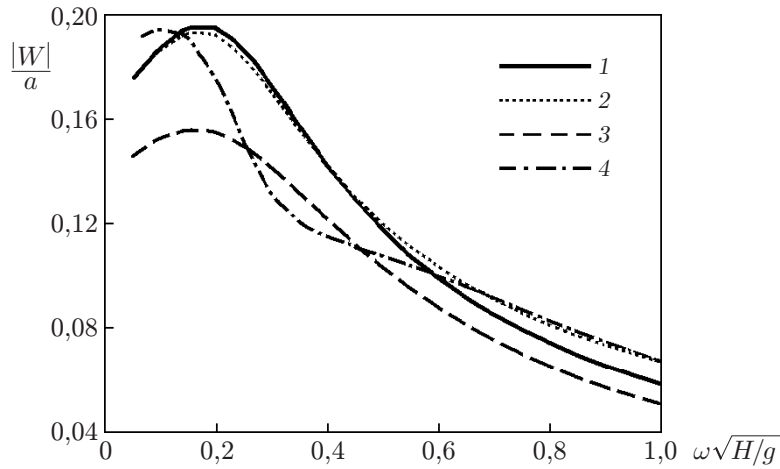


Рис. 1. Зависимость амплитуды колебаний ледяного покрова в центре области воздействия давления ( $x = x_0, y = 0$ ) от частоты:  
 1, 2 — безграничный ледяной покров (1 —  $\tau = 0,7$  с, 2 —  $\tau = 0$ ), 3 — защемленный край при  $\tau = 0,7$  с, 4 — свободный край при  $\tau = 0,7$  с

На рис. 1 показана зависимость амплитуды прогиба пластины  $|W|/a$  в центре области воздействия давления ( $x = x_0, y = 0$ ) от частоты  $\omega\sqrt{H/g}$ . Проведено сравнение решений для безграничного ледяного покрова (с учетом и без учета времени релаксации) и при наличии вертикальной стенки для двух исследуемых типов граничных условий, соответствующих случаям защемленного и свободного краев. Видно, что в случае защемленного края прогиб пластины меньше, чем для безграничного ледяного покрова, тогда как в случае свободного края при некоторых значениях частоты прогибы полубесконечной пластины больше, чем в случае безграничного покрова. Влияние вязкостных свойств ледяной пластины увеличивается с ростом частоты колебаний внешнего давления (кривые 1, 2). Наиболее значительные колебания безграничного покрова наблюдаются в диапазоне частот  $0 < \omega\sqrt{H/g} < 0,4$ . Относительное различие решений, полученных с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) времени релаксации, при этих частотах не превышает 1,5 %. Однако с увеличением частоты различие решений увеличивается и при  $\omega\sqrt{H/g} = 1$  составляет приблизительно 13 %.

На рис. 2 представлены изолинии амплитуд колебаний пластины при  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2; 0,5$  для защемленного и свободного краев. Картины прогибов существенно отличаются от симметричной картины, имеющей место в случае безграничного ледяного покрова. В случае свободного края пластины на нем возникают значительные прогибы, сопоставимые с прогибами в центре области воздействия давления.

Изолинии амплитуд изгибающих моментов при  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2$  показаны на рис. 3. При  $x = y = 0$  для защемленного края  $|M_x|/(g\rho_0 a H^2) = 1,339$ ,  $|M_y|/(g\rho_0 a H^2) = 0,402$ , для свободного края  $|M_x|/(g\rho_0 a H^2) = 0$ ,  $|M_y|/(g\rho_0 a H^2) = 0,334$ . При  $x = x_0, y = 0$  в случае защемленного края  $|M_x|/(g\rho_0 a H^2) = 1,036$ ,  $|M_y|/(g\rho_0 a H^2) = 0,936$ , в случае свободного края  $|M_x|/(g\rho_0 a H^2) = 0,954$ ,  $|M_y|/(g\rho_0 a H^2) = 1,016$ . В случае свободного края  $M_x = 0$  при  $x = 0$  в силу граничного условия (1.6). Максимальные значения  $M_x$  и  $M_y$  близки для обоих типов граничных условий на краю пластины. Однако в случае защемленного края максимальные значения  $M_x$  имеют место не в центре области воздействия давления, а на краю пластины ( $x = y = 0$ ). Это означает, что при достаточно больших значениях интенсивности внешней нагрузки в этой точке наиболее вероятно разрушение ледяного

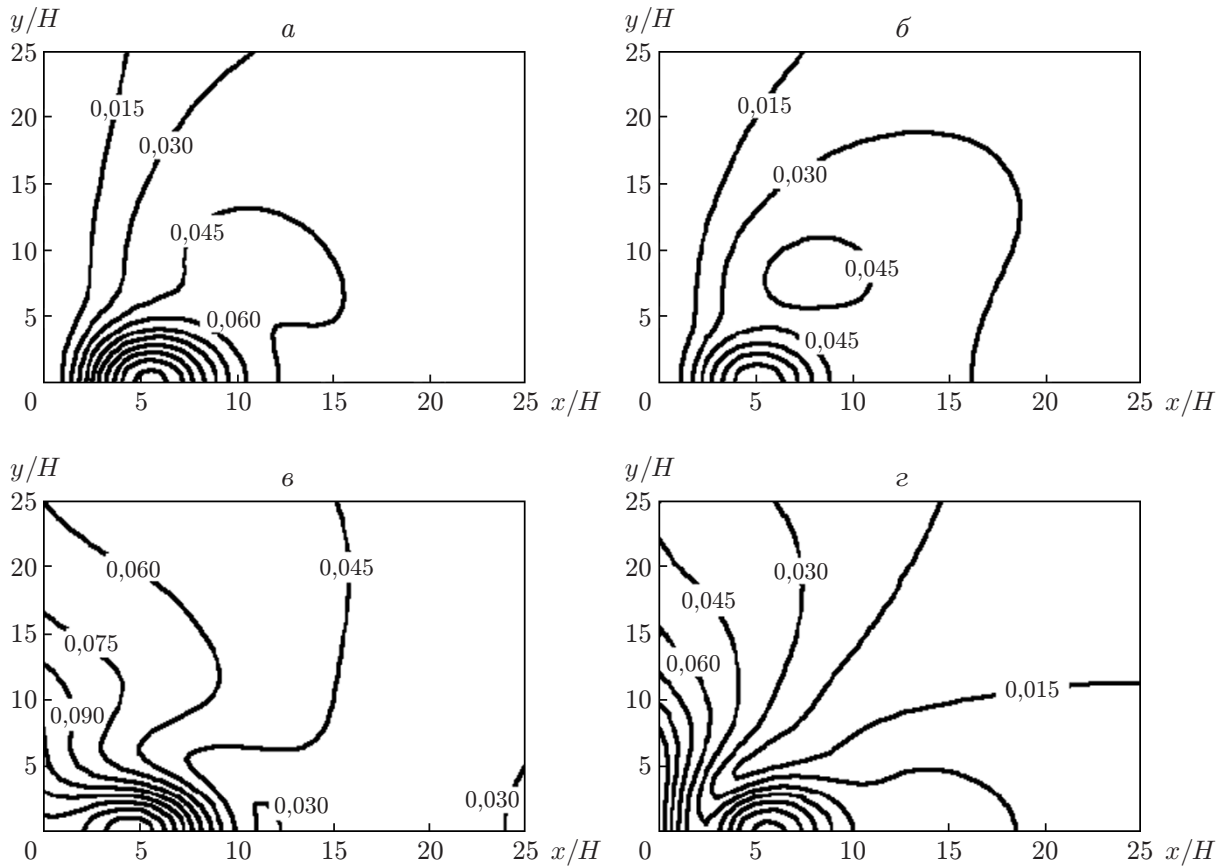


Рис. 2. Изолинии амплитуд прогиба ледяного покрова  $|W|/a$ :  
 а, в —  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2$ , б, г —  $\omega\sqrt{H/g} = 0,5$ ; а, б — заземленный край, в, г — свободный край

покрова. В случае свободного края максимальные значения изгибающих моментов имеют место вблизи центра области воздействия давления.

В жидкости под упругой пластиной в случае свободного края возможно существование краевых волн, так же как при наличии прямолинейной трещины в безграничном ледяном покрове [7, 8]. Показано, что трещина в упругой пластине, плавающей на поверхности слоя мелкой воды, является волноводом, вдоль которого может переноситься энергия волновых движений жидкости. При определении характеристик краевых волн решение для потенциала скоростей частиц жидкости, удовлетворяющего однородному уравнению (1.1) при  $\tau = 0$  и уравнению (1.2), будем искать в виде

$$\varphi(x, y, t) = F(x) \exp [i(\omega t + \chi y)],$$

где  $F(x)$  — функция, ограниченная при  $x \rightarrow \infty$ :

$$F(x) = \sum C_m \exp (iq_m x) \quad (\text{Im } q_m > 0),$$

$C_m$  — неизвестные постоянные. Значения  $q_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) находятся из решения кубического уравнения

$$\chi \zeta^3 + (1 - \gamma \omega^2) \zeta - \omega^2 = 0,$$

где  $\zeta \equiv q_m^2 + \chi^2$ .

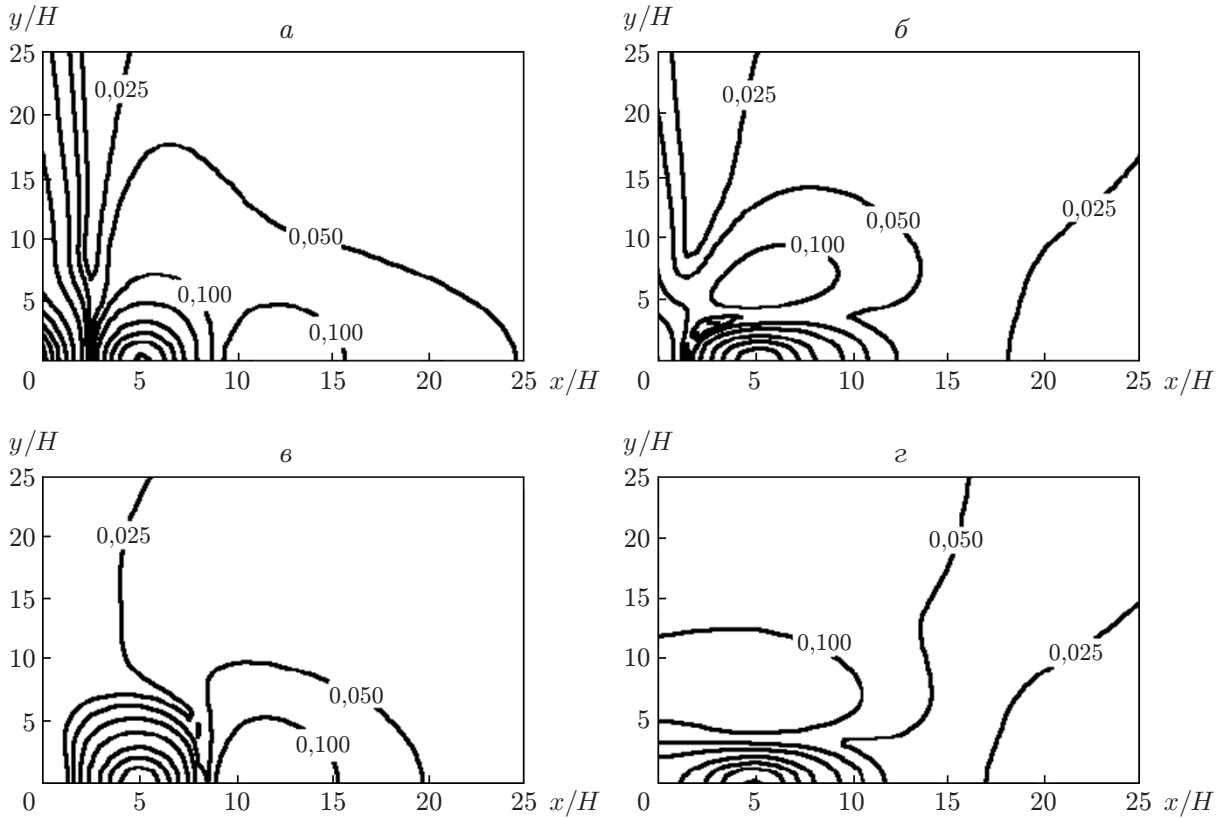


Рис. 3. Изолинии амплитуд изгибающих моментов  $|M_x|/(g\rho_0 a H^2)$  (а, в) и  $|M_y|/(g\rho_0 a H^2)$  (б, г) при  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2$  (значения амплитуд изгибающих моментов для изолиний равны 0,025; 0,05; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0):  
а, б — защемленный край, в, г — свободный край

Неизвестные постоянные  $C_m$  являются решением однородной системы линейных уравнений, следующих из условий на вертикальной стенке (1.4) и условий на свободном краю (1.6):

$$\begin{aligned} \sum q_m C_m &= 0, & \sum (q_m^2 + \varkappa^2)(q_m^2 + \nu \varkappa^2) C_m &= 0, \\ \sum q_m (q_m^2 + \varkappa^2) [q_m^2 + (2 - \nu) \varkappa^2] C_m &= 0. \end{aligned}$$

Дисперсионные соотношения для краевых волн, распространяющихся вдоль свободного края пластины и экспоненциально затухающих по мере удаления от него, находятся из равенства нулю определителя этой системы.

Наличие краевых волн в случае свободного края пластины существенно усложняет решение задачи о действии периодического внешнего давления без учета вязкостных свойств льда. Для приведенных выше исходных данных значение  $\varkappa$ , соответствующее краевой волне, незначительно превышает значение вещественного положительного корня уравнения  $Z(k) = 0$  при  $\sigma = 0$  в (2.6). Эти значения различаются в четвертой значащей цифре, чем объясняется необходимость введения параметра  $\tau$  в (1.1). Представляет интерес исследование волновых движений типа краевых волн в рассматриваемой задаче с учетом времени релаксации деформаций льда. Зависимость вещественной и мнимой частей комплексной функции  $W/a$ , описывающей прогиб на краю пластины, от координаты  $y$  при  $x = 0$  представлена на рис. 4 для  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2; 0,5$ . Значения вещественного положительного корня уравнения  $Z(k) = 0$  при  $\sigma = 0$  в (2.6) для этих частот равны  $kH \approx 0,196; 0,381$



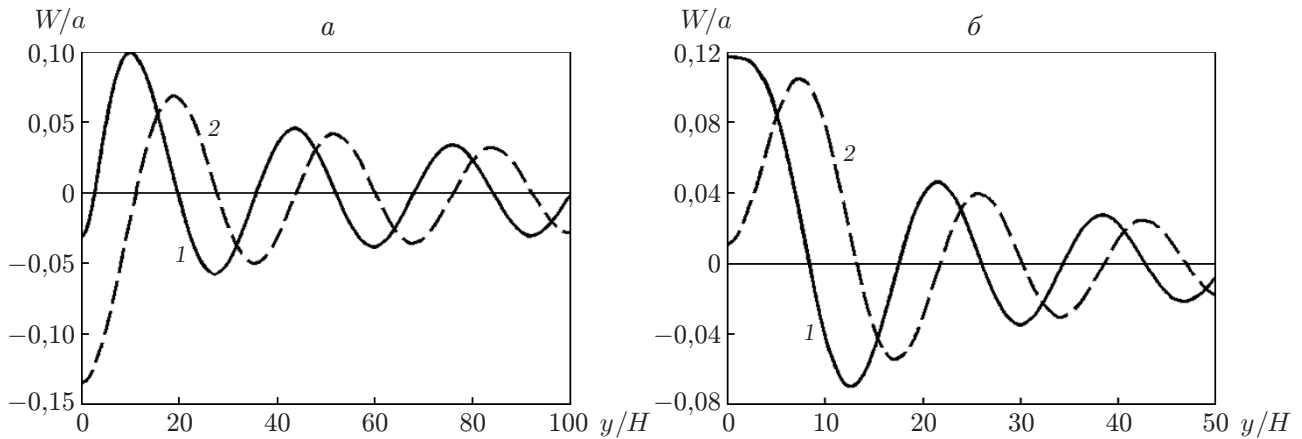


Рис. 4. Вещественная (1) и мнимая (2) части прогиба пластины  $W/a$  вдоль свободного края ( $x = 0$ ):

$a - \omega\sqrt{H/g} = 0,2$ ,  $b - \omega\sqrt{H/g} = 0,5$

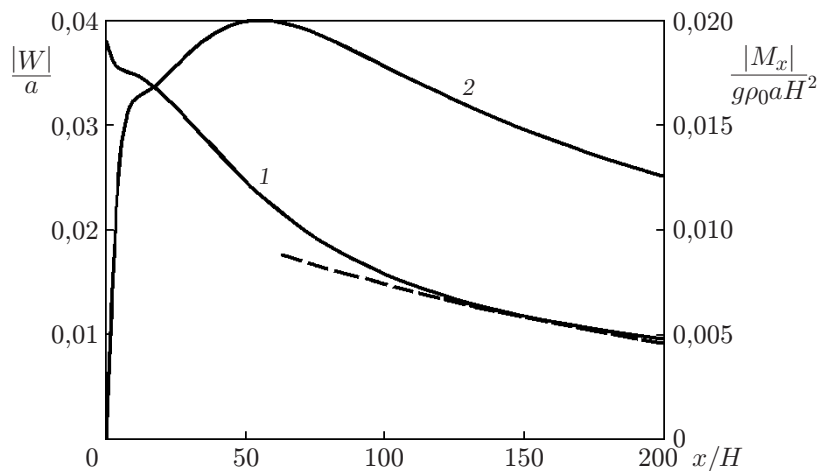


Рис. 5. Амплитуды прогиба пластины  $|W|/a$  (1) и изгибающего момента  $|M_x|/(g\rho_0 a H^2)$  (2) при  $y/H = 60$  и  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2$ :

штриховая линия — зависимость (3.1)

соответственно. Следовательно, при  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2; 0,5$  длина краевой волны  $\lambda = 2\pi/k$  составляет  $\lambda/H \approx 32,1; 16,5$  соответственно. На рис. 4 видно, что осцилляции представленных функций соответствуют этим длинам волн. Затухание колебаний с увеличением координаты  $y$  пропорционально  $y^{-1/2}$ . Амплитуды краевых волн экспоненциально убывают с ростом координаты  $x$ , причем величина убывания существенно больше длины волны  $\lambda$ . На рис. 5 показаны амплитуда прогиба  $|W|/a$  при  $y/H = 60$  для  $\omega\sqrt{H/g} = 0,2$  и амплитуда прогиба, заданная аппроксимирующей кривой:

$$|W|/a \approx 0,0238 \exp(-\beta x/H) \quad (x \rightarrow \infty), \quad \beta = 0,00477. \quad (3.1)$$

В этом случае значение показателя скорости затухания  $\beta^{-1} \approx 210$ , что значительно превышает длину волны  $\lambda/H \approx 32,1$ . Как отмечено в [8], изгибающий момент  $M_x$ , создаваемый в пластине краевой волной, достигает максимума вблизи края на расстоянии, сопоставимом с длиной волны (см. рис. 5). Следовательно, в задаче о воздействии периодического внешнего давления в случае свободного края вдали от области действия давления возникают волновые движения, близкие по характеристикам к краевым волнам. Энергия волнового

движения жидкости переносится на большие расстояния вдоль свободного края ледяного покрова.

Автор выражает благодарность Л. А. Ткачевой за полезные обсуждения и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973.
3. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer, 1996.
4. **Стурова И. В.** Влияние периодического поверхностного давления на прямоугольную упругую пластину, плавающую на мелководье // Прикл. математика и механика. 2006. Вып. 3. С. 417–426.
5. **Kerr A. D., Kwak S. S.** The semi-infinite plate on a Winkler base, free along the edge, and subjected to a vertical force // Arch. Appl. Mech. 1993. V. 63, N 3. P. 210–218.
6. **Kerr A. D., Kwak S. S.** The clamped semi-infinite plate on a Winkler base subjected to a vertical force // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, N 3. P. 457–470.
7. **Марченко А. В., Семенов А. Ю.** Краевые волны в мелкой жидкости под упругой пластиной с трещиной // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 4. С. 185–189.
8. **Marchenko A.** Parametric excitation of flexural-gravity edge waves in the fluid beneath an elastic ice sheet with a crack // Eur. J. Mech. B. Fluids. 1999. V. 18, N 3. P. 511–525.
9. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962.

*Поступила в редакцию 22/І 2016 г.,  
в окончательном варианте — 11/ІІ 2016 г.*

---