

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Р. Ш. Гайнутдинов, Е. С. Воробьев, Г. Я. Асадуллина

Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань

В рамках модели теплового взрыва полого цилиндра Гришина — Бостанджияна исследованы критические условия теплового взрыва при несимметричных граничных условиях первого рода. Рассмотрены случаи, когда горячая граница находится на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Приведены результаты численного анализа и даны аппроксимирующие функции для определения критического параметра Франк-Каменецкого.

Задача теплового взрыва реагирующего бесконечного полого цилиндра или кольцевого слоя при несимметричных граничных условиях первого рода рассмотрена в [1, 2]. В [1] исследован вариант, когда горячая граница находится на внутренней поверхности цилиндра, а в [2] — на внешней. В указанных работах основное внимание уделено теоретическим вопросам. В практическом плане в [1] определен критический параметр Франк-Каменецкого при значениях температурного напора $\theta_2 = E(T_2 - T_1)/RT_1^2 = 2$ и 6. Здесь T_1, T_2 — температуры горячей и холодной поверхностей цилиндра, E — энергия активации, R — газовая постоянная. В [2] предложена аппроксимирующая функция, справедливая в диапазоне $\theta = (-3 - 2 \ln k) \div (3 - 2 \ln k)$, где $k = R_1/R_2$, R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндра. Однако для решения инженерных задач, связанных с технологической безопасностью, придется иметь дело со значениями, превосходящими указанные. Цель настоящей работы — численное исследование критических условий теплового взрыва полого цилиндра в широком диапазоне изменения температурного напора и разработка инженерной методики расчетов для определения критического параметра Франк-Каменецкого.

В [1] из решения нелинейной краевой задачи

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \delta \exp \theta = 0, \quad (1)$$

$$\xi = k: \quad \theta = 0, \quad (2)$$

$$\xi = 1: \quad \theta = \theta_2 \quad (3)$$

для определения критического параметра Франк-Каменецкого получена зависимость

$$\delta_{cr}^0 = 2n^2 \left(\frac{(\operatorname{arhc} + \operatorname{arch}(cn^{-1}k^{-1}))n^2}{c \ln k} \right)^2. \quad (4)$$

В (1)–(4) $\xi = r/R_2$, r — текущий радиус, критическое значение c определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{c(c^2 - 1)^{1/2} + (c^2 - n^2k^2)^{1/2}}{((c^2 - 1)^{1/2}(c^2 - n^2k^2))^{1/2}} = \\ = \operatorname{arhc} + \operatorname{arch}(cn^{-1}k^{-1}),$$

$$n = \exp(\theta_2/2), \quad \theta = E(T - T_1)/RT_1^2, \quad c = \operatorname{ch}b.$$

Выражение (4) получено исключением постоянной интегрирования a из системы трансцендентных уравнений, соответствующих граничным условиям. Исключение постоянной интегрирования b из указанной системы уравнений дает другую зависимость:

$$\delta_{cr} = \delta_{cr}^0(1 - k)^2, \quad \delta_{cr}^0 = \frac{2 \ln(pq)^2}{a \ln k^2}, \quad (5)$$

где $p = x + (x^2 - 1)^{1/2}$, $x = 1/k^2$, $q = z + (z^2 - 1)^{1/2}$, $z = (a \exp |\theta_2|)^{1/2}$. Критические значения a определяются из трансцендентного уравнения

$$\frac{x}{p - x} + \frac{z}{q - z} = \ln pq. \quad (6)$$

В параметре Франк-Каменецкого δ_{cr}^0 за характерный размер принят радиус R_2 , а в δ_{cr} — толщина свода кольцевого слоя $H(R_2 = H/(1 - k))$. Зависимости (4) и (5) дают одинаковые результаты. Обратим внимание на то, что в [1] в качестве масштабной температуры принимается высокая температура на внутренней поверхности цилиндра.

В [2] исследуется тепловой взрыв в случае $T_2 > T_1$, причем значение T_2 также принимается за масштабное. Исходная задача [2] имеет вид (1) с граничными условиями

$$\xi = 1: \quad \theta = 0, \quad (7)$$

$$\xi = k: \quad \theta = \theta_2. \quad (8)$$

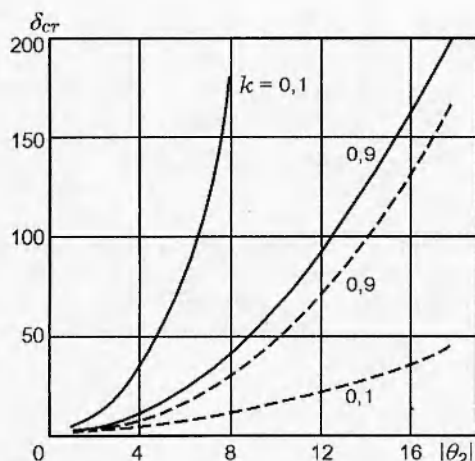


Рис. 1. Зависимость параметра δ_{cr} от $|\theta_2|$ при различных значениях k :

сплошные линии — внутренняя задача, штриховые — внешняя задача

Критические параметры по данным [2] определяются из (5), (6), где $x = a^{1/2}$, $z = (a \exp(-\theta_2)/k^2)^{1/2}$.

Задачу [1] для удобства будем называть внутренней, а [2] — внешней. Некоторые результаты расчетов по определению критического параметра Франк-Каменецкого для внутренней и внешней задач приведены на рис. 1. Видно, что при малых значениях k тепловой взрыв для внешней задачи наступает при меньших значениях критического параметра по сравнению с внутренней задачей. При этом по мере увеличения $|\theta_2|$ расхождение результатов для внутренней и внешней задач возрастает. Однако с ростом k различие уменьшается, и при $k = 0,9$ оно уже незначительно. При $k \rightarrow 1$ цилиндрическая задача переходит в плоскую несимметричную задачу первого рода [3]. Поэтому при $k = 0,99$ значения δ_{cr} во внутренней и внешней задачах практически одинаковы и совпадают со значениями δ_{cr} для плоской задачи (рис. 2).

Таким образом, при малых значениях k соотношение температур внутренней и внешней поверхностей цилиндра существенно влияет на критические условия теплового взрыва. Расхождение результатов по δ_{cr} для двух рассматриваемых задач объясняется условиями теплоотвода из горячей зоны. Решение внутренней и внешней задач в «инертной» постановке показало, что плотность теплового потока из горячей зоны для внутренней задачи в $1/k$ раз

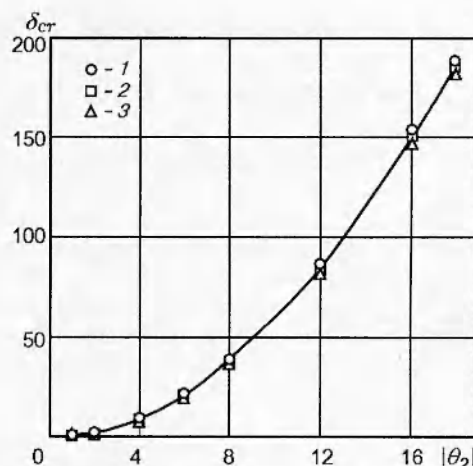


Рис. 2. Зависимость параметра δ_{cr} от $|\theta_2|$ при $k = 0,99$:

1 — расчет по (4), 2 — расчет по (5), (6), 3 — расчет из [3]

больше, чем для внешней. Поэтому в условиях большего теплоотвода из горячей зоны тепловой взрыв наступает также при больших значениях δ_{cr} .

По результатам расчетов для внешней задачи предложена аппроксимирующая функция для определения δ_{cr} в диапазонах $|\theta_2| = 0 \div 20$ и $k = 0,1 \div 0,9$:

$$\delta_{cr} = \frac{(0,489U^2 + 1,4688U + 3,51)(1-k)^2}{\ln k^2}, \quad (9)$$

где $U = |\theta_2| - 2 \ln k$, за характерный размер принята толщина свода кольцевого слоя.

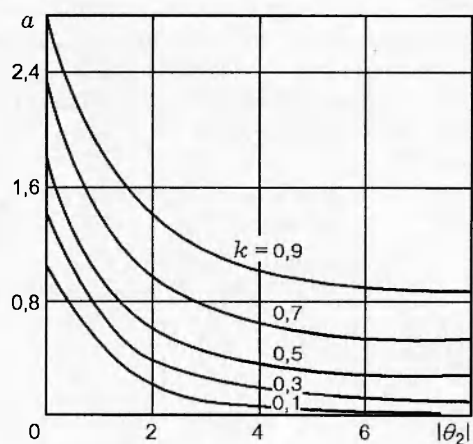


Рис. 3. Зависимость критического значения a от $|\theta_2|$ при различных значениях k

Относительная ошибка определения δ_{cr} по соотношению (9) не превышает 2%. Для внутренней задачи единую аппроксимирующую функцию для определения δ_{cr} подобрать не удалось. Поэтому для облегчения инженерных расчетов с большой точностью были определены корни уравнения (6), которые представлены на рис. 3. Кроме того, по результатам расчетов подобрана аппроксимирующая функция для определения критического значения a :

$$a = 1,022k^2 + 212,0 \cdot 10^{-6}k + 3,36 \cdot 10^{-4}, \quad (10)$$

справедливая при $|\theta_2| = 8 \div 20$. Определив a из (10), по уравнениям (5) и (6) можно вычислить δ_{cr} . При этом при $|\theta_2| = 10 \div 20$ относительная ошибка определения δ_{cr} не более 2%, а при $|\theta_2| = 8 \div 10$ составляет 4%. Для $|\theta_2| < 8$ можно пользоваться графическими данными рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришин А. М.** Типы решений одной нелинейной краевой задачи и их устойчивость // Теория функций и дифференциальные уравнения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1966. С. 44–51.
2. **Бостанджиян С. А.** Тепловое воспламенение кольцевого слоя и его гидродинамическая аналогия // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24, № 4. С. 10–19.
3. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплотеплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 20/VI 1996 г.,
в окончательном варианте — 13/I 1998 г.*