

УДК 624.131

## ДИЛАТАНСИОННЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ УПАКОВОК ШАРОВ

**А. Ф. Ревуженко, А. П. Бобряков, В. П. Косых**

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,  
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, v-kosykh@yandex.ru,  
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Приведены экспериментальные данные по дилатансионным свойствам сыпучих сред, состоящих из одинаковых частиц сферической формы — стеклянных шариков, пшена, гороха. Рассмотрен простой сдвиг и сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензора деформаций. Циклическое деформирование способствует частичному устранению дефектов начальной стохастической упаковки и последующему ее переходу в обратимое состояние. Указана оптимальная относительная плотность упаковки для использования ее в методе дискретных элементов.

*Дилатансия, простой сдвиг, сложное нагружение, циклическое деформирование, сыпучие тела, стохастические упаковки, относительная плотность*

DOI: 10.15372/FTPRPI20210502

Дилатансия — свойство сыпучих тел менять свой объем при сдвиге. Оно открыто О. Рейнольдсом более 100 лет назад и часто иллюстрируется тем фактом, что пляжный мокрый песок под ступней белеет. Песчинки при нагрузке переупаковываются, объем пор возрастает, поровое давление жидкости падает, и вода уходит вниз. Дилатансия наряду с внутренним трением является фундаментальным свойством всех геоматериалов и во многом определяет их механическое поведение. В различных аспектах явление дилатансии исследовалось в [1–4].

В общем виде задачу исследования дилатансии можно описать таким образом:

- задается набор отдельных твердых частиц. Все их физические и геометрические параметры считаются известными;
- задаются либо конкретная (детерминированная) упаковка частиц, либо некий способ формирования упаковки, включающий в себя элементы стохастичности;
- задается определенная программа деформирования упаковки.

Требуется определить эволюцию упаковки во времени и, в частности, изменение ее относительного объема, т. е. параметры дилатансии упаковки.

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 21-17-00008), <https://rscf.ru/project/21-17-00008>.

Данная задача оказалась чрезвычайно сложной. Поиск ответа на вопрос о самой плотной стартовой упаковке одинаковых шаров занял более 400 лет. Задача о плотной упаковке сформулирована И. Кеплером в 1611 г. [5]. Частично ее решение получено в 1831 г. Гауссом, который показал, что среди регулярных самой плотной является упаковка с относительной плотностью:

$$\varphi = \varphi_{\max} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.7405, \quad \varphi = \frac{V_T}{V}, \quad (1)$$

где  $V_T$  — объем твердых частиц;  $V$  — общий объем.

Полное решение задачи получено только в 1998 г. [6]. Показано, что плотность по Гауссу максимальна для любых упаковок одинаковых шаров.

Весьма актуальны различные обобщения указанной задачи: исследование упаковок неодинаковых шаров, цилиндров и других частиц, поиск оптимального грансостава, позволяющего получить возможно более плотные упаковки и т. д. [7–9]. В последние десятилетия задача синтеза и исследования упаковок приобрела новое звучание в связи с развитием метода дискретных элементов, который используется для решения широкого круга задач горного дела [10–12]. В рамках данного метода горная порода и сыпучие среды рассматриваются как определенные упаковки отдельных твердых частиц. Между частицами задаются потенциалы взаимодействия. Таким образом, задачи деформирования и разрушения сводятся к задачам исследования эволюции различных упаковок под действием приложенных сил. Возможности аналитических методов здесь весьма ограничены. В связи с этим на первое место выходят методы численного и экспериментального моделирования. Настоящая работа выполнена в рамках второго направления.

Во многих областях механики большое значение имеют определенные размерные величины, которые могут играть роль естественного масштаба для некоторого класса явлений. Величина  $\varphi$  является безразмерной, поэтому на первый взгляд кажется, что естественного масштаба для нее нет. Однако если на формулу Гаусса (1) посмотреть с этой точки зрения, то возникает идея — принять в качестве масштаба плотности теоретически максимальную плотность упаковок одинаковых шаров.

Положим по определению

$$\varphi_n = \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \varphi \cdot 100\%. \quad (2)$$

Величину  $\varphi_n$  назовем нормированной относительной плотностью упаковки. Во многих отношениях эта характеристика удобнее, чем относительная плотность  $\varphi$ . Во-первых, для упаковок одинаковых шаров  $\varphi_n \leq 100\%$  всегда. По этой величине видно, насколько далеко она находится от идеала  $\varphi_n = 100\%$ . Кроме того, по изменению  $\varphi_n$  можно судить об эффективности тех или иных процедур по уплотнению упаковок. Можно ожидать, что по мере приближения  $\varphi_n$  к 100% затраты на уплотнение упаковки, например на 1%, будут расти по кривой, близкой к гиперболе.

Характеристики упаковок носят статический характер, поскольку описывают некоторое фиксированное (статическое) ее состояние. Для решения задач геомеханики подобных параметров недостаточно. Здесь нужны и динамические параметры, позволяющие описать эволю-

цию упаковок при различных путях ее нагружения. Если учесть, что для получения только одного исчерпывающего статического результата потребовалось 400 лет, то ожидать в обозримом будущем появления динамических исчерпывающих результатов не приходится. В то же время численным и экспериментальным моделированием можно получать сколько угодно частных результатов. Ничто не мешает затем обобщать их, привлекая либо методы континуальной механики, либо другие методы, например теорию силовых цепочек, перколяции и др. [13–16]. Окончательные результаты будут носить приближенный, феноменологический характер, но для решения прикладных задач геомеханики этого вполне достаточно.

Для построения континуальных уравнений и выбора оптимальных моделей метода дискретных элементов наибольший интерес представляют экспериментальные данные об эволюции упаковок в некоторых простейших ситуациях деформирования. В [17] дана их общая классификация. Остановимся на двух основных способах нагружения: простым сдвигом [4] и сложным нагружением с непрерывным поворотом осей тензора деформаций [18].

Для уменьшения числа степеней свободы эксперименты проводились с образцами, состоящими из частиц сферической формы: пшеном (диаметр зерен 1.5 мм, плотность 1.7 г/см<sup>3</sup>), горохом (диаметр зерен 6 мм, плотность 1.43 г/см<sup>3</sup>) и калиброванными стеклянными шариками диаметром  $1 \pm 0.1$  мм плотностью 2.72 г/см<sup>3</sup>.

### ПРОСТОЙ СДВИГ

Первая серия экспериментов выполнялась на приборе однородного сдвига [4]. Исходная упаковка формировалась путем засыпки материала через воронку диаметром 16 мм. Воронка опускалась на дно камеры и, сканируя по площади дна, постепенно поднималась вверх. Размеры образцов в плане составляли  $26 \times 26$  см. Начальная высота образцов из пшена равнялась 9 см, из гороха — 13 см, из стеклянных шариков — 8 см. Начальные нормированные плотности  $\varphi_n = 67.9\%$ , 82.6 и 73.0% соответственно. Нагружение осуществлялось достаточно медленно (0.57 град/с), циклами из положения камеры  $A$   $\alpha = -2.3^\circ$  до положения  $B$   $\alpha = 0^\circ$  и затем до положения  $C$   $\alpha = 2.3^\circ$ , потом в обратном порядке через положение  $B'$  в положение  $A'$  (рис. 1). Далее перо самописца перебрасывалось в точку начала следующего цикла (точка  $A$  на диаграмме) и проводился второй цикл деформирования, затем третий и т. д. Типичный характер дилатансионных кривых показан на рис. 1.

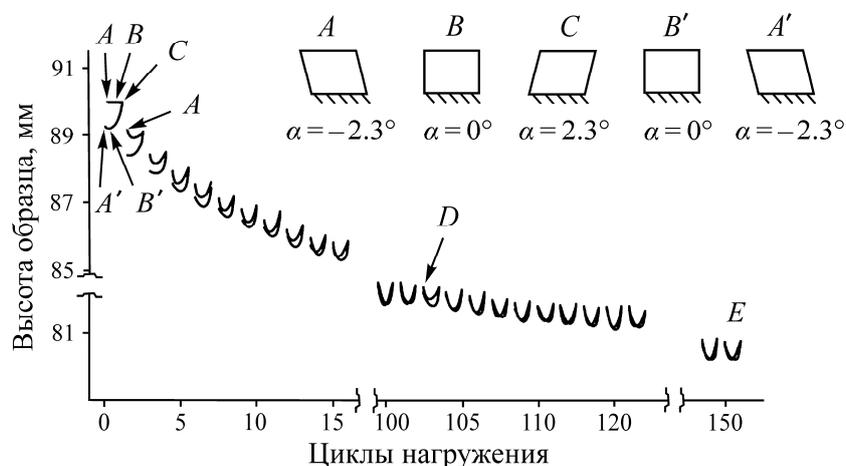


Рис. 1. Изменение высоты образца из пшена при циклических сдвигах

Видно, что вначале от цикла к циклу упаковка необратимо уплотняется. Через 100 циклов упаковка переходит в практически стационарное обратимое состояние. Наибольшая ее плотность  $\varphi_n(0) = 74.7\%$  достигается в середине цикла при  $\alpha = 0^\circ$ . При увеличении сдвига от  $\alpha = 0^\circ$  к  $\alpha = \pm 2.3^\circ$  упаковка разрыхляется до 74 %.

Для гороха и стеклянных шариков дилатансионные кривые аналогичны приведенным на рис. 1. В стационарном обратимом состоянии нормированная плотность гороха  $\varphi_n(0) = 86.7\%$  и  $\varphi_n(\pm 2.3) = 86.0\%$ , стеклянных шариков  $\varphi_n(0) = 77.9\%$  и  $\varphi_n(\pm 2.3) = 77.2\%$ .

В экспериментах невозможно исключить влияние силы тяжести на все результаты. Сила тяжести приводит к неоднородности деформирования образца: нижние слои образца испытывают большую пригрузку, чем верхние. Этот факт должен учитываться при построении континуальных моделей. Неоднородность деформирования можно уменьшить, создавая на свободной поверхности пригрузку. Пригрузка не меняет характер дилатансионных кривых.

После достижения стационарного обратимого состояния упаковки к образцу прикладывается пригрузка 2 кг. Этот момент нагружения (начало 103 цикла деформирования) показан на рис. 1 точкой D. По мере деформирования упаковка переходит в новое стационарное и более плотное состояние. Так, после 27 циклов (точка E на рис. 1) деформирования с пригрузкой нормированная плотность достигла значений  $\varphi_n(0) = 76.4\%$  и  $\varphi_n(\pm 2.3) = 75.7\%$ . Разгрузка образца и последующее деформирование приводят к его разрыхлению до значений плотности в цикле  $\varphi_n(0) = 75.7\%$  и  $\varphi_n(\pm 2.3) = 75.0\%$ , т. е. после разгрузки упаковка не возвращается в состояние до пригрузки — имеется гистерезис.

Аналогичный результат получен и для изменения плотности гороха. Пригрузка 2 кг увеличивает плотность упаковки до 86.9% при  $\alpha = \pm 2.3^\circ$  и до 87.5% при  $\alpha = 0$ , а последующая разгрузка — уменьшает  $\varphi_n(\pm 2.3)$  и  $\varphi_n(0)$  до 86.6 и 87.2% соответственно.

На рис. 2 представлены значения нормированной относительной плотности упаковки из стеклянных шариков при различных параметрах пригрузки. Числами без скобок обозначена плотность при  $\alpha = 0^\circ$ , в скобках — относительная плотность при  $\alpha = \pm 2.3^\circ$ . Видно, что после наложения пригрузки упаковка переходит в стационарное и более плотное состояние. При этом чем больше пригрузка, тем больше увеличивается плотность. После снятия пригрузки упаковка разрыхляется, но в прежнее состояние не возвращается.

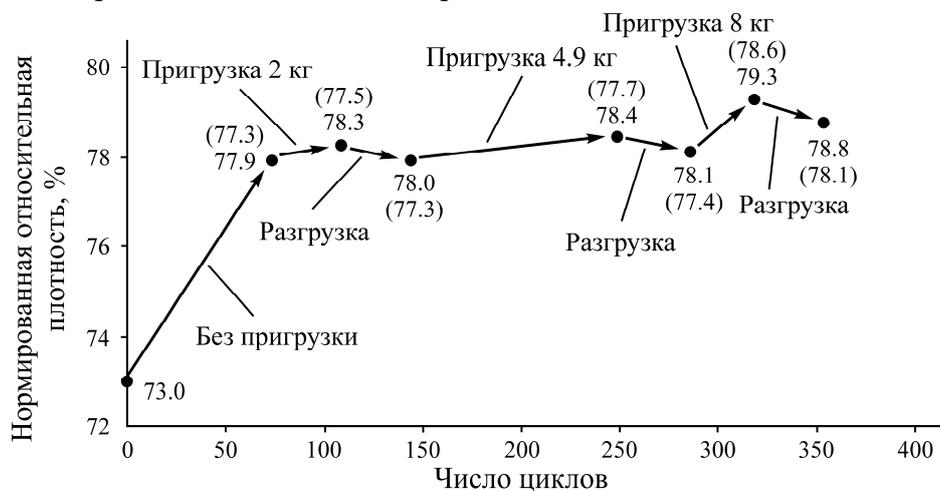


Рис. 2. Влияние пригрузки на изменение нормированной относительной плотности образца из стеклянных шариков при циклических сдвигах

## СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Материал помещался в прямой эллиптический цилиндр 1, ограниченный гибкой боковой поверхностью и дном, представляющим собой натянутую резину (рис. 3). Цилиндр вставлялся в полость жесткого статора 2. Нагружение осуществлялось путем вращения оболочки вдоль направляющей [18]. Начальная высота образцов для всех материалов составляла 160 мм, полуоси эллипса  $a = 58.6$ ,  $b = 57.5$  мм, коэффициент сжатия  $k = b/a = 0.98$ .

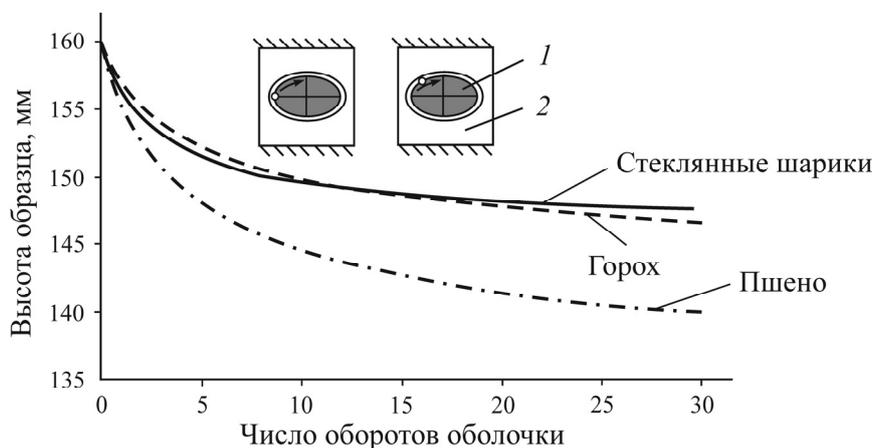


Рис. 3. Зависимость изменения высоты образцов сыпучих материалов от числа оборотов эллиптической оболочки с коэффициентом сжатия 0.98

На рис. 3 показаны изменения высоты образцов в зависимости от числа полных оборотов оболочки. С увеличением числа оборотов происходит уплотнение образцов всех материалов с затухающей скоростью уплотнения. Нормированная относительная плотность за 30 оборотов увеличивается у пшена с 58.6 до 67.0%, у гороха — с 73.1 до 79.8%, для стеклянных шариков — с 74.9 до 81.2%.

На рис. 4 отражены изменения высоты образцов из пшена в зависимости от коэффициента сжатия эллипса. Видно, что скорость уплотнения увеличивается с уменьшением значения  $k$ . Предельное значение уплотнения образца достигается с возрастанием величины  $k = b/a$ .

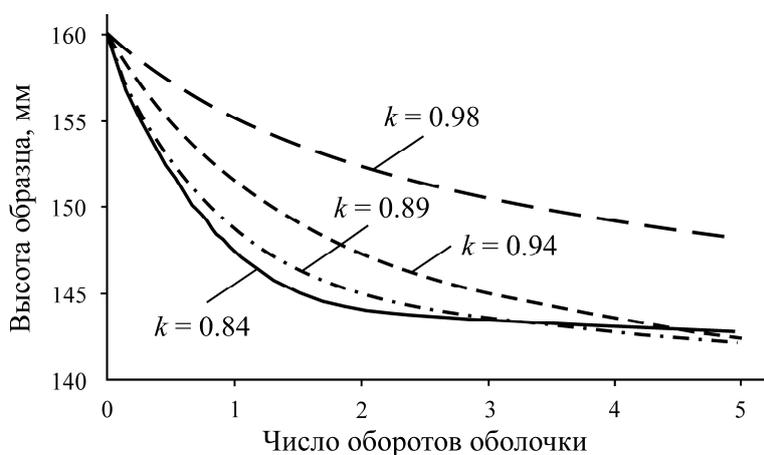


Рис. 4. Зависимость изменения высоты образцов из пшена от коэффициента сжатия оболочки

Аналогичные зависимости получены и для других материалов.

## ВЫВОДЫ

Знакопеременный простой сдвиг и сложное нагружение без внешней пригрузки позволяют увеличить нормированную относительную плотность на 3–4 %.

Деформирование с пригрузкой на свободной поверхности образца, равной его весу, дает увеличение плотности на 4–6 %.

Реальные стохастические упаковки, которые можно рекомендовать для использования в численном методе дискретных элементов, характеризуются нормированной плотностью в диапазоне 73–81 %.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаевский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности // Итоги науки и техники. Серия Механика твердых деформируемых тел. — М.: ВИНТИ, 1972. — Т. 6. — 86 с.
2. Определяющие законы механики грунтов: новое в зарубежной науке. — М.: Мир, 1975. — 230 с.
3. Механика гранулированных сред: теория быстрых движений: сост. И. В. Ширко. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
4. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // ФТПРПИ. — 1982. — № 5. — С. 23–29.
5. Кеплер И. О шестиугольных снежинках. — М.: Наука, 1982. — 192 с.
6. Hales T. C. An overview of the Kepler conjecture, 1998.
7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
8. Дересевич Г. Механика зернистой среды // Проблемы механики / под ред. Х. Драйдена, Т. Кармана. — М.: ИЛ, 1961. — С. 91–152.
9. Белов В. В., Образцов И. В., Иванов В. К., Коноплев Е. Н. Компьютерная реализация решения научно-технических и образовательных задач. — Тверь: ТвГТУ, 2015. — 108 с.
10. He Y., Evans T. J., Yu A., and Yang R. Discrete modelling of compaction of non-spherical particles, Powders and Grains — 8<sup>th</sup> Int. Conf. on Micromech. on Granular Media, 2017, Vol. 140, 01005.
11. Klishin S. V., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F. Numerical simulation of abutment pressure redistribution during face advance, AIP Conf. Proc., 2017, 020086. DOI: 10/1063/1.5013767.
12. Цзян Ж., Ван Г., Ли Ц., Сунь К., Хоу Я. Оптимизация параметров футеровки крупной мельницы полусамоизмельчения на основе метода дискретных элементов и модели кригинга // ФТПРПИ. — 2021. — № 1. — С. 36–48.
13. Allersma H. G. Photo-elastic stress analysis and strains in simple shear, Deform. and Failure Granular Mater., Rotterdam, 1982. — P. 345–353.
14. Drescher A., de Josselin de Jong G. Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material, J. Mech. Phys. Solids, 1972, Vol. 20, No. 5. — P. 337–351.
15. Тарасевич Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 112 с.
16. Кочарян Г. Г., Марков В. К., Остапчук А. А., Павлов Д. В. Мезомеханика сопротивления сдвигу по трещине с заполнителем // Физ. мезомеханика. — 2013. — Т. 16. — № 5. — С. 5–15.
17. Ревуженко А. Ф. О самых простых течениях сплошной среды // ДАН СССР. — 1988. — Т. 303. — № 1. — С. 54–58.
18. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф. Об одном методе испытания неупругих материалов // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1990. — № 4. — С. 178–182.

Поступила в редакцию 12/VII 2021

После доработки 23/VIII 2021

Принята к публикации 10/IX 2021