

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКИ СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ ПОРИСТОЙ ЗАГОТОВКИ

А. Г. Залазинский, А. П. Поляков

Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург

Рассмотрены модель пластически сжимаемой пористой среды при условии текучести цилиндрического типа и связанные с этим условием определяющие соотношения, обеспечивающие независимые механизмы сдвига и уплотнения пористой массы. Это позволяет применить известные теоремы теории пластичности для анализа пластически сжимаемых сред и получить аналитические решения ряда краевых задач, в том числе с учетом условий на поверхностях сильных разрывов. При выборе физической модели пористого тела, определении свойств и размеров представительного объема использованы результаты натурных исследований периодичности структур некомпактных материалов с помощью вейвлетного анализа. Решена задача экструзии пористой массы через коническую матрицу.

В настоящее время в теории пластичности пористых тел развиваются два основных подхода: феноменологический [1], основанный на экспериментальных исследованиях кривых течения пористых тел, особенности строения которых не рассматриваются; структурно-феноменологический [2], в соответствии с которым с учетом особенностей структуры конструируется физическая модель деформируемого тела, а затем осуществляется экспериментальная проверка определяющих соотношений. В этом случае процесс деформирования пористых тел можно рассматривать в рамках механики структурно-неоднородных сред. Носителями пластического течения на мезоуровне являются зерна (конгломераты зерен) и поры, составляющие в совокупности представительный мезообъем [3]. В настоящей работе рассмотрены определяющие соотношения для представительной ячейки (мезообъема) пластически сжимаемого тела; с использованием континуальной модели механики сплошной среды описан процесс деформирования макрообъема, состоящего из пространственно однородных микрообъемов с различными свойствами.

Проблема выделения представительного объема в рамках модели структурно-неоднородного тела решается, вообще говоря, неоднозначно. Используются различные подходы: от осреднения на представительный объем макрохарактеристик всего рассматриваемого тела до учета на основе теории случайных функций стохастических характеристик на макро- и микроуровне [2]. При создании и идентификации модели возникает проблема выявления закономерностей структуры материала, в том числе на микроуровне, определения пространственной частоты повторяемости элементов (зерен, пор, трещин), а также статистической характеристики их распределения и параметров анизотропии, выявления наличия масштабной инвариантности и др. Периодичностью структуры в данном случае и определяется выбор представительного объема. В работе [4] с помощью вейвлетного ана-

лиза экспериментально выявлено наличие периодичности реальных структур пористых материалов.

1. Условия текучести пористых тел. При решении краевых задач механики обработки давлением некомпактных материалов необходимо учитывать необратимые деформации объемного сжатия (растяжения). Еще Кулоном в модели грунта рассмотрена пирамида предельного состояния [5]. Условие текучести для пластически сжимаемой среды в виде пирамиды Кулона, ограниченной плоскостью постоянного гидростатического давления (пирамиды Кулона — Мора), использовано в [1, 6]. Р. Мизес и Ф. Шлейхер предложили условие текучести, которому в пространстве напряжений соответствует круговой конус, ограниченный плоскостью постоянного гидростатического давления (конус Мизеса — Шлейхера) [5]. Названные условия текучести относятся к кусочно-гладким. В [1] показано, что определяющие соотношения таких моделей можно рассматривать в рамках теории упрочняющегося пластического тела с сингулярными поверхностями нагружения.

Гладкое условие текучести пористых тел предложено в [7]. Принято, что пластическая сжимаемость среды при деформировании обусловлена изменением суммарного объема трещин и пор. На основе данного утверждения в предположении статистической однородности среды для пористого тела введена поверхность нагружения эллиптического типа:

$$\alpha_1 \tau^2 + \alpha_2 \sigma^2 - \sigma_s^2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_1(\theta), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\theta).$$

Здесь $\tau = \sqrt{0,5 s_{ij} s_{ij}}$ — интенсивность касательных напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $\sigma = \sigma_{ii}/3$ — среднее нормальное напряжение; σ_s — напряжение текучести при одноосном растяжении; $\theta = 1 - \rho$ — пористость; ρ — относительная плотность.

Гладкие условия текучести при аналогичных допущениях о характере пластического деформирования материала с порами цилиндрической и сферической формы предложены в [8–10]. Перечисленные гладкие условия текучести при отсутствии пористости совпадают с условием текучести Мизеса для компактных материалов.

В работе [6] введено условие текучести цилиндрического типа

$$\tau^2 + \sigma^2 = \beta^2 \tau_s^2, \quad \beta = \beta(\theta), \quad \tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}.$$

Это условие является более простым по сравнению с условием текучести эллиптического типа.

Наиболее общий случай деформирования для данного условия реализуется на ребре поверхности текучести, представляющем собой линию пересечения цилиндра Мизеса (состояние чистого сдвига) и “доньшка” (состояние всестороннего растяжения или сжатия).

Основным отличием условия текучести цилиндрического типа от условия эллиптического типа является отсутствие дилатационного соотношения, связывающего характеристики объемной и сдвиговой деформации. Соответствующая модель уплотняемого тела является моделью с независимыми механизмами сдвига и уплотнения, что существенно облегчает определение пределов текучести на сжатие и сдвиг в виде $\alpha_2 = \alpha_2(\theta)$, $\alpha_1 = \alpha_1(\theta)$. Указанные модули могут быть определены по отдельности с использованием независимых моделей (теоретических и (или) натуральных) напряженного состояния, поскольку не связаны соотношением дилатации. Условие текучести цилиндрического типа целесообразно применять к решению краевых задач механики пластического течения пористых сред в случаях, когда дилатация отсутствует или влияние этого эффекта несущественно. Например, отмечено отсутствие уплотнения в зеве матрицы при экструзии пористого материала [6]. Использование условия текучести цилиндрического типа также упрощает решение краевых задач с разрывными полями скоростей и напряжений.

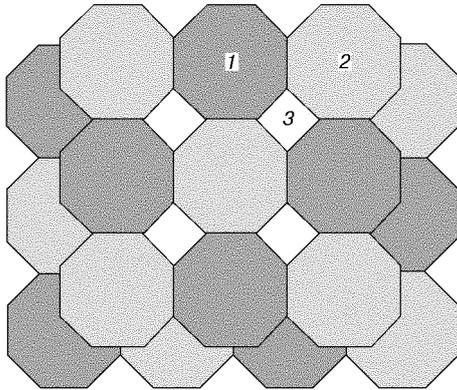


Рис. 1

Рис. 1. Модель укладки частиц разного сорта:
1 — структура 1; 2 — структура 2; 3 — пора

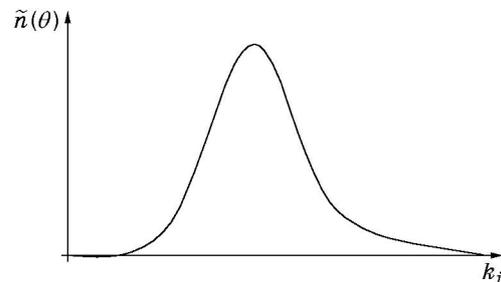


Рис. 2

Рис. 2. Распределение пор по размерам

2. Физическая модель деформируемого пористого тела. Изучаемая в настоящей работе физическая модель пластически сжимаемого тела рассматривается как детерминированная система в рамках механики структурно-неоднородных (гетерогенных) сред [11]. Правомерность такого подхода подтверждают результаты исследований структуры поверхностей брикетов, полученных компактированием титановой губки с помощью вейвлетного анализа, и выявленная периодичность реальной внешне хаотичной структуры материала на микроуровне с пространственной частотой повторяемости элементов порядка 3–5 диаметров зерна [4].

Для рассматриваемого тела приняты следующие допущения:

— размеры пор во много раз превышают молекулярно-кинетические размеры кристаллической решетки каркаса и во много раз меньше расстояний, на которых макрохарактеристики среды существенно меняются;

— смесь монодисперсная, поры присутствуют в каждом элементарном объеме в виде включений некоторого осредненного размера;

— эффекты, связанные с пульсацией, вращением и поступательным движением пор, отсутствуют, так же как переход массы из газовой фазы в твердую (каркас) и обратно.

Модель укладки среды, состоящей из частиц разного сорта, представлена на рис. 1. Осредненная пористость в выбранном элементарном объеме определяется в соответствии

с выражением $\tilde{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{\theta_1}^{\theta_{\max}} \theta_i \tilde{n}(\theta)$, где k_i — характерный размер поры (рис. 2).

На основе указанных предположений в соответствии со структурно-феноменологическим подходом рассмотрена модель среды [12], представляющей собой конгломерат статистически-однородных плотно упакованных частиц изометрической формы, на границах которого локализируются несплошности. Частицы, принимающие после деформации форму многогранников, образуют регулярные структуры — решетки, подобные кристаллографическим [13]. В узлах решетки располагаются дефекты — поры, заполненные газовой фазой. Схема укладки приведена на рис. 3, а.

При пластическом сжатии плотно уложенных частиц, изначально имевших точечные контакты между собой, происходит их затекание в свободное пространство (поры). Точеч-

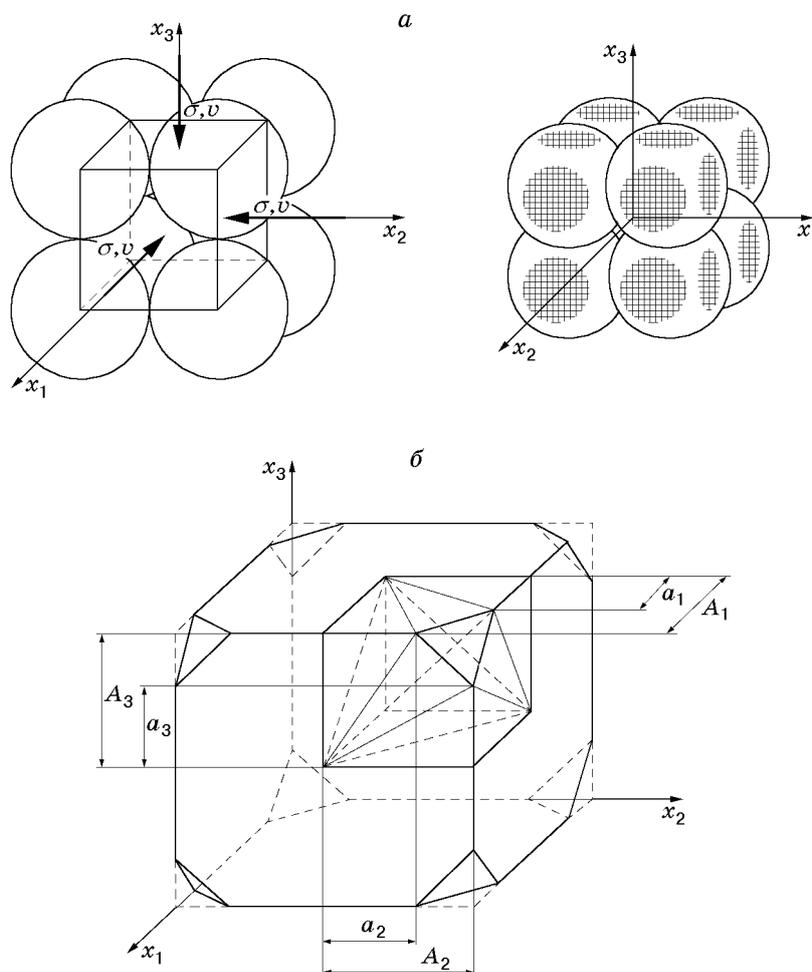


Рис. 3. Схема укладки частиц при моделировании пористого тела (а) и конечно-элементная дискретизация ячейки (б)

ные контакты под действием нагрузки превращаются в контактные поверхности; форма частиц меняется, приближаясь к форме многогранников; поры уменьшаются, оставаясь до некоторого момента многогранниками, а затем при малой пористости принимают сферическую форму [12].

В изучаемой модели пористого уплотняемого тела необходимо определить нагрузки развитого пластического течения, изменение формы и объема пор. В силу статистической однородности свойств деформируемого материала для ввода физических уравнений достаточно решить задачу для характерной ячейки, представляющей собой статистический ансамбль.

Для определенности в ортогональной системе координат рассмотрим некоторый объем, упакованный макрочастицами в форме многогранников (рис. 3, б). Каждая ячейка пластически сжимаемой среды обладает кусочно-однородными свойствами и состоит из тетраэдров, образующих жесткопластический каркас и занимающих объем $\Omega = \omega_f \cup \omega_p$ (ω_f — объем частицы; ω_p — объем поры). Внешняя поверхность ячейки $S = S_F \cup S_V$ нагружается системой поверхностных сил $\lambda F = \{\lambda F_i\}$ (λ — возрастающий от нуля неопределенный множитель). Граничные условия записываются в виде $\sigma_{ij}n_j = \lambda F_i$ ($x \in S_F$), $v_{is} = v_{is}^0$ ($x \in S_V$). Для рассматриваемой ячейки внутри объема Ω связь между компонен-

тами девиатора напряжений и тензора скоростей деформации определена в виде

$$s_{ij} = 2\tau_s(x)e_{ij}/H(x), \quad (1)$$

где $\tau_s(x) = \tau_s$ при $x \in \omega_f$, $\tau_s(x) = 0$ при $x \in \omega_p$; $e_{ij} = \xi_{ij} - \xi\delta_{ij}/3$; ξ_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; $H = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$ — интенсивность скоростей деформации.

С увеличением внешних сил ячейка переходит в состояние общей текучести при достижении нагрузки предельного значения λ^*F . Для определения предельной нагрузки в общем случае необходимо использовать экстремальную теорему идеальной пластичности структурно-неоднородных тел [12, 14]:

$$\int_S F_i^0 v_i ds \leq \sum_{m=1}^M \int_{\omega_m} [\tau_{sn}(k_i, \theta)H + \sigma_n(k_i, \theta)\xi]_i d\omega, \quad (2)$$

где варьируемыми величинами являются H и ξ ; M — количество ячеек; m — номер ячейки.

Неравенство (2) содержит варьируемую функцию поля скоростей. При переходе от кинематически допустимого состояния ячейки к действительному неравенство переходит в равенство.

3. Вывод определяющих соотношений. При выводе определяющих соотношений вычислялась диссипация энергии для тетраэдров, входящих в элементарную ячейку, с использованием соотношений метода конечных элементов. Предполагалось, что все тетраэдры, кроме тетраэдра, представляющего собой пору, являются жесткими телами и могут перемещаться относительно друг друга за счет скольжения по своим граням, на которых действуют нормальные и касательные напряжения. Величина касательных напряжений принималась равной пределу текучести на сдвиг компактного материала, нормальные напряжения определялись из уравнений равновесия тетраэдров. Расчеты были выполнены для случая всестороннего равномерного сжатия пористой ячейки в поле среднего напряжения σ и случая деформации чистого сдвига по плоскостям, ослабленным дефектами (порами) многогранной или сферической формы.

При расчете давления газа в поре q полагалось, что до достижения некоторого критического значения пористости θ^* обеспечивается отток газа из пор путем фильтрации, после чего давление газа повышается в соответствии с уравнением

$$q = q^*(\theta^*/\theta)(1 - \theta)/(1 - \theta^*),$$

где θ^* , q^* — пористость и внутреннее давление в порах в момент прекращения оттока газа ($\theta < \theta^*$) соответственно.

После вычислений и аппроксимации их результатов получены следующие зависимости пределов текучести на сжатие σ_s^* и сдвиг τ_s^* :

$$\sigma_s^* = -(2/\sqrt{3})\tau_s \ln(\eta/\theta) + q, \quad \tau_s^* = \tau_s(1 - K\theta^\zeta), \quad (3)$$

где K , η , ζ — параметры, характеризующие геометрию дефектов. Расчеты показали, что указанные параметры могут принимать следующие значения: $1 \leq K \leq 1,63$, $\eta \leq 1$, $\zeta = 2/3$. Для хаотично расположенных дефектов изометрической формы $K = 1$, $\eta = 1$, $\zeta = 2/3$.

Соотношения (3), полученные из решения тестовых задач по определению пределов текучести на сжатие и сдвиг для пористого тела, имеют общий характер. Реальный процесс деформирования с учетом пластической сжимаемости характеризуется не только уменьшением пористости, но и изменением формы частиц и пор. В начальный момент времени пористое тело можно рассматривать как изотропную среду с осредненными по объему макрохарактеристиками. В процессе деформирования независимо от схемы (за исключением тривиального случая всестороннего сжатия) оно неизбежно приобретает определенную

степень анизотропии, неучет которой может существенно исказить результаты математического моделирования. Параметры K , η , ζ зависят не только от величины пористости и формы пор, но и от характера анизотропии среды. В работе [15] показано, что свойства материалов, характеризующихся трехмерной упаковкой частиц, с достаточной точностью определяются структурными параметрами главных плоскостей деформируемого материала. Для описания закономерностей пластического деформирования пористых материалов необходимо в общем случае задавать структурные параметры характерного элемента объема для трех главных плоскостей. В главных осях уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -(2/\sqrt{3})\tau_s \ln(\eta_{11}/\theta) + 2\tau_s(1 - K_{11}\theta^{\zeta_{11}})(\xi_{11} - \xi/3)/H, \\ \sigma_{22} &= -(2/\sqrt{3})\tau_s \ln(\eta_{22}/\theta) + 2\tau_s(1 - K_{22}\theta^{\zeta_{22}})(\xi_{22} - \xi/3)/H, \\ \sigma_{33} &= -(2/\sqrt{3})\tau_s \ln(\eta_{33}/\theta) + 2\tau_s(1 - K_{33}\theta^{\zeta_{33}})(\xi_{33} - \xi/3)/H,\end{aligned}$$

при этом в формулах (3) $K = \prod_{i=1}^3 K_{ii}$, $\zeta = \prod_{i=1}^3 \zeta_{ii}$, $\eta = \prod_{i=1}^3 \eta_{ii}$.

На основе выведенных соотношений с условием текучести цилиндрического типа решен ряд задач, в частности, в осесимметричной постановке рассмотрены задачи двустороннего прессования пористой заготовки и экструзии пористой массы [12].

4. Поверхности сильного разрыва в пластически сжимаемой среде. Теория разрывных решений первоначально развивалась применительно к задачам гидродинамики. Для разрывов типа ударных волн получены точные аналитические зависимости, известные как соотношения Рэнкина — Гюгонио. Для решения задач пластичности с условием текучести Мизеса указанные соотношения использовались в [5] и рассматривались во многих других работах. Условия на поверхностях сильного разрыва скоростей для пластически сжимаемых сред исследованы в работах [6, 16, 17].

Следуя [18], рассмотрим разрывное решение как последовательность непрерывных движений для системы уравнений пластически сжимаемой среды. При этом в тонких слоях с непрерывным, но резким изменением характеристик движения введем подходящие внешние воздействия, притоки тепла и другие виды энергии. При предельных переходах будем считать, что суммарные характеристики дополнительных внешних воздействий в виде массовых сил могут иметь, вообще говоря, ненулевое значение. При этом должны выполняться основные уравнения механики сплошных сред — уравнения неразрывности, импульсов и баланса энергии. Уравнение моментов количества движения исключим из рассмотрения, полагая, что поверхностная плотность распределения внешних для среды моментов всегда равна нулю.

В теории пластичности при построении разрывных решений обычно принимается гипотеза об отсутствии массовых сил. Однако, как указано в [18], разрывное решение можно строить путем введения подходящих внешних воздействий, не противоречащих принятой модели среды. Хотя на практике встречается лишь несколько видов специальных массовых сил, невозможно охарактеризовать класс всех возможных полей этих сил. В общем случае величина этих сил не подчинена никаким ограничениям и определяется из уравнения импульсов [19]. При построении разрывных решений для многокомпонентной среды компоненты массовых сил введены, в частности, в [20]. При этом указывалось на необходимость конкретизации природы этих сил для рассматриваемого физического процесса. Для моделей двухкомпонентных сред газ — твердые частицы аналогичные воздействия в виде компонент поверхностной силы на разрыве (и связанного с указанной силой дополнительного члена в уравнении баланса энергии) рассматривались в [21], а также в [9, 22]. При этом величина поверхностной силы выбиралась из условия заданных режимов течения на разрывах. Таким образом, при переходе многокомпонентной среды через поверхность разрыва определяющим является соотношение между силами межфазного взаимодействия и

силами взаимодействия частиц в твердой фазе. Итак, условия на поверхности сильного разрыва в пластически сжимаемой среде можно рассматривать исходя из энергетических соображений, не предполагая равенства нулю массовых сил.

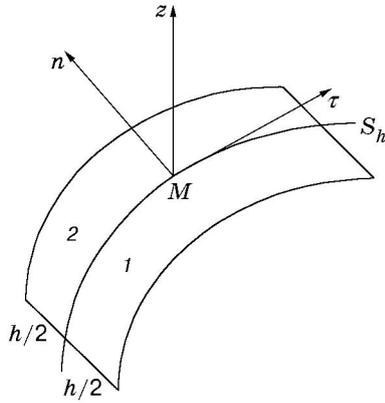


Рис. 4. Поверхность разрыва

Рассмотрим поверхность разрыва S_h , в некоторой точке M которой скорость перемещения по нормали к поверхности равна $v_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t$ (Δs — расстояние, пройденное точкой M в направлении нормали за время Δt) (рис. 4). Введем в точке M подвижную локальную систему координат (n, τ, z) , которая перемещается равномерно, прямолинейно и поступательно и в рассматриваемый момент времени имеет скорость, равную скорости точки M . Пусть материал перетекает из области 1 поверхности разрыва в область 2 и ось n направлена по нормали к S_h в область 2. Тогда в фиксированной системе координат из общих интегральных уравнений неразрывности, импульсов и баланса энергии следует (индексы 1 и 2 соответствуют областям поверхности разрыва S_h)

$$\rho_1(v_s - v_{n1}) = \rho_2(v_s - v_{n2}); \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_{n1} = \rho_1 \mathbf{v}_1(v_s - v_{n1}) - \rho_2 \mathbf{v}_2(v_s - v_{n2}) - \mathbf{R}; \quad (5)$$

$$W + \mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{v}_1 = \rho_1(v_s - v_{n1})(v_1^2/2 + U_1) - \rho_2(v_s - v_{n2})(v_2^2/2 + U_2) + q_{n2}^* - q_{n1}^*, \quad (6)$$

где \mathbf{p}_n — вектор напряжений; U — плотность внутренней энергии; $\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho \mathbf{F} d\tau = \int_{S_h} \mathbf{R} d\sigma$;

\mathbf{R} — поверхностная плотность распределения на S_h внешних массовых сил; $\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \left(\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{dq_M^*}{dt} \right) d\tau = \int_{S_h} W d\sigma$; W — плотность потока мощности массовых сил $\rho \mathbf{F}$;

q_n^* — полный внешний приток добавочной удельной энергии; dq_M^*/dt — полный удельный добавочный приток энергии за счет массовых источников в единицу времени.

Переходя к компонентам вектора, условия (5), (6) запишем в виде

$$[p_{ni}] = -\rho(v_s - v_n)[v_i] - R_i,$$

$$W + \sum_i [p_{ni}v_i] - [q_n] = -\frac{\rho(v_s - v_n)}{2} \left(\sum_i [v_i^2] + [U] \right), \quad i = (n, y, z),$$

где квадратные скобки означают скачок величины; $[v] = v_2 - v_1$.

Зададим тепловой поток по закону Фурье $q_i = -\alpha \text{grad } T$ (α — коэффициент теплопроводности). Обозначим $W' = W - \frac{\rho(v_n - v_s)}{2} \sum_i [v_i^2]$. После преобразований получим выражение

$$W' + \sum_i [p_{ni}v_i] = \sigma_2 \xi + \tau_2 H - \lim_{h \rightarrow 0} \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial n} (v_{n1} - v_n) + 2 \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial n} (v_{y1} - v_y) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial n} (v_{z1} - v_z) \right) d\omega = \sigma_2 \xi + \tau_2 H - I,$$

где

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_V \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial n} (v_{n1} - v_n) \right\} d\omega + \right. \\ \left. + \int_V \frac{\partial \tau}{\partial n} \left\{ \frac{e_{nn}(v_{n1} - v_n) + 2e_{ny}(v_{y1} - v_y) + 2e_{nz}(v_{z1} - v_z)}{H} \right\} d\omega + \right. \\ \left. + \sum_i \frac{a_i}{6} \int_V \frac{\tau}{H^3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial n^2} \frac{\partial v_j}{\partial n} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial n^2} \frac{\partial v_i}{\partial n} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{\partial v_j}{\partial n} (v_{i1} - v_i) - \frac{\partial v_i}{\partial n} (v_{j1} - v_j) \right) \right\} d\omega \right\}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & y & z \\ y & z & n \end{pmatrix}, \quad a_n = a_z = 4, \quad a_y = 3.$$

Рассмотрим интегралы под знаком суммы в правой части (7). Компоненты скорости v_i в окрестности точки M разложим в ряд Тейлора по координате n :

$$v_i = v_{i1} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial^m v_i(0)}{\partial n^m} \frac{n^m}{m!}.$$

Пусть для каждой пары индексов (i, j) выполняется соотношение $\partial^m v_i(0)/\partial n^m = \beta_{ij} \partial^m v_j(0)/\partial n^m$, $\beta_{ij} = \text{const}$. Тогда выражения в фигурных скобках для всех трех интегралов равны нулю и последним слагаемым в правой части (7) можно пренебречь.

Рассмотрим первый интеграл в правой части (7). Разлагая σ и v_n в ряд Тейлора и полагая $\partial^m \sigma(0)/\partial n^m = \beta_{\sigma n} \partial^m v_n(0)/\partial n^m$, $\beta_{\sigma n} = \text{const}$, получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial n} (v_{n1} - v_n) \right\} d\omega = -\frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1)(v_{n2} - v_{n1}) = -\frac{1}{2} [\sigma] \xi.$$

Аналогично для второго интеграла в правой части (7) имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \frac{\partial \tau}{\partial n} \left\{ \frac{e_{nn}(v_{n1} - v_n) + 2e_{ny}(v_{y1} - v_y) + 2e_{nz}(v_{z1} - v_z)}{H} \right\} d\omega = -\frac{1}{2} [\tau] H.$$

В результате скорость диссипации мощности D_h на поверхности разрыва равна

$$D_h = \frac{1}{2} ((\sigma_2 + \sigma_1)\xi + (\tau_2 + \tau_1)H) - [q_n] + \frac{1}{2} \rho (v_n - v_s) \sum_i [v_i^2]. \quad (8)$$

При решении краевых задач величину D_h предпочтительнее выразить через пределы текучести σ_s^* и τ_s^* . При использовании цилиндрического условия текучести переход очевиден, поскольку должны выполняться условия $\sigma = \sigma_s^*$, $\tau = \tau_s^*$. Для эллиптического условия текучести используем следующие формулы [6]:

$$\sigma = (\xi/Q)(\sigma_s^*)^2, \quad \tau = (H/Q)(\tau_s^*)^2, \quad \bar{D} = Q = (H^2(\tau_s^*)^2 + \xi^2(\sigma_s^*)^2)^{1/2}.$$

Для скорости диссипации мощности при условии текучести эллиптического типа получим более сложное по сравнению с (8) выражение

$$\bar{D}_h = (H^2(\tau_{s2}^*)^2 + \xi^2(\sigma_{s2}^*)^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \{ H^2((\tau_{s2}^*)^2 - (\tau_{s1}^*)^2) + \xi^2((\sigma_{s2}^*)^2 - (\sigma_{s1}^*)^2) \}^{1/2} - \\ - [q_n] + \frac{1}{2} \rho (v_n - v_s) \sum_i [v_i^2]. \quad (9)$$

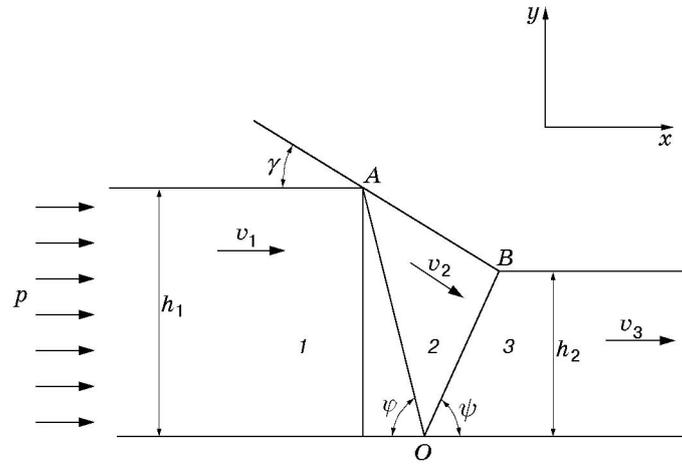


Рис. 5. Схема расчета экструзии пористой массы

Зависимости вида (8), (9) используются при решении задач развитого пластического течения, когда упругими составляющими тензоров напряжений и скоростей деформации можно пренебречь. Для случаев, когда необходимо учитывать упругие напряжения и деформации, аналогичные результаты получены в работах [16, 17]. В [16] исследовано условие текучести в виде пирамиды Кулона — Мора. В работе [17] рассмотрены свойства уравнений Прандтля — Рейсса для динамических задач.

5. Экструзия пористой массы. Построим решение краевой задачи экструзии пористой массы через коническую матрицу (рис. 5) в условиях плоской деформации при условии текучести цилиндрического типа. Трением пренебрегаем. Полагаем, что пластические деформации сосредоточены на линиях разрыва OA и OB , являющихся границами раздела зон 1, 2 и 3, движущихся как жесткие тела (блоки). Пусть относительные плотности и скорости в каждой зоне соответственно равны ρ_i и v_{ji} ($j = x, y; i = 1, 2, 3$). Полагаем, что ρ_1 и v_1 заданы. Тогда простейшее кинематически допустимое поле скоростей имеет вид (см., например, [23])

$$v_{x1} = v_1, \quad v_{x2} = v_2 \cos \gamma, \quad v_{x3} = v_3, \quad v_{y1} = 0, \quad v_{y2} = -v_2 \sin \gamma, \quad v_{y3} = 0.$$

Переходя на линиях разрыва к локальным осям (n, τ) , для скачков компонент вектора скорости получим выражения

$$\begin{aligned} [v_n] &= (v_2 \cos \gamma - v_1) \sin \varphi - v_2 \sin \gamma \cos \varphi, \\ [v_\tau] &= -(v_2 \cos \gamma - v_1) \cos \varphi - v_2 \sin \gamma \sin \varphi \quad \text{на } OA, \\ [v_n] &= (v_3 - v_2 \cos \gamma) \sin \psi - v_2 \sin \gamma \cos \psi, \\ [v_\tau] &= (v_3 - v_2 \cos \gamma) \cos \psi + v_2 \sin \gamma \sin \psi \quad \text{на } OB. \end{aligned} \tag{10}$$

Скорости v_2 и v_3 определим из условий кинематической совместности [23]: $[v_x] - [v_y] \operatorname{tg} \varphi = a$ на OA , $[v_x] + [v_y] \operatorname{tg} \psi = b$ на OB . При этом в точке O должны выполняться условия $[v_x] = v_3 - v_1$, $[v_y] = 0$. Отсюда следует

$$v_2 = \frac{1}{\sin \gamma} \frac{v_1}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi}, \quad v_3 = v_1 \frac{\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi}.$$

Формулы (10) могут быть записаны в виде

$$[v_n]_1 = v_1 \sin \varphi \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi}, \quad [v_\tau]_2 = -v_1 \sin \varphi \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi} \quad \text{на } OA,$$

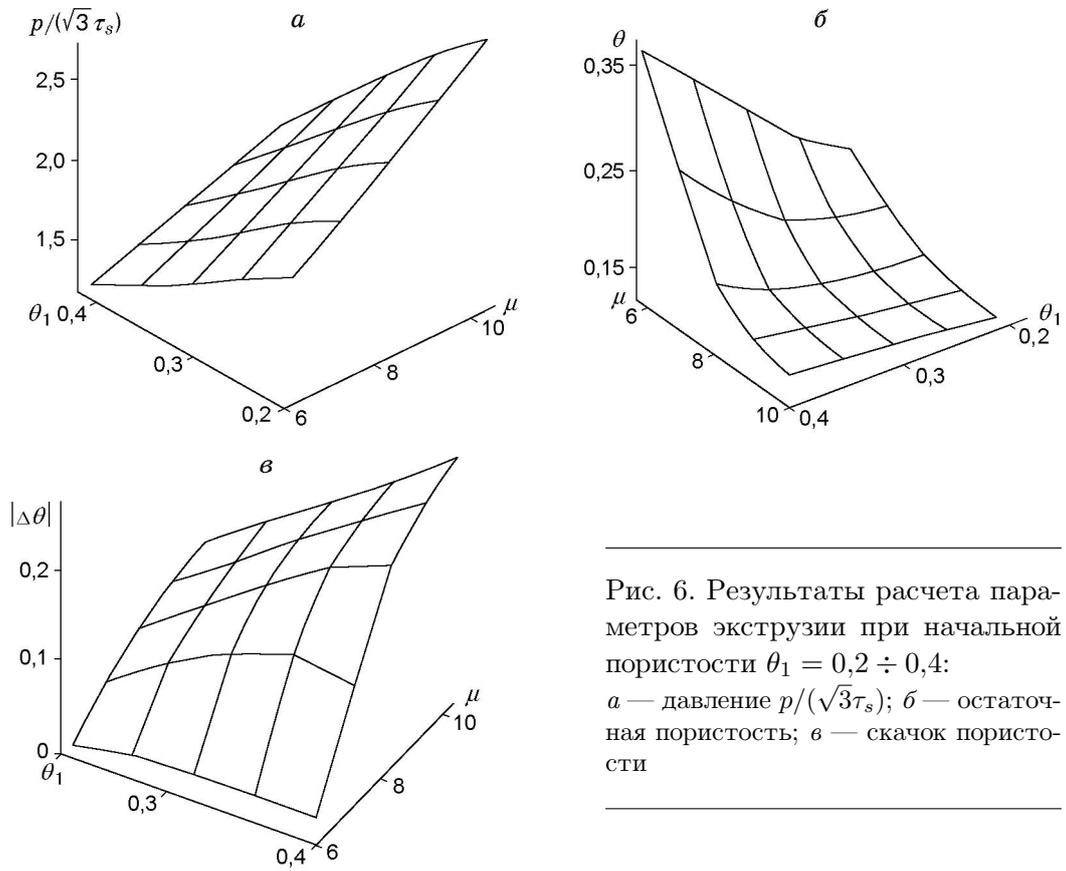


Рис. 6. Результаты расчета параметров экструзии при начальной пористости $\theta_1 = 0,2 \div 0,4$:
a — давление $p/(\sqrt{3}\tau_s)$; *б* — остаточная пористость; *в* — скачок пористости

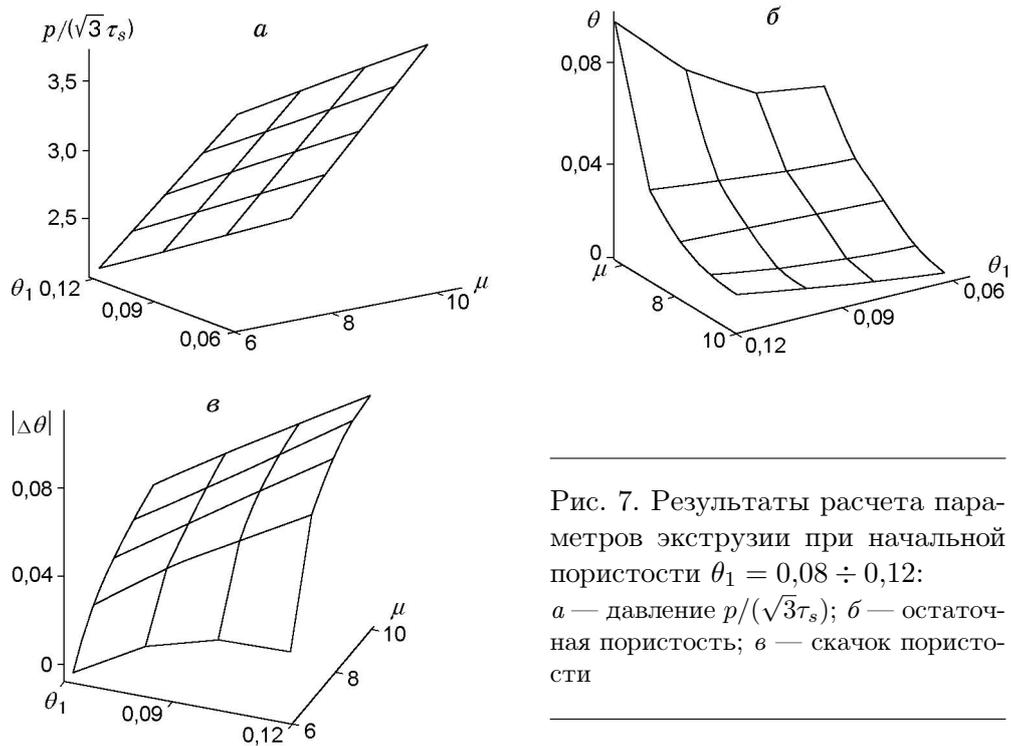


Рис. 7. Результаты расчета параметров экструзии при начальной пористости $\theta_1 = 0,08 \div 0,12$:
a — давление $p/(\sqrt{3}\tau_s)$; *б* — остаточная пористость; *в* — скачок пористости

$$[v_n]_1 = v_1 \sin \psi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \psi}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi}, \quad [v_\tau]_2 = v_1 \sin \psi \frac{1 + \operatorname{ctg} \psi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi} \quad \text{на } OB.$$

Плотности ρ_2, ρ_3 определяются непосредственно из условия $\rho_i v_{ni} = \text{const}$, однако проще воспользоваться следующими формулами:

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 ([v_n]_1 + v_{n1}), \quad v_{n1} = v_1 \sin \varphi, \quad \mu \rho_1 v_1 = \rho_3 v_3,$$

где $\mu = h_1/h_2$ — редукция (вытяжка).

Для того чтобы исключить из уравнений угол φ , используем кинематическое соотношение $(h_1 - h_2) \operatorname{ctg} \gamma = h_1 \operatorname{ctg} \varphi + h_2 \operatorname{ctg} \psi$ или $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \gamma - (\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \psi)/\mu$.

С учетом (8) уравнение для расчета усилия выдавливания имеет вид

$$p/\tau_s = \{(\sigma_1 + \sigma_2)(\operatorname{tg} \psi - \operatorname{ctg} \varphi) + (\tau_1 + \tau_2)[4(\operatorname{tg} \psi - \operatorname{ctg} \varphi)^2/3 + 1 + \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \psi]^{1/2} + \\ + [(\sigma_2 + \sigma_3)(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \psi) + (\tau_2 + \tau_3)[4(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \psi)^2/3 + 1 + \operatorname{ctg} \psi \operatorname{tg} \varphi]^{1/2}/\mu\} / \\ / (2(\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \psi)), \quad (11)$$

где зависимости $\sigma_i = \sigma_i(\theta_i), \tau_i = \tau_i(\theta_i)$ определяются согласно (3) ($\sigma = \sigma_s^*, \tau = \tau_s^*, \theta = 1 - \rho$).

Для несжимаемого материала достаточно положить $[v_n]_i = 0$, исключив из формулы (11) слагаемые, характеризующие необратимые изменения объема.

Расчеты выполнены для двух интервалов начальной пористости: $\theta_1 = 0,2 \div 0,4$ (умеренная) и $\theta_1 = 0,06 \div 0,12$ (малая). Угол конусности γ принят равным 45° . Величина угла выбрана из следующих соображений. Как известно, наилучшие энергосиловые параметры процесса выдавливания обеспечиваются при $30^\circ < \gamma < 45^\circ$ (см., например, [6, 12]). В то же время при малых углах γ и больших μ точность определения величины давления для принятой расчетной схемы существенно снижается. В этом случае схему расчета рекомендуется усложнить, увеличив число жестких блоков [24]. Из расчетов следует, что при $\gamma = 30^\circ, \mu \geq 10$ давление резко увеличивается.

Результаты расчетов представлены на рис. 6, 7. Величина μ изменялась в интервале $6 \div 10$. В расчетах принято $K = 1, \eta = 1, \zeta = 2/3$.

Из анализа результатов следует, что при умеренной начальной пористости экструзия без уплотнения возможна при минимальной редукции (см. рис. 6, в), при этом давление соответствует несжимаемому материалу, для которого следует положить $\tau_s = \tau_s^*(\theta_1)$. С увеличением μ пористость резко уменьшается: $\theta = 0,12 \div 0,15$ (см. рис. 6, б). Аналогичная картина наблюдается при малой начальной пористости, хотя ее скачок по абсолютной величине значительно меньше, чем в первом случае. При редукции $\mu = 10$ достигается состояние, близкое к беспористому ($\theta < 0,01$) (см. рис. 7, б). При этом $p/(\sqrt{3}\tau_s) = 3,7 \div 4,0$, что удовлетворительно согласуется с расчетными и экспериментальными данными для проволоки, полученной из титановой губки [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
2. **Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А.** Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.: Наука, 1984.
3. **Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов:** В 2 т. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995. Т. 1.
4. **Зверев В. В., Залазинский А. Г., Новоженев В. И., Поляков А. П.** Применение вейвлетного анализа для идентификации структурно-неоднородных деформируемых материалов // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 199–207.

5. **Фрейденталь А., Гейрингер Х.** Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
6. **Друянов Б. А.** Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989.
7. **Грин Р. Дж.** Теория пластичности пористых тел // *Механика*. 1973. № 4. С. 109–120.
8. **Гэрсон А. Л.** Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор. 1. Критерий текучести и законы течения для пористой пластической среды // *Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теорет. основы инж. расчетов*. 1977. № 1. С. 1–16.
9. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
10. **Киселев С. П., Фомин В. М.** О модели пористого материала с учетом пластической зоны, возникающей в окрестности поры // *ПМТФ*. 1993. Т. 34, № 6. С. 125–133.
11. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
12. **Залазинский А. Г.** Пластическое деформирование структурно-неоднородных материалов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000.
13. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
14. **Залазинский А. Г.** Применение экстремальных теорем для определения напряжений и деформаций при развитии пластическом течении композита // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1984. № 6. С. 106–113.
15. **Салтыков С. А.** Стереометрическая металлография. М.: Металлургия, 1970.
16. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Рычков В. А.** Поверхности разрывов скоростей в необратимо сжимаемой среде // *Проблемы механики сплошной среды*. Владивосток: Ин-т автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 1996. С. 116–127.
17. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1997.
18. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1.
19. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
20. **Эринген А., Ингрэм Дж.** Теория сплошных сред при химических реакциях. 1 // *Механика*. 1966. Т. 95, № 1. С. 113–128.
21. **Крайко А. Н., Миллер Л. Г., Ширковский И. А.** О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости // *ПМТФ*. 1982. № 1. С. 111–118.
22. **Киселев С. П., Фомин В. М.** Соотношения на комбинированном разрыве в газе с твердыми частицами // *ПМТФ*. 1984. № 2. С. 112–119.
23. **Дегтярев И. С., Колмогоров В. Л.** Диссипация мощности и кинематические соотношения на поверхностях разрыва скоростей в сжимаемом жесткопластическом материале // *ПМТФ*. 1972. № 5. С. 167–173.
24. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1989.

*Поступила в редакцию 3/VII 2001 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2002 г.*