

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТРУЙНОГО  
ОБТЕКАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ ПОТОКОМ  
ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ**

*Л. Г. Гузевский*

(Новосибирск)

Предлагается приближенный метод решения задач для плоских стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости с одной свободной границей. К этому классу относятся, например, задача об истечении тяжелой жидкости из-под криволинейного щита и симметричные задачи о кавитационном обтекании криволинейных дуг по различным классическим схемам [1] в продольном поле силы тяжести. Метод иллюстрируется на примере решения задачи о кавитационном обтекании заданной криволинейной дуги, установленной на горизонтальном дне, по схеме Рябушинского в поле сил тяжести, перпендикулярном направлению набегающего потока.

Фиксированная криволинейная граница (дуга  $P$ ) задается уравнением  $\Psi = \Psi(l)$ , где  $\Psi$  — угол наклона касательной заданной дуги к горизонтальной прямой,  $l$  — дуговая абсцисса. Дуга  $P$  аппроксимируется некоторой кривой  $\Psi_* = \Psi_*(l)$ , имеющей непрерывную производную, таким образом, чтобы  $\Psi_* = \Psi$  для конечного числа значений дуговой абсциссы  $l$ . Линеаризация граничного условия на свободной поверхности, при которой условие постоянства давления в каверне удовлетворяется точно в конечном числе точек этой границы, проводится, как и в работах [2, 3]. При такой конечномерной аппроксимации граничных условий решение задачи (в плоскости вспомогательного параметрического переменного) получается в явном виде. Основная трудность заключается в определении численных значений параметров, вошедших в решение задачи, из системы нелинейных трансцендентных уравнений. Метод решения этой системы с использованием ЭВМ основывается на алгоритме, предложенном в [3], для систем уравнений такого типа.

Исследование вопросов существования и единственности решения для широкого класса задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами на основе метода конечномерной аппроксимации проведено в работах В. Н. Монахова [2]. Криволинейные границы аппроксимируются при этом полигонами.

Ранее приближенные аналитические решения задач о струйном обтекании заданных криволинейных препятствий были получены только в случае невесомой жидкости [4].

Рассмотрим плоский установившийся поток идеальной тяжелой жидкости, набегающий на криволинейную дугу  $P$ , которая расположена на горизонтальном прямолинейном дне. В качестве схемы кавитационного обтекания выберем схему Рябушинского с «зеркалом» (фиг. 1). Вследствие предполагаемой симметрии течения достаточно ограничиться рассмотрением потока в области  $D_z$ , ограниченной линией тока  $CDAB$  и эквипотенциалью  $BC$ . Начало декартовой системы координат поместим в точке  $A$  отрыва потока; ось абсцисс направим горизонтально, а ось ординат — перпендикулярно вектору скорости набегающего потока.

Криволинейную дугу  $P$  зададим уравнением

$$\Psi = \Psi(l_*) \quad (l_* = l/L, \quad 0 \leq l_* \leq 1) \quad (1)$$

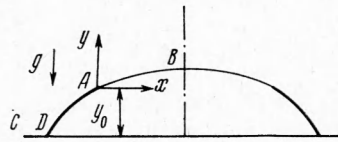
где  $\Psi$  — угол между касательной к дуге  $P$  и осью  $x$ ;  $l$  — длина дуги, измеряемая вдоль  $P$ ;  $L$  — полная длина дуги  $P$ . В дальнейшем будем предполагать, что функция  $\Psi(l_*)$  удовлетворяет условию Гёльдера.

Неизвестная (свободная) граница  $AB$  отыскивается из условия постоянства давления в каверне, которое на основании уравнения Бернулли

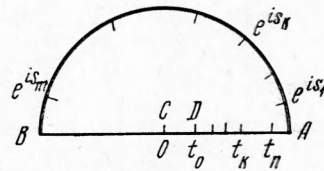
имеет вид

$$\frac{q^2}{q_0^2} = 1 - \frac{2}{p(1+\sigma)} \frac{y}{L} \left( \sigma = \frac{q_0^2}{q_\infty^2} - 1, \text{Fr} = \frac{q_\infty}{\sqrt{gy_0}} \right) \quad (2)$$

Здесь  $q = q(y)$  — величина скорости в точке свободной границы с ординатой  $y$ ,  $q_0 = q(0)$ ,  $q_\infty$  — скорость невозмущенного потока;  $p = y_0/L$  — заданный параметр, характеризующий геометрию препятствия;  $y_0$  — вертикальный размер препятствия;  $\sigma$  — число кавитации, Fr — число Фруда,  $g$  — ускорение силы тяжести.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отобразим конформно область  $D_z$  на внутреннюю часть единичного полукруга  $\Gamma_\zeta$

$$|\zeta| < 1, \quad \text{Im} \zeta > 0$$

с соответствием точек, указанным на фиг. 2, при котором свободная граница переходит в дугу круга  $\zeta = e^{is}$  ( $0 \leq s \leq \pi$ ), а остальная часть границы — в действительный диаметр  $\zeta = t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Тогда производная функции, осуществляющей отображение  $\Gamma_\zeta$  на область в плоскости комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$ , примет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = K q_0 \frac{1-\zeta}{\zeta^{3/2}} \quad (3)$$

где  $K$  — некоторая вещественная постоянная.

Введем функцию Жуковского

$$\Omega(\zeta) = i \ln \frac{1}{q_0} \frac{dw}{dz} \equiv \vartheta(\zeta) + i\tau(\zeta) \quad (4)$$

где  $\vartheta$  — угол вектора скорости с осью  $x$ ,  $dw/dz = qe^{-i\vartheta}$  — комплексная скорость течения.

Для аналитической в  $\Gamma_\zeta$  функции  $\Omega(\zeta)$  легко получить представление через функции  $\vartheta(t)$  и  $\tau(s) = \ln(q(s)/q_0)$ , где  $\vartheta(t)$  — предельное значение действительной части  $\Omega$  при  $\zeta \rightarrow t \in [t_0, 1]$ , а  $\tau(s)$  — предельное значение мнимой части  $\Omega$  при  $\zeta \rightarrow e^{is}$  ( $0 \leq s \leq \pi$ ). Действительно, на границе полукруга  $\Gamma_\zeta$  функция  $\Omega(\zeta)$  удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} \text{Im} \Omega(e^{is}) &= \tau(s) = \ln(q(s)/q_0), \quad s \in [0, \pi] \\ \text{Re} \Omega(t) &= \begin{cases} \vartheta(t), & t \in [t_0, 1] \\ 0, & t \in [-1, t_0] \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда в результате решения смешанной краевой задачи получим представление для функции  $\Omega$

$$\Omega(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{\pi i} \left[ \int_{t_0}^1 \frac{\vartheta(t) dt}{(t-\zeta)(1-\zeta t)} - \int_0^\pi \frac{\tau(s) ds}{1-2\zeta \cos s + \zeta^2} \right] \quad (5)$$

Соответствие между областью течения и параметрической плоскостью согласно равенствам (3), (4) задается функцией

$$z(\zeta) = K \int_1^{\zeta} \frac{1-\zeta}{\zeta^{3/2}} e^{i\Omega(\zeta)} d\zeta \quad (6)$$

с  $\Omega(\zeta)$ , определенной формулой (5). Зависимость  $l = l(t)$  находится из формулы

$$l(t) = K \int_{t_0}^t \frac{1-t}{t^{3/2}} e^{-i\text{Im}\Omega(t)} dt \quad (7)$$

где  $\text{Im}\Omega(t)$  — предельное значение мнимой части  $\Omega(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow t \in [-1, 1]$  причем согласно (5)

$$\text{Im}\Omega(t) = -\frac{1-t^2}{\pi} \left[ \int_0^1 \frac{\vartheta(\xi) d\xi}{(\xi-t)(1-t\xi)} - \int_0^{\pi} \frac{\tau(s) ds}{1-2t \cos s + t^2} \right] \quad (8)$$

При произвольно заданных  $\vartheta(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq 1$  и  $\tau(s)$ ,  $0 \leq s \leq \pi$  формулы (4) — (6) дают общее решение некоторой обратной задачи об обтекании дуги, форма которой заранее неизвестна, а на границе  $AB$  давление, вообще говоря, отлично от постоянного. Для решения прямой задачи о построении кавитационного течения около заданного препятствия  $P$  необходимо выполнить краевое условие (2) на свободной границе и соотношение  $\vartheta(t) = \Psi[l(t)/l(1)]$ , вытекающее из условия задания дуги  $P$  уравнением (1)

$$\tau(s) = \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{2\lambda}{J} \int_0^s \sin \frac{s}{2} e^{-\tau(s)} \sin \{\text{Re}\Omega(e^{is})\} ds \right], \quad s \in [0, \pi] \quad (9)$$

$$\vartheta(t) = \Psi \left[ \frac{1}{J} \int_{t_0}^t \frac{1-t}{t^{3/2}} e^{-i\text{Im}\Omega(t)} dt \right], \quad t \in [t_0, 1]$$

В этих формулах

$$\lambda = \frac{2}{p(1+\sigma) \text{Fr}^2}, \quad J = \frac{l(1)}{K} = \int_{t_0}^1 \frac{1-t}{t^{3/2}} e^{-i\text{Im}\Omega(t)} dt$$

$$\text{Re}\Omega(e^{is}) = \frac{\sin s}{\pi} \left[ 2 \int_{t_0}^1 \frac{\vartheta(t) dt}{1-2t \cos s + t^2} - \int_0^{\pi} \frac{\tau(\gamma) d\gamma}{\cos \gamma - \cos s} \right] \quad (10)$$

Из (4) и (5) при  $\zeta = 0$  следует соотношение для числа кавитации

$$\sigma = \frac{q_0^2}{q_{\infty}^2} - 1 = \exp \left\{ \frac{2}{\pi} \left[ \int_{t_0}^1 \frac{\vartheta(t)}{t} dt - \int_0^{\pi} \tau(s) ds \right] \right\} - 1$$

которое может служить дополнительным условием для определения параметра  $t_0$ . Однако в дальнейшем будем считать величину  $t_0$  фиксированной. Следовательно, число кавитации определяется после решения задачи.

С целью приближенного нахождения функций  $\vartheta(t)$  и  $\tau(s)$  из системы (9) поступим следующим образом. Введем в рассмотрение ряд фиксированных точек, расположенных на границе полукруга  $\Gamma_{\zeta}$

$$\zeta_k = e^{is_k} \quad (0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m < s_{m+1} = \pi), \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$$

Далее положим

$$\tau(s) = \sum_{k=0}^m \tau^k(s), \quad \vartheta(t) = \sum_{k=0}^n \vartheta^k(t) \quad (11)$$

где

$$\tau^k(s) = \begin{cases} 0, & s \text{ вне } [s_k, s_{k+1}] \\ \tau(s_k) + \frac{\cos s - \cos s_k}{\cos s_{k+1} - \cos s_k} [\tau(s_{k+1}) - \tau(s_k)] \equiv a_k + b_k \cos s, & s \in [s_k, s_{k+1}] \end{cases}$$

$$\vartheta^k(t) = \begin{cases} 0, & t \text{ вне } [t_k, t_{k+1}] \\ \vartheta(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} [\vartheta(t_{k+1}) - \vartheta(t_k)] \equiv c_k + d_k t, & t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

По построению

$$\tau^k(s_k) = \tau(s_k) \equiv \tau_k \quad (k = 0, \dots, m+1), \quad \vartheta^k(t_k) = \vartheta_k \quad (k = 0, \dots, n+1).$$

При такой интерполяции искомым функциям  $\vartheta(t)$  и  $\tau(s)$  — интегралы, входящие в представление (5) функции  $\Omega(\zeta)$ , вычисляются в явном виде

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \left\{ \sum_{k=0}^m b_k (s_{k+1} - s_k) \frac{1 - \zeta^2}{2\zeta} - i \left( a_k + b_k \frac{1 + \zeta^2}{2\zeta} \right) \times \right. \\ \left. \times [F_k(\zeta) - F_{k+1}(\zeta)] + R(\zeta) - R\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} \quad (12)$$

где

$$F_k(\zeta) = \ln \frac{\zeta - e^{is_k}}{1 - \zeta e^{is_k}}, \quad R(\zeta) = \sum_{k=0}^n (c_k + d_k \zeta) \ln \frac{t_{k+1} - \zeta}{t_k - \zeta}$$

Выполняя равенства (9) в точках  $\zeta_k = e^{is_k}$  ( $k = 1, \dots, m+1$ ) и  $t_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), приходим к системе  $m+n+1$  уравнений относительно параметров  $\tau_1, \dots, \tau_{m+1}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$

$$\tau_k = \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{2\lambda}{J} \int_0^{s_k} \sin \frac{s}{2} e^{-\tau(s)} \sin \vartheta(e^{is}) ds \right] \quad (k = 1, \dots, m+1)$$

$$\vartheta_k = \Psi \left[ \frac{1}{J} \int_{t_0}^{t_k} \frac{1-t}{t^{3/2}} e^{-\tau(t)} dt \right] \quad (k = 1, \dots, n) \quad (13)$$

$$(\tau(t) = \text{Im } \Omega(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \vartheta(e^{is}) = \text{Re } \Omega(e^{is}), \quad 0 \leq s \leq \pi)$$

После нахождения решения данной системы уравнений течение определяется формулами (3), (6), (12). При этом (по построению) уравнение (1) дуги  $P$  будет выполнено в точках  $z(t_k)$ ,  $k = 0, \dots, n+1$ , а условие постоянства давления (2) на границе  $AB$  — в точках  $z(e^{is_k})$ ,  $k = 0, \dots, m+1$ .

В первом приближении решение задачи находится при  $m = n = 0$ . Неизвестный параметр  $\tau_1 = \ln(q_b/q_0)$  определяется из единственного уравнения, оставшегося в этом случае от системы уравнений (13).

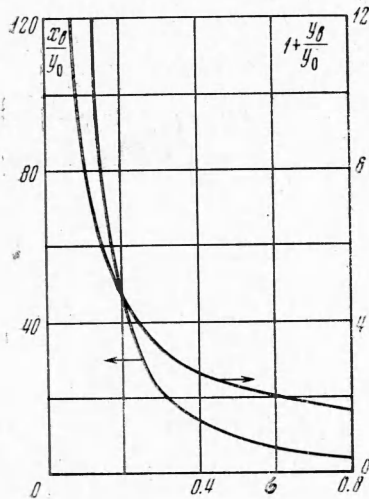
Допустим теперь, что решение задачи получено в  $i$ -м приближении. Тем самым при некоторых фиксированных параметрах  $s_k^i$  ( $k = 1, \dots, m_i$ ) и  $t_k^i$  ( $k = 1, \dots, n_i$ ) из системы уравнений (13) определены соответствующие им величины  $\vartheta_k^i$  ( $k = 1, \dots, n_i$ ) и  $\tau_k^i$  ( $k = 1, \dots, m_i+1$ ). Учитывая

вид функций  $\vartheta(t)$  и  $\tau(s)$ , заданных формулами (11), легко построить обратные зависимости  $t = T(\vartheta)$  и  $s = S(\tau)$ .

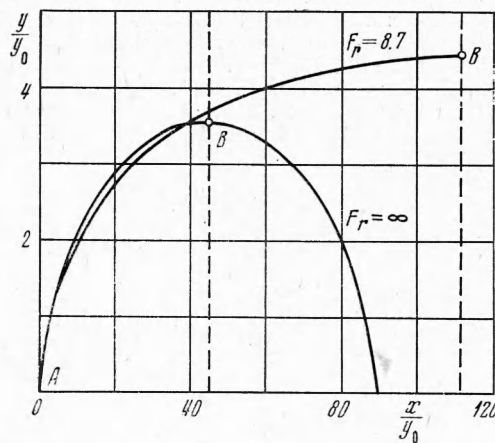
Решение задачи в  $(i+1)$ -м приближении с  $m = m_{i+1} > m_i$  и  $n = n_{i+1} > n_i$  проводится в следующей последовательности. Сначала, используя построенные ранее зависимости  $t = T(\vartheta)$  и  $s = S(\tau)$ , выбираются параметры  $t_k = t_k^{i+1}$  и  $s_k = s_k^{i+1}$

$$t_k = T(\Psi_k), \quad \Psi_k = \Psi\left(\frac{k}{n_{i+1} + 1}\right) \quad (k = 1, \dots, n_{i+1}) \quad (14)$$

$$s_k = S(f_k), \quad f_k = \frac{k}{m_{i+1} + 1} \tau_{m_{i+1}}^i \quad (k = 1, \dots, m_{i+1} + 1)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Система уравнений (13) решается методом итераций. При этом начальное приближение  $\vartheta_k^{(0)}$ ,  $\tau_k^{(0)}$  задается следующим образом:

$$\vartheta_k^{(0)} = \Psi_k \quad (k = 1, \dots, n_{i+1}), \quad \tau_k^{(0)} = f_k \quad (k = 1, \dots, m_{i+1} + 1)$$

При выборе узлов интерполирования функций  $\vartheta(t)$  и  $\tau(s)$  по закону (14) можно ожидать, что образы точек  $t_k$  и  $e^{i s_k}$  при отображении (6) будут достаточно равномерно распределены вдоль границы  $DAB$ . После нахождения решения системы производится проверка точности полученного приближенного решения гидродинамической задачи:

- 1) полученный профиль  $DA$  сравнивается с заданной криволинейной дугой  $P$ ;
- 2) производится сравнение формы каверны в  $i$ -м и  $(i+1)$ -м приближениях и условие постоянства давления проверяется на всей свободной границе

Описанный процесс построения приближенного решения исходной задачи повторяется до тех пор, пока с требуемой точностью не будут выполнены соотношения (1) и (2).

Расчеты, проведенные для ряда криволинейных профилей, показали высокую эффективность предложенного метода.

Ниже в качестве примера приводятся результаты расчета задачи о кавитационном обтекании препятствия в форме дуги окружности с углом отрыва  $\Psi(1) = 35^\circ$ . На фиг. 3 изображены кривые зависимости размеров

