

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ НА ВХОДЕ И ВЫХОДЕ

А. Б. Шигаров

Институт катализа СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрен механизм низкочастотной автоколебательной неустойчивости одномерного двухфазного течения в канале с гидравлическим сопротивлением на входе и выходе. Механизм основан на чувствительности расхода жидкости на входе к изменению давления внутри канала, а также чувствительности давления к изменению расхода газа на выходе (при постоянной массовой скорости фазового перехода жидкость — газ в единице объема). Сделан спектральный анализ устойчивости стационарного решения краевой задачи для нелинейной системы уравнений гиперболического типа в рамках двухскоростной модели газожидкостного течения. Получены параметрические границы области неустойчивости. Существование автоколебаний в этой области параметров подтверждено численным решением нестационарной краевой задачи.

В различных областях техники используются устройства, принцип действия которых состоит в том, что на вход непрерывно подается жидкость, внутри устройства происходит полное превращение жидкости в газ, выводимый из него через гидравлическое сопротивление, которое поддерживает необходимый уровень давления внутри устройства или ускоряет газовый поток для создания реактивной тяги. В качестве примера можно указать на жидкостные ракетные двигатели и каталитические газогенераторы космических систем, трубчатые парогенераторы для котлов и химических реакторов.

Одним из интересных, но на практике крайне нежелательных явлений при работе таких устройств является неустойчивость стационарного режима работы в определенных областях параметров, приводящая к возникновению периодических колебаний давления, расхода газа на выходе, расхода жидкости на входе, размеров двухфазной зоны.

Несмотря на различие технических устройств (труб, реакторов с зернистым слоем катализатора, камер сгорания), а также протекающих в них физико-химических процессов (испарения, горения, каталитического разложения жидкости), для некоторого класса наблюдаемых колебаний предполагается существование единых механизмов неустойчивости. Можно исследовать возникновение таких колебаний в рамках достаточно общей математической модели.

В данной работе рассматривается механизм неустойчивости, который основан на 1) сильной чувствительности расхода жидкости на входе к изменению давления внутри устройства, 2) сильной чувствительности давления к изменению расхода газа на выходе, 3) постоянной массовой скорости фазового перехода жидкость — газ в единице объема. Период колебаний много больше времени распространения акустических волн, т. е. колебания давления происходят практически в одной фазе во всем объеме, выполняя роль отрицательной обратной связи для колебательной системы. Существенно при этом запаздывание по времени в изменении расхода газа на выходе по отношению к изменению расхода жидкости на входе устройства.

Аналогичный механизм колебаний рассматривается в теории неустойчивости жидкостных ракетных двигателей для низкочастотных колебаний [1]. Результаты параметри-

ческого анализа неустойчивости получены при использовании математической модели, основанной на гипотезе ступенчатой кривой выгорания. Согласно этой гипотезе, для всех частиц жидкости, попадающих в камеру, существует время запаздывания, в течение которого с жидкостью ничего не происходит, а затем жидкость мгновенно превращается в газ. Достоинство данной модели в простоте математического анализа и ясности физического понимания механизма неустойчивости, однако для изучения работы конкретных устройств такая идеализация является слишком сильной, и необходимо вводить в рассмотрение характеристики двухфазного течения.

В литературе по динамике парожидкостных течений в обогреваемых каналах [2] проявление аналогичного механизма неустойчивости называют колебаниями волны плотности, которые традиционно анализируют в рамках одномерной модели двухфазного течения с гидравлическими сопротивлениями, сосредоточенными на входе и выходе канала. Однако спектральный анализ устойчивости проводят, предполагая, что плотность газовой фазы постоянная, т. е. плотность двухфазной смеси определяется только объемным газосодержанием. Такой приближенный способ анализа неустойчивости допускает тем больше погрешности, чем больше объемное газосодержание в потоке, и вообще неприменим, если в канале имеется чисто газофазный участок течения, который существенно влияет на динамику давления. Последний случай характерен для реакторов каталитической газогенерации.

Вопрос о возникновении неустойчивости данного типа в рамках одномерной математической модели двухфазного течения с учетом сжимаемости газовой фазы и наличия газофазного участка течения рассматривался в [3]. Однако полученные результаты ограничивались случаем псевдогомогенной модели двухфазного течения (равенства линейной скорости движения жидкости и газа).

В настоящей работе исследуется двухскоростная модель газожидкостного потока, в котором скорость движения жидкости меняется одновременно по всей длине канала в соответствии со скоростью на входе. При этом жидкость можно рассматривать как твердую струю с уменьшающимся по длине поперечным сечением за счет фазового перехода. Такая идеализация позволяет сделать точный спектральный анализ устойчивости стационарного решения краевой задачи для нелинейной системы уравнений гиперболического типа в рамках двухскоростной модели газожидкостного течения.

Постановка задачи. Математическая модель одномерного нестационарного газожидкостного течения в канале включает в себя уравнения ($0 < z < L, t > 0$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{ж}} \beta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{\text{ж}} \beta u_{\text{ж}}) = -W \quad \text{при} \quad \beta > 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_{\text{ж}}}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{P}{\rho_{\text{г}}} = C = \text{const}; \quad (5)$$

$$\rho = \beta \rho_{\text{ж}} + (1 - \beta) \rho_{\text{г}}, \quad \rho_{\text{ж}} = \text{const}; \quad (6)$$

$$G = \beta \rho_{\text{ж}} u_{\text{ж}} + (1 - \beta) \rho_{\text{г}} u_{\text{г}} \quad (7)$$

и краевые условия

$$z = 0: \quad \beta = 1; \quad (8)$$

$$z = 0: \quad G = \Phi(P); \quad (9)$$

$$z = L: \quad G = \Psi(P). \quad (10)$$

Здесь L — длина канала, м; z, t — координаты по длине и времени, м, с; $\rho, \rho_{ж}, \rho_{г}$ — плотность двухфазной смеси, жидкости и газа, кг/м³; G — массовый расход двухфазной смеси через единицу площади поперечного сечения канала, кг/(м²·с); β — объемная доля жидкости в смеси; $u_{ж}, u_{г}$ — линейная скорость движения жидкости и газа, м/с; W — массовая скорость фазового перехода жидкость — газ в единице объема канала, кг/(с·м³); P — давление, Н/м²; C — константа, характеризующая состав и температуру газа, м²/с²; Φ, Ψ — функции, характеризующие гидравлические условия ввода жидкости в канал и вывода газа из канала.

Скорость фазового перехода жидкость — газ в единице объема постоянная. Длина двухфазной зоны меньше длины канала, за ней существует чисто газофазное течение. Возмущения давления и скорости газа распространяются по длине мгновенно. Перепада давления по длине канала нет. Скорость движения жидкости меняется одновременно по всей длине канала. В силу этих допущений закон сохранения импульса для жидкости и газа сводится к (3), (4). Плотность жидкости, состав и температура газа постоянные, газ идеальный (5)–(7). На вход в канал поступает жидкость (8), расход которой зависит от давления (9). На выходе истекает газ, расход которого также зависит от давления (10).

Стационарное решение. Предположим, что функция $\Phi(P)$ монотонно убывает, а функция $\Psi(P)$ монотонно возрастает в соответствии с физическим смыслом. Это означает, что при увеличении давления в канале расход жидкости на входе уменьшается, а расход газа на выходе увеличивается, причем гидравлические условия на входе и выходе (9), (10) однозначно определяют стационарный расход G_s и давление P_s :

$$\Phi(P_s) = \Psi(P_s) = G_s.$$

Индекс s здесь и далее обозначает соответствующую стационарную величину.

Уравнение (2) с краевым условием (8) приводится к стационарному:

$$G_s \frac{d\beta_s}{dz} = -W, \quad z \in [0, L], \quad \beta_s(0) = 1, \quad (11)$$

что и определяет единственное стационарное решение задачи (1)–(10):

$$\beta_s(z) = \begin{cases} 1 - zW/G_s, & \text{если } z \in [0, L_{жs}], \quad L_{жs} = G_s/W, \\ 0, & \text{если } z \in [L_{жs}, L], \quad L_{гs} = L - L_{жs}, \end{cases} \quad (12)$$

$$u_{жs} = \frac{G_s}{\rho_{ж}}, \quad \rho_{гs} = \frac{P_s}{C}, \quad u_{гs} = \frac{G_s}{\rho_{гs}}, \quad \rho_s(z) = \beta_s \rho_{ж} + (1 - \beta_s) \rho_{гs},$$

где $L_{жs}, L_{гs}$ — стационарная длина двухфазной и газофазной зоны канала.

Анализ устойчивости стационарного решения в линейном приближении. В силу условий (5), (6) выполняется равенство

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_{ж} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1 - \beta}{C} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{C} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \left(\rho_{ж} - \frac{P}{C} \right) \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1 - \beta}{C} \frac{dP}{dt},$$

и можно исключить из уравнения (1) переменную ρ :

$$\left(\rho_{ж} - \frac{P}{C} \right) \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1 - \beta}{C} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Используя условия (3), (5), уравнение (2) приведем к виду

$$\rho_{ж} \frac{\partial \beta}{\partial t} + G(0, t) \frac{\partial \beta}{\partial z} = -W. \quad (14)$$

Для газофазной зоны, начинающейся после исчезновения жидкости, вместо (13), (14) достаточно одного уравнения, полученного из (1) с учетом (5), (6) при $\beta = 0$:

$$\frac{1}{C} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

Линеаризуем уравнения (13)–(15) относительно малых возмущений стационарного решения, делая подстановку

$$\beta(z, t) = \beta_s(z) + \beta''(z, t), \quad G(z, t) = G_s + G''(z, t), \quad P(t) = P_s + P''(t)$$

и оставляя в полученных уравнениях слагаемые, линейные относительно возмущений β'' , G'' , P'' . В итоге получим систему двух уравнений для двухфазной зоны канала ($0 < z < L_{жс}$, $t > 0$):

$$(\rho_{ж} - \rho_{гс}) \frac{\partial \beta''}{\partial t} + \frac{(1 - \beta_s)}{C} \frac{dP''}{dt} + \frac{\partial G''}{\partial z} = \hat{v}, \quad (16)$$

$$\rho_{ж} \frac{\partial \beta''}{\partial t} + G_s \frac{\partial \beta''}{\partial z} + G''(0, t) \frac{d\beta_s}{dz} = 0, \quad (17)$$

а также одно уравнение для газофазной зоны канала ($L_{жс} < z < L$, $t > 0$):

$$\frac{1}{C} \frac{dP''}{dt} + \frac{\partial G''}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Добавим к этой системе линеаризованные краевые условия (8)–(10):

$$z = 0: \quad \beta'' = 0; \quad (19)$$

$$z = 0: \quad G'' = \frac{d\Phi}{dP} (P_s) P''; \quad (20)$$

$$z = L: \quad G'' = \frac{d\Psi}{dP} (P_s) P''. \quad (21)$$

Преобразуем в уравнении (17) член $G''(0, t)$, используя условие (20), а также подставим в уравнение (16) выражение для стационарного профиля объемной доли жидкости (12). После этого приведем систему уравнений (16)–(21) к безразмерной форме, взяв за единицы масштаба независимых переменных стационарные величины: $G' = G''/G_s$, $P' = P''/P_s$, $\beta' = \beta''$, а за единицы масштаба длины и времени — длину двухфазной зоны и время пребывания жидкости в этой зоне (для стационарного решения): $z' = z/L_{жс}$, $t' = t/T_{жс}$, где $L_{жс} = G_s/W_s$, $T_{жс} = L_{жс}/u_{жс} = \rho_{ж}/W$. В итоге запишем линейную однородную систему уравнений в частных производных для безразмерных возмущений стационарного решения при $t' > 0$:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial \beta'}{\partial t'} + \varepsilon z' \frac{dP'}{dt'} + \frac{\partial G'}{\partial z'} = 0, \quad z' \in [0, 1]; \quad (22)$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial t'} + \frac{\partial \beta'}{\partial z'} + h_0 P' = 0, \quad z' \in [0, 1]; \quad (23)$$

$$\varepsilon \frac{dP'}{dt'} + \frac{\partial G'}{\partial z'} = 0, \quad z' \in [1, 1 + d]. \quad (24)$$

Краевые условия следующие:

$$z' = 0: \quad \beta' = 0; \quad (25)$$

$$z' = 0: \quad G' = -h_0 P'; \quad (26)$$

$$z' = 1 + d: \quad G' = h_1 P'. \quad (27)$$

В систему уравнений (22)–(27) входят четыре неотрицательных безразмерных постоянных параметра:

$$\varepsilon = \frac{\rho_{\Gamma s}}{\rho_{\text{ж}}}, \quad d = \frac{L_{\Gamma s}}{L_{\text{ж} s}}, \quad h_0 = \frac{-d\Phi}{dP} (P_s) \frac{P_s}{G_s}, \quad h_1 = \frac{d\Psi}{dP} (P_s) \frac{P_s}{G_s}. \quad (28)$$

Исследуем на устойчивость нулевое стационарное решение задачи (22)–(27) подстановкой $\beta'(z', t') = \beta^*(z') \exp(\lambda t')$, $G'(z', t') = G^*(z') \exp(\lambda t')$, $P'(t') = P^* \exp(\lambda t')$, где все величины, кроме z' , t' , рассматриваются в комплексной плоскости, вектор-функция (β^*, G^*, P^*) от переменной z является собственной функцией для задачи (22)–(27), а параметр λ — собственным числом (точкой спектра). В итоге получим спектральную задачу, состоящую в том, чтобы найти такие λ , при которых существуют ненулевые решения $\beta^*(z)$, $G^*(z)$, P^* системы уравнений:

$$\frac{dG^*}{dz'} + (1 - \varepsilon)\lambda\beta^* + \varepsilon\lambda z' P^* = 0, \quad z' \in [0, 1]; \quad (29)$$

$$\frac{d\beta^*}{dz'} + \lambda\beta^* + h_0 P^* = 0, \quad z' \in [0, 1]; \quad (30)$$

$$\frac{dG^*}{dz'} + \varepsilon\lambda P^* = 0, \quad z' \in [1, 1 + d]. \quad (31)$$

Краевые условия имеют вид

$$z' = 0: \quad \beta^* = 0; \quad (32)$$

$$z' = 0: \quad G^* = -h_0 P^*; \quad (33)$$

$$z' = 1 + d: \quad G^* = h_1 P^*. \quad (34)$$

Уравнение (30) для двухфазной зоны проинтегрируем по длине этой зоны с начальным условием (32), рассматривая λ , P^* как неизвестные параметры:

$$\beta^*(z') = - \int_0^{z'} h_0 P^* \exp(\lambda(z - z')) dz = h_0 P^* \frac{\exp(-\lambda z') - 1}{\lambda}. \quad (35)$$

С учетом зависимости (35) уравнение (29) приводится к виду

$$\frac{dG^*}{dz'} = -[(1 - \varepsilon)h_0(\exp(-\lambda z') - 1) + \varepsilon\lambda z'] P^* = 0. \quad (36)$$

Интегрируя уравнение (36) с начальным условием (33) по длине двухфазной зоны, получим

$$G^*(1) = -h_0 P^* + (1 - \varepsilon)h_0 \left(\frac{\exp(-\lambda) - 1}{\lambda} + 1 \right) P^* - \frac{\varepsilon\lambda P^*}{2}. \quad (37)$$

Интегрируя уравнение (31) по длине газовой зоны, запишем

$$G^*(1 + d) = G^*(1) - \varepsilon d \lambda P^*. \quad (38)$$

Подставляя выражение (37) в (38), имеем уравнение, связывающее переменные G^* и P^* на выходе канала:

$$G^*(1 + d) = -h_0 P^* + (1 - \varepsilon)h_0 \left(\frac{\exp(-\lambda) - 1}{\lambda} + 1 \right) P^* - \varepsilon\lambda P^*(1/2 + d). \quad (39)$$

Поскольку на выходе канала должно быть выполнено также условие (34), то вопрос о существовании ненулевых решений задачи (29)–(34) сводится к условию обращения в нуль

детерминанта системы двух линейных однородных уравнений (34), (39) относительно неизвестных P^* , $G^*(1+d)$:

$$F = h_1 + h_0 - (1 - \varepsilon)h_0 \left(\frac{\exp(-\lambda) - 1}{\lambda} + 1 \right) + \varepsilon\lambda(1/2 + d) = 0. \quad (40)$$

Таким образом, получено спектральное (комплексное) уравнение (40) вида $F(\lambda) = 0$, существование хотя бы одного из корней λ которого в правой половине комплексной плоскости указывает на неустойчивость стационарного решения исходной системы уравнений (1)–(10) в линейном приближении. В уравнение (40) входят четыре безразмерных параметра: h_0 , h_1 , ε , d , которые и влияют в общем случае на устойчивость.

Параметрический анализ областей неустойчивости. Численный анализ методом [3] расположения точек спектра, т. е. корней λ уравнения (40) на комплексной плоскости, показывает, что существуют определенные области изменения параметров h_0 , h_1 , ε , d , для которых пара комплексно-сопряженных чисел $\lambda = r \pm i\omega$ расположена в правой половине комплексной плоскости ($r > 0$), что означает неустойчивость стационарного решения в линейном приближении. При этом численное интегрирование нелинейной краевой задачи (1)–(10) методом пристрелки [4] показывает, что в таких областях параметров произвольное возмущение стационарного решения приводит к установлению автоколебаний постоянной частоты и амплитуды. На рис. 1 представлены колебания безразмерного расхода G' жидкости на входе в канал и газа на выходе из канала (линии 1 и 2 соответственно) в зависимости от безразмерного времени t' при $\varepsilon = 0,02$, $h_1 = 1$, $h_0 = 6$, $d = 10$. Амплитуда колебаний плавно стремится к нулю при приближении к параметрической границе устойчивости, т. е. можно говорить о мягком возбуждении колебаний.

Выясним физический смысл параметров h_0 , h_1 в ряде частных случаев. Если поступление жидкости на входе в канал описывается законом $G = \Phi(P) = ((P_0 - P)/k_0)^{1/2}$, где k_0 — коэффициент входного гидравлического сопротивления, P_0 — постоянное давление перед входом в канал, то по определению (28) $h_0 = (2\Delta P_0/P_s)^{-1}$, где $\Delta P_0 = P_0 - P_s$, т. е. параметр h_0 обратно пропорционален удвоенному стационарному перепаду давления на входе в канал ΔP_0 . Для докритического истечения газа на выходе канала $G = \Psi(P) = ((P - P_1)/k_1)^{1/2}$, где k_1 — коэффициент выходного гидравлического сопротивления, P_1 — постоянное давление после выхода из канала, и по определению (28) $h_1 = (2\Delta P_1/P_s)^{-1}$, где $\Delta P_1 = P_s - P_1$, т. е. параметр h_1 обратно пропорционален удвоенному стационарному перепаду давления на выходе канала ΔP_1 . Для критического истечения газа на выходе канала $G = \Psi(P) = P/k_1$ и, следовательно, $h_1 = 1$.

На рис. 2 показаны границы областей неустойчивости в плоскости параметров (d, h_0) при $h_1 = 1$ и $\varepsilon = 0,01; 0,02; 0,03$ (линии 1–3), причем области неустойчивости распо-

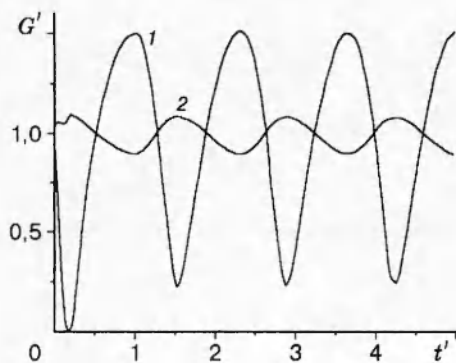


Рис. 1

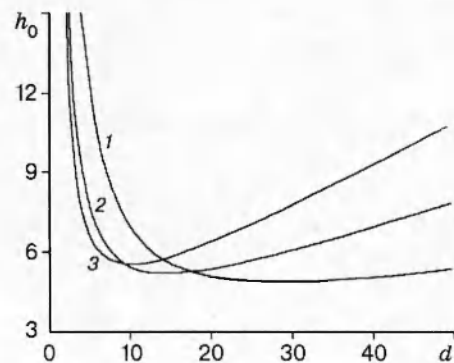


Рис. 2

ложены выше границ. Границы отвечают случаю, когда самая правая пара комплексно-сопряженных корней спектрального уравнения (40) находится на мнимой оси. Неустойчивость всегда возникает при достаточно большом значении h_0 (малом перепаде давления на входе в канал). Для заданного отношения плотности фаз, например $\varepsilon = 0,02$, существует критический уровень параметра $h_0 = 5$, ниже которого при $h_0 < 5$ колебаний нет, а немного выше которого при $h_0 > 5$ колебания возникают при определенном соотношении $d = 15$ между длинами газофазной и двухфазной зон канала. При дальнейшем увеличении h_0 , например при $h_0 = 6$, интервал неустойчивости по параметру d расширяется ($8 < d < 30$). В общем случае устойчивость отвечает достаточно большому либо, наоборот, достаточно малому значению d . Например, когда длина двухфазной зоны равна длине канала ($d = 0$), стационарное решение устойчиво независимо от значения h_0 и ε . Отметим, что расширение области устойчивости относительно h_0 при сильном увеличении параметра d соответствует результатам анализа односкоростной (псевдогомогенной) модели двухфазного течения [3]. В то же время расширение области устойчивости относительно h_0 при сильном уменьшении параметра d на первый взгляд неожиданно. По-видимому, это объясняется введенной в модель гипотезой о движении жидкости в виде твердой струи. В этом случае, в отличие от псевдогомогенной модели, уменьшение длины газофазного участка может обеспечить устойчивость, так как уменьшается необходимое для возникновения колебаний запаздывание во времени между изменением расхода газа на выходе и расхода жидкости на входе. В псевдогомогенной модели такое запаздывание обеспечивается самим двухфазным участком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натанзон М. С. Неустойчивость горения. М.: Машиностроение, 1986.
2. Boure J. A., Bergles A. E., Tong L. S. Review of two-phase flow instability // Nucl. Eng. and Design. 1973. V. 25. P. 165–192.
3. Стегасов А. Н., Шигаров А. Б., Кириллов В. А. Аналитический метод исследования неустойчивой работы реакторов с фазовым переходом жидкость — газ // Теорет. основы хим. технологии. 1995. Т. 29, № 5. С. 475–481.
4. Шигаров А. Б., Стегасов А. Н., Кириллов В. А. Метод расчета переходных и колебательных режимов при течении двухфазных потоков с фазовым переходом // Теорет. основы хим. технологии. 1991. Т. 25, № 4. С. 524–532.

Поступила в редакцию 5/V 1996 г.
