

УДК 532.5+534

МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В КАМЕРЕ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ СТРУИ ЧЕРЕЗ ЕЕ СОПЛО

В. Б. Курзин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: kurzin@hydro.nsc.ru

Рассмотрены свободные акустические колебания газа в камере при истечении струи через ее сопло с учетом нестационарной составляющей интенсивности вихревой пелены, стекающей с кромки сопла. Установлена обратная связь между акустическими колебаниями и колебаниями, индуцируемыми соответствующей составляющей вихревой пелены. Показано, что при наличии указанной обратной связи может возникнуть неустойчивость акустических колебаний, следствием которой являются акустические автоколебания в камере. Для определения границ области возникновения неустойчивости разработана математическая модель установившихся акустических колебаний в камере с учетом влияния вихревой пелены.

Ключевые слова: камера, струя, вихревая пелена, акустические колебания, обратная связь, неустойчивость, автоколебания.

DOI: 10.15372/PMTF20170610

Введение. Важной проблемой, возникающей при создании и эксплуатации конструкций, из которых истекает или через которые протекает сжимаемая среда, является наличие интенсивных акустических колебаний в них. Подобные явления имеют место в камерах сгорания реактивных двигателей на твердом топливе [1] и в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью [2].

Как правило, предполагается, что механизм данного явления обусловлен неустойчивостью вихревой пелены, возникающей при истечении струи [1, 2]. В этом случае, как правило, акустические колебания в камере рассматриваются в качестве вынужденных колебаний, возбуждаемых образующейся при этом периодической системой вихревых структур. Вероятность возникновения резонанса таких колебаний мала. Интенсивные акустические колебания в камерах при истечении струи имеют в основном частоты, равные частотам собственных акустических колебаний в камере. Это обстоятельство позволяет предположить, что в таких случаях могут иметь место акустические автоколебания в камере. Дополнительным аргументом в пользу этой версии являются экспериментальные данные, представленные на рис. 1. На рис. 1 приведен пример формирования вихревых колец при истечении струи из камеры [3]. Видно, что помимо вихревых колец, возникновение которых обусловлено неустойчивостью вихревой пелены типа неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, возникают вторичные вихревые кольца. В этом случае имеют место интенсивные акустические колебания в камере. В работе [4] сделано предположение, что данные

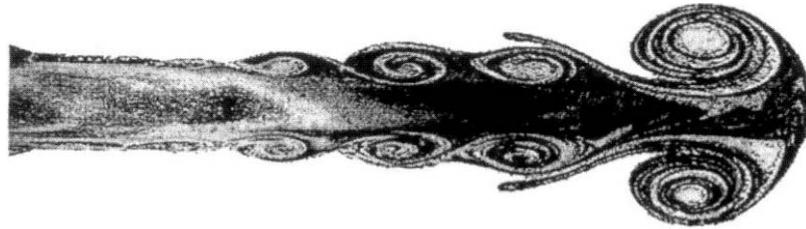


Рис. 1. Визуализация вихревых колец, формирующихся при истечении струи из камеры

вихри являются следствием появления нестационарной составляющей интенсивности вихревой пелены в результате возникновения собственных акустических колебаний в камере. Индуцируемое этой составляющей вихревой пелены движение газа в виде обратной связи может способствовать возникновению акустических автоколебаний в камере.

Целью данной работы является выяснение механизма обратной связи между собственными акустическими колебаниями в камере и нестационарным возмущением потока, индуцируемым нестационарной составляющей вихревой пелены, а также построение математической модели для определения условий возникновения акустических автоколебаний в камере с заданными геометрическими параметрами.

1. Общая постановка задачи о собственных акустических колебаниях в камере при истечении струи. Согласно теории колебаний автоколебательный процесс происходит при наличии постоянного источника энергии, которая поступает в рассматриваемую систему лишь при ее колебаниях. Действие периодических сил, не зависящих от колебаний системы, вызывает ее вынужденные колебания. Колебательными системами являются также объемы сжимаемой жидкости, содержащиеся в областях, границы которых являются частично жесткими. Вследствие отражения акустических волн от жестких границ в таких областях могут иметь место собственные акустические колебания. Допустим, что в открытой области с жесткими границами жидкость совершает движение под действием некоторого постоянного источника энергии. Тогда можно предположить, что за счет энергии потока при определенных условиях случайно возникшие собственные акустические колебания жидкости становятся неустойчивыми, вследствие чего имеет место автоколебательный процесс. Для определения механизма возникновения неустойчивости колебаний рассмотрим собственные акустические колебания в камере при истечении струи через ее сопло.

Схема камеры приведена на рис. 2 (U_0 — скорость истечения струи, D_0 — область камеры, D_1 — область сопла, D_2 — область, внешняя по отношению к области $D_0 \cup D_1$,

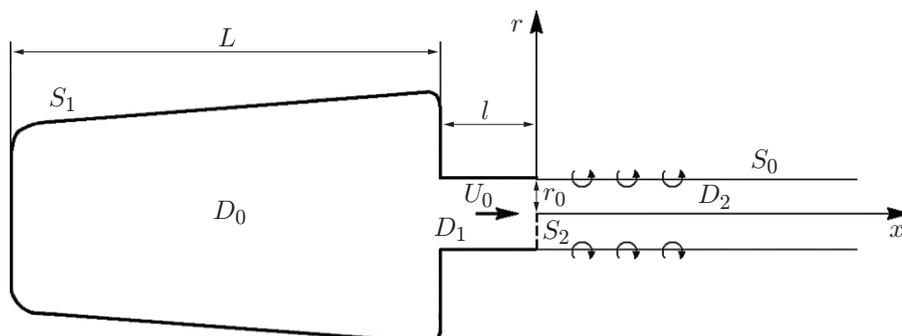


Рис. 2. Схема камеры и истекающей из нее струи

S_1 — жесткая граница области $D_0 \cup D_1$, S_2 — открытая граница на выходе из сопла, S_0 — вихревая пелена, r_0 — радиус сопла, L, l — длина камеры и сопла соответственно).

1.1. *Используемые предположения.* При исследовании акустических автоколебаний в камере не учитывается нестационарное возмущение потока, генерируемое периодической системой вихревых колец, образующихся вследствие неустойчивости вихревой пелены, так как это возмущение не зависит от собственных акустических колебаний в камере.

Математическая задача, решение которой описывает акустические автоколебания, в общем случае является нелинейной. Однако в предположении дозвукового течения жидкости в камере и в струе параметры течения являются непрерывными функциями геометрических параметров камеры. В отсутствие струи собственные акустические колебания в камере устойчивы. Поэтому согласно предположению о возникновении неустойчивости колебаний при истечении струи решение поставленной задачи заключается в определении параметров потока в камере заданной геометрии, при которых выполняется условие

$$\delta = 0. \quad (1.1)$$

Подобный прием применяется, например, при определении критической скорости флаттера летательных аппаратов.

Задача о возникновении акустических автоколебаний в области $D_0 \cup D_1$ решается в линейной постановке в рамках модели идеальной сжимаемой жидкости с учетом условия (1.1).

Нестационарную составляющую скорости потока целесообразно представить в виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_\gamma,$$

где \mathbf{u}_a — скорость акустических колебаний; \mathbf{u}_γ — скорость колебательного движения, индуцируемого нестационарной составляющей интенсивности вихревой пелены (далее — вихревая скорость [5]).

С учетом принятых предположений вне вихревой пелены движение жидкости является потенциальным, поэтому для описания акустических колебаний введем потенциал скорости φ_a , удовлетворяющий соотношению

$$\mathbf{u}_a = \nabla \varphi_a, \quad \varphi_a = \varphi e^{i\lambda t} \quad (\lambda = \omega + i\delta),$$

где ω — частота акустических колебаний; φ — амплитудная функция потенциала скорости акустических колебаний.

Вихревая скорость движения жидкости \mathbf{u}_γ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \mathbf{u}_\gamma = 0.$$

В предположении, что сопло камеры имеет цилиндрическую форму, при акустических колебаниях в камере в продольном направлении на выходе из сопла выражение для амплитуды скорости этих колебаний, необходимое для определения нестационарной составляющей вихревой пелены, может быть представлено в виде

$$\left. \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right|_{x=0} = u_0 = \text{const}, \quad \text{Im}(u_0) = 0, \quad (1.2)$$

где x, r — координаты цилиндрической системы, начало которой расположено на выходе из сопла камеры.

1.2. *Общая постановка краевой задачи о собственных акустических колебаниях в камере при истечении струи из ее сопла.* Решение задачи об установившихся собственных акустических колебаниях в ограниченной области сводится к определению амплитудной функции потенциала скорости колебаний φ , удовлетворяющей обобщенному уравнению Гельмгольца и следующим краевым условиям:

1) условию непротекания на жесткой границе S_1

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \nu} + u_{\gamma\nu}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_1, \quad (1.3)$$

где ν — нормаль к поверхности S_1 ; $u_{\gamma\nu}$ — проекция векторной функции вихревой скорости на нормаль;

2) условиям сопряжения амплитудных функций скоростей и давления акустических колебаний в камере (области $D_0 \cup D_1$) и на границе S_2

$$u_a^{(1)} = u_a^{(2)}, \quad p^{(1)} = p^{(2)}, \quad \mathbf{r} \in S_2 \quad (1.4)$$

(верхний индекс обозначает номер области);

3) условию излучения акустических волн из камеры;

4) условиям кинематической и динамической совместности течения на поверхности контактного разрыва S_0 , моделирующей вихревую пелену:

$$[u_\nu^{(2)}] = 0, \quad [p^{(2)}] = 0, \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (1.5)$$

(ν — нормаль к поверхности S_0);

5) условию Жуковского об ограниченной величине скорости течения в окрестности задней кромки сопла.

При заданном значении амплитуды скорости собственных акустических колебаний u_0 на выходе из сопла определение границы области устойчивости этих колебаний в области $D_0 \cup D_1$ сводится к определению условий существования решения поставленной задачи при условии (1.1).

2. Метод решения поставленной однородной краевой задачи. Ниже описан метод решения поставленной задачи.

2.1. Метод склеивания. Условие (1.4) поставленной задачи может быть выполнено с помощью метода склеивания. Вариант этого метода, рассмотренный в работе [6], состоит в следующем. Одна из функций, подлежащих склеиванию, на общей границе S_2 соответствующих подобластей задается в виде ряда Фурье с неопределенными коэффициентами. Для каждого члена этого ряда решается вспомогательная краевая задача в каждой подобласти. Таким образом, в этих подобластях определяются решения поставленной задачи с точностью до неопределенных констант указанного ряда Фурье. Из этих решений с точностью до тех же неопределенных констант находятся выражения для второй функции, подлежащей склеиванию на границе S_2 . Разлагая соответствующие функции в ряды Фурье на границе S_2 и согласно условию (1.4) приравнивая коэффициенты этих рядов, получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно неопределенных констант. Условие существования решения этой системы определяется из условия равенства нулю определителя матрицы коэффициентов полученной системы алгебраических уравнений. Корни соответствующего характеристического уравнения определяют искомую зависимость скорости истечения струи от заданных геометрических параметров камеры.

2.2. Дополнительные предположения. Ниже приводится теоретическое доказательство справедливости предположения о физическом механизме возникновения акустических автоколебаний. Примем некоторые дополнительные предположения.

Предполагается, что камера осесимметрична, а ее сопло имеет цилиндрическую форму. С использованием терминологии, принятой в [7], в качестве “задающих” принимаются акустические колебания в камере в продольном направлении. Предполагается также, что в ее сопле они могут быть представлены в одномерном приближении, в котором обобщенное уравнение Гельмгольца имеет вид

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2ikM \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0, \quad M = \frac{U_0}{a}, \quad k = \frac{\omega}{a} \quad (2.1)$$

(a — скорость звука).

Влияние нестационарной составляющей интенсивности вихревой пелены на колебательный процесс в камере рассматривается в линейном приближении. Основанием для этого являются результаты, полученные при изучении крыла и решеток в нестационарном потоке [8, 9].

3. Определение акустического давления в окрестности открытой границы камеры в области D_2 . Согласно условию Жуковского на выходе из сопла с учетом сделанных предположений имеет место соотношение

$$u_{2a}(x) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = u_0 \quad (0 < x < \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 \leq r < r_0). \quad (3.1)$$

В этом случае выражение для амплитуды акустического давления p_2 может быть представлено с помощью интеграла Коши — Лагранжа в виде

$$p_2(x, r) = -\rho_0 \left(i\omega \varphi_2 + U_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + c_2 \quad (0 < x < \varepsilon \rightarrow 0, \quad r < r_0).$$

Зависимость величины этого давления от параметров сопла может быть определена с помощью решения задачи об излучении акустической волны, распространяющейся в трубе бесконечной длины из открытого конца. Предварительно рассмотрим эту зависимость, определению которой посвящено большое количество работ, для случая $M = 0$. Некоторые результаты, полученные в этих работах, содержатся в [10], где, в частности, приведено выражение для амплитудной функции акустического давления на выходе из трубы в виде

$$p_0 = z_0 u_0. \quad (3.2)$$

Здесь u_0 — амплитуда скорости акустических колебаний; z_0 — акустический импеданс:

$$z_0 = \rho_0 a \chi_0(k_0), \quad \chi_0 = \chi_{01} + i\chi_{02}, \quad k_0 = kr_0. \quad (3.3)$$

В случае трубы без фланца согласно [10] при низкочастотных колебаниях имеет место оценка

$$\chi_{01} = k_0^2/4, \quad \chi_{02} = 2k_0/\pi. \quad (3.4)$$

Рассмотрим случай, когда $M \neq 0$. Для акустического давления вне струи введем интеграл Коши — Лагранжа

$$p_2^{(0)}(x, r_0 + \varepsilon) = -i\omega \rho_0 \varphi_2^{(0)} + c_2^{(0)} \quad (0 < x < \varepsilon, \quad r = r_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.5)$$

Из условия динамической совместности течения на поверхности контактного разрыва (1.5) получаем равенство

$$\rho_0 \left(i\omega \varphi_2 + U_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) - c_2 = i\omega \rho_0 \varphi_2^{(0)} - c_2^{(0)} \quad (x = \varepsilon, \quad r = r_0). \quad (3.6)$$

Из условия излучения, которому должен удовлетворять потенциал скорости Φ , для его амплитудной функции с учетом (2.1), (3.1) следует уравнение

$$ik\varphi_2 + (1 + M) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \quad (x < \varepsilon, \quad r < r_0).$$

Полагая, что это уравнение справедливо и в случае $M \rightarrow 0$, подставим его в равенство (3.6). В результате с учетом (3.5) получаем

$$i\omega \rho_0 \varphi_2^{(0)} = c_2^{(0)} - c_2 - \rho_0 u_0.$$

Поскольку согласно предположению значение заданной величины u_0 не зависит от скорости истечения струи, из этого соотношения следует, что амплитуда акустического давления в окрестности S_2 не зависит от скорости U_0 , т. е. согласно (3.2)

$$p_2(x) = p_0 = z_0 u_0 \quad (0 < x < \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 \leq r < r_0). \quad (3.7)$$

4. Определение акустического давления в окрестности открытой границы камеры в области D_1 . В силу линейности задачи амплитудную функцию акустического давления в камере представим в виде

$$p_1 = p_{1a} + p_{1\gamma},$$

где величина p_{1a} определяется при однородных условиях на границе S_1 ; $p_{1\gamma}$ — акустическое давление, возникновение которого обусловлено взаимодействием вихревых колебаний с поверхностью камеры (см. (1.3)).

4.1. *Выражение для составляющей акустического давления p_{1a} .* В силу предположения об одномерном характере “задающих” акустических колебаний в подобласти D_1 соответствующая амплитудная функция потенциала скорости φ_{1a} удовлетворяет уравнению (2.1), общее решение которого может быть представлено в виде

$$\varphi_{1a} = c_1 \exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right). \quad (4.1)$$

На границе S_2 ($x = 0$) соответствующая компонента амплитуды скорости акустических колебаний согласно (1.2) равна

$$u_0 = ik\left(\frac{c_1}{1-M} - \frac{c_2}{1+M}\right). \quad (4.2)$$

Функция φ_{1a} должна также удовлетворять условиям сопряжения типа условий (1.4) с решением в области D_0 на границе S_1 . При этом в выражении для акустического давления в области D_1 неопределенную константу в интеграле Коши — Лагранжа следует принять равной нулю. Условие на бесконечности, определяющее величину этой константы, содержится в условии сопряжения соответствующего давления с давлением в области D_2 . Из выражения (2.1) с учетом (4.1) следует, что величина рассматриваемой составляющей акустического давления при $x = 0$ должна удовлетворять соотношению

$$p_{1a} = -i\rho_0 a k \left(\frac{c_1^{(1)}}{1-M} + \frac{c_2^{(1)}}{1+M} \right).$$

4.2. *Вектор скорости $\mathbf{u}_{1\gamma}$ колебательного движения жидкости в области D_1 , индуцируемого нестационарной составляющей вихревой пелены.* Для определения составляющей акустического давления $p_{1\gamma}$ необходимо знать величину вихревой скорости в области D_1 , которая индуцируется нестационарной составляющей интенсивности вихревой пелены $\gamma(r, t)$. С этой целью используем выражение для циркуляции скорости по замкнутому контуру, окружающему вихревую пелену и расположенному в ее поперечном сечении [3. С. 78]. Согласно этому выражению при истечении струи из сопла с учетом акустических колебаний в камере при условии (1.1) циркуляция на интервале времени t равна

$$\Gamma^*(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (U_0 + u_0 e^{i\omega t_0})^2 dt_0 \approx \Gamma_0(t) + \Gamma(t),$$

$$\Gamma_0(t) = \frac{1}{2} U_0^2 t, \quad \Gamma(t) = U_0 u_0 \int_0^t e^{i\omega t_0} dt_0$$

(t_0 — момент схода с кромки сопла элемента вихревой пелены).

В течение малого промежутка времени $dt = t - t_0$ частицы газа, сходящие с кромки сопла, образуют элементарное вихревое кольцо с циркуляцией

$$d\Gamma = U_0 \left(\frac{1}{2} U_0 + u_0 e^{i\omega t_0} \right) dt,$$

размер которого определяется величиной

$$dx = (U_0/2) dt.$$

Сошедшие с кромки сопла частицы жидкости движутся со скоростью, равной скорости потока, и образуют вихревую пелену, которую можно рассматривать как множество вихревых колец с циркуляцией $d\Gamma = (\gamma_0(x) + \gamma(x, t)) dx$. На начальном участке нестационарная составляющая интенсивности вихревой пелены равна

$$\gamma(0, t_0) = 2u_0 e^{i\omega t_0}. \quad (4.3)$$

Линейная модель вихревой пелены, применяемая в данной работе, построена с использованием следующих дополнительных предположений. Предполагается, что все линии тока основного потока параллельны оси симметрии. В предположении, что завихренные частицы газа, срывающиеся с кромки сопла, движутся вдоль линии тока основного потока, вихревая пелена может быть представлена в виде бесконечного цилиндра, радиус r_0 которого равен радиусу сопла.

В рамках используемой модели скорость распространения частиц вихревой пелены равна $U_0/2$, а выражение для нестационарной составляющей ее интенсивности $\gamma(x, t)$ с учетом (4.3) может быть представлено в виде

$$\gamma(x, t) = 2u_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{2x}{U_0} \right) \right].$$

Для определения амплитудной функции скорости вихревых колебаний используем выражение для функции тока ψ , описывающей движение жидкости, индуцируемое вихревым кольцом, и выражения для проекций скоростей этого движения, приведенные в [3. С. 22]:

$$\psi = \frac{\Gamma}{4} \frac{r^2 r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}}, \quad u_{\gamma x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_{\gamma r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Из этих выражений находим

$$u_{\gamma x}(x, r) = u_0 r_0^2 \int_{x_0=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu_0 x_0}}{[r_0^2 + (x_0 - x)^2]^{3/2}} dx_0, \quad \mu_0 = \frac{2k}{M},$$

$$u_{\gamma r}(x, r) = \frac{1}{2} u_0 r r_0^2 \int_{x_0=0}^{\infty} e^{-i\mu_0 x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{1}{[r_0^2 + (x_0 - x)^2]^{3/2}} dx_0.$$

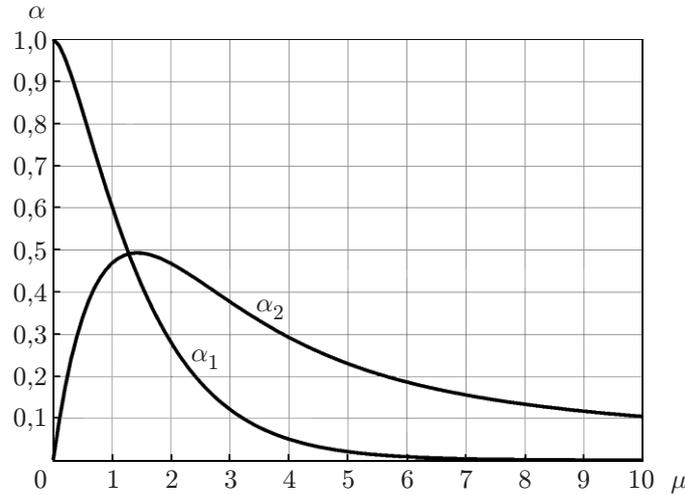
В области D_1 проекции вектора \mathbf{u}_γ целесообразно представить в виде

$$u_{1\gamma x} = u_0 e^{-i\mu_0 x} (\alpha_0 + \alpha_x), \quad u_{1\gamma r} = \frac{ikr}{M} u_{\gamma x} - \frac{u_0 r}{2r_0(1+x_1^2)^{3/2}} \quad \left(x_1 = \frac{x}{r_0} \right),$$

$$\alpha_0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\mu\eta}}{(1+\eta^2)^{3/2}} d\eta, \quad \alpha_x = r_0^2 \int_0^x \frac{e^{-i\mu_0 x_0}}{[r_0^2 + (x_0 - x)^2]^{3/2}} dx_0 \quad (\mu = \mu_0 r_0). \quad (4.4)$$

Зависимость величины $\alpha_0 = \alpha_1 - i\alpha_2$ от параметра μ , представленная на рис. 3, играет определяющую роль в модели акустических автоколебаний. Справедливо асимптотическое представление

$$\alpha_1 \simeq e^{-\mu}, \quad \alpha_2 \simeq \frac{1}{\mu} = \frac{M}{2kr_0} \quad (\mu \rightarrow \infty).$$

Рис. 3. Зависимости параметров α_1 и α_2 от параметра μ

4.3. *Определение величины акустического давления $p_{1\gamma}$ на границе S_2 .* Составляющая акустического давления $p_{1\gamma}$, возникновение которого обусловлено вихревыми колебаниями, зависит от характера взаимодействия вихревых и акустических колебаний на жестких границах области D_1 и определяется из условия

$$u_{1ar}(x, r_0) = -u_{1\gamma r}(x, r_0) \quad (-l \leq x \leq 0). \quad (4.5)$$

Для определения искомой величины $p_{1\gamma}$ введем подобласть D_{10} области D_1 , границами которой являются цилиндрическая поверхность радиусом $r = r_0$ и сечения, перпендикулярные оси x и проходящие через точки с координатами $x = -\varepsilon r_0$ ($x \ll 1$).

Искомая величина $p_{1\gamma}(0, r)$, так же как и величина скорости $\mathbf{u}_{1\gamma}$, зависит от координаты r . Поскольку в данной работе основной поток в области D_1 и акустические колебания рассматриваются в одномерном приближении, введем среднюю величину $p_{1\gamma}$ в сечениях $S(x)$

$$\bar{p}_{1\gamma}(x) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_{S(x)} p_{1\gamma}(r, x) ds. \quad (4.6)$$

Определим эту величину с использованием интегрального закона сохранения масс в области D_{10} , который для нестационарной составляющей движения может быть представлен в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{10}} \frac{p_{1\gamma} e^{i\omega t}}{a^2} dv + \oint \rho_0 (\mathbf{u}_a \cdot \boldsymbol{\nu}) ds = 0. \quad (4.7)$$

Первый член этого выражения с учетом (4.6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{10}} \frac{p_{1\gamma} e^{i\omega t}}{a^2} dv = \frac{ik_0}{a} \pi r_0^2 e^{i\omega t} \int_{-\varepsilon}^0 \bar{p}_{1\gamma} dx_1,$$

второй его член с учетом (4.5) — к виду

$$\oint (\mathbf{u}_a \cdot \boldsymbol{\nu}) ds = -2\pi r_0^2 e^{i\omega t} \int_{-\varepsilon}^0 u_{1\gamma r}(x_1, r_0) dx_1.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение (4.7), находим

$$\int_{-\varepsilon}^0 [ik_0 \bar{p}_{1\gamma}(x_1) - 2\rho_0 a u_{1\gamma r}] dx_1 = 0.$$

С учетом (4.4) отсюда следует

$$\bar{p}_{1\gamma}|_{x=0} = -\frac{i\rho_0 a}{k_0} i\mu\alpha_0 u_0.$$

Аналогично (3.2), (3.3) представим это выражение в виде

$$\bar{p}_{1\gamma}|_{x=0} = z_\gamma u_0, \quad z_\gamma = \rho_0 a \chi_\gamma, \quad \chi_\gamma = \chi_{\gamma 1} + i\chi_{\gamma 2}, \quad (4.8)$$

где $\chi_{\gamma 1} = \mu\alpha_1/k_0$; $\chi_{\gamma 2} = -\mu\alpha_2/k_0$.

5. Определение условий возникновения акустических автоколебаний в камере. Используя выражения (3.7), (4.8), представим условие сопряжения (1.4) для амплитуды акустического давления в виде

$$-i\rho_0 a k \left(\frac{c_1^{(1)}}{1-M} + \frac{c_2^{(1)}}{1+M} \right) = (z_0 - z_\gamma) u_0. \quad (5.1)$$

Левая часть этого соотношения определяет акустическое давление на границе S_2 в области D_1 , возникающее при собственных акустических колебаниях в области $D_0 \cup D_1$. Неопределенные константы $c_j^{(1)}$ находятся из условия (4.2) и условия сопряжения функции (4.1) с решением вспомогательной краевой задачи для обобщенного уравнения Гельмгольца в области D_0 при условии (5.1) и условии

$$\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{r})}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_1.$$

Правая часть выражения (5.1) определяет влияние излучения акустических колебаний в области $D_0 \cup D_1$ через открытую границу S_2 и вихревых колебаний, индуцируемых нестационарной составляющей вихревой пелены, на собственные акустические колебания в ней. Выражение в правой части (5.1), полученное в аналитическом виде, позволяет априори сделать вывод о возможности возникновения акустических автоколебаний в этой области при истечении струи.

5.1. *Физический механизм возникновения автоколебаний в камере.* Объем сжимаемой жидкости, содержащейся в ограниченной области $D_0 \cup D_1$, рассматривается в качестве колебательной системы, которая может совершать собственные акустические колебания. В рамках модели идеальной жидкости кинетическая энергия этой системы изменяется лишь при ее взаимодействии с границей области. При неподвижной жесткой границе изменение энергии системы происходит лишь на ее открытой границе. Для его определения используем выражение для акустического давления на выходе из сопла, которое содержится в правой части (5.1). С учетом (3.3), (4.8) мощность, с которой внешние аэродинамические силы воздействуют на рассматриваемую колебательную систему на открытой границе S_2 , равна

$$N = -\pi r_0^2 P_2 u_0 = -\pi r_0^2 z u_0^2, \quad z = z_0 - z_\gamma. \quad (5.2)$$

С физической точки зрения неравенство $\text{Re}(z_0) > 0$ определяет величину акустической энергии системы, которая теряется при излучении. Согласно (4.8) для составляющей z_γ имеет место неравенство $\text{Re}(z_\gamma) > 0$. Следовательно, согласно (5.2) в рамках данной модели при условии $\text{Re}(z_\gamma) > \text{Re}(z_0)$ должна возникнуть неустойчивость колебаний данной

системы, в теории колебаний интерпретируемая как автоколебания. Физический механизм этого процесса состоит в следующем. При истечении жидкости из камеры за счет энергии потока всегда образуется вихревая пелена. Случайно возникшие в ней собственные акустические колебания приводят к образованию нестационарной составляющей ее интенсивности. Эта составляющая вихревой пелены индуцирует колебательное движение жидкости с вихревой скоростью u_γ . При взаимодействии этого колебательного течения с поверхностью камеры возникают дополнительные акустические колебания в виде обратной связи, энергия которых при положительной обратной связи, характеризуемой неравенством $\text{Re}(z_\gamma) > 0$, переходит в энергию порождающих их акустических колебаний. На границе области устойчивости акустических колебаний в камере должно выполняться условие

$$\text{Re}(z)_0 = \text{Re}(z_0) - \text{Re}(z_\gamma) = 0. \quad (5.3)$$

Следует отметить, что помимо потерь на излучение, определяемых величиной $\text{Re}(z_0)$, возможны потери акустической энергии в камере, обусловленные другими причинами. Например, энергия всегда затрачивается на работу сил трения, а также теряется при взаимодействии акустических волн с различными препятствиями.

В областях, содержащих движущиеся конструктивные элементы, при протекании через них жидкости может иметь место положительная обратная связь соответствующей колебательной системы с указанными элементами. Механизм возникновения этого явления в проточной части гидротурбин рассмотрен в работе [11].

Заметим также, что аналогичный физический механизм возникновения обратной связи имеет место при упругих колебаниях крыла и гидродинамических решеток в потоке [8, 9]. Величина соответствующей обратной связи определяется зависимостью нестационарных характеристик решеток от числа Струхала.

5.2. *Определение критической скорости истечения струи, при которой возможно возникновение акустических автоколебаний в камере с заданными геометрическими параметрами.* Согласно (5.1) критическая скорость истечения струи определяется не только условием (5.3), но и соотношением

$$-i\rho_0 a k \left(\frac{c_1^{(1)}}{1-M} + \frac{c_2^{(1)}}{1+M} \right) = i \text{Im}(z) u_0, \quad (5.4)$$

которому должны удовлетворять собственные частоты акустических колебаний соответствующей системы.

Для того чтобы были выполнены краевые условия поставленной линейной задачи с учетом соотношений (5.3), (5.4), необходимо решить замкнутую систему однородных алгебраических уравнений, которая может быть представлена в матричной форме

$$A(k_0, M)X = 0,$$

где X — вектор аппроксимации амплитудных функций акустического давления; A — матрица коэффициентов при соответствующих компонентах вектора X , среди которых имеется константа u_0 .

Условием существования нетривиального решения данной системы уравнений является равенство нулю определителя матрицы:

$$|A(k_0, M)| = 0.$$

Корнями соответствующего характеристического уравнения являются пары искомых величин k_{0j} , M_j .

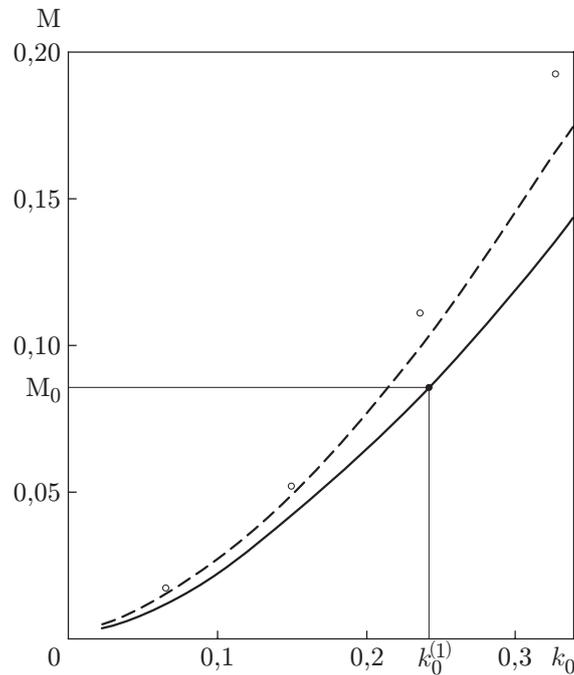


Рис. 4. Зависимость числа Маха при истечении струи от собственной частоты акустических колебаний, при которой они теряют устойчивость: сплошная линия — случай, когда оба конца трубки открыты, штриховая — случай, когда один конец трубки открыт, другой — закрыт, точки — экспериментальные данные

5.3. Об одной физической закономерности процесса, следующей из выражения для акустического импеданса на границе S_2 . С учетом выражений (3.3), (4.4), (4.8) условие (5.3) для акустического импеданса может быть представлено в виде

$$\alpha_1(\mu)/M - \chi_{01} = 0, \quad \mu = 2k_0/M. \quad (5.5)$$

На рис. 4 сплошной линией показана зависимость искомой величины M от параметра k_0 , удовлетворяющая с учетом выражения (3.4) уравнению (5.5). Выберем на кривой этой зависимости некоторую произвольную точку с координатами $(k_0^{(1)}, M_0)$. Согласно данной модели в области $D_0 \cup D_1$ собственные акустические колебания, приведенные частоты которых удовлетворяют неравенству $k_{0j} < k_0^{(1)}$ при числе Маха, равном M_0 в случае истечения струи, должны быть неустойчивыми. Иными словами, в этом случае может возникнуть автоколебательный процесс с образованием волн с несколькими модами. При этом вследствие дополнительных потерь акустической энергии для возникновения неустойчивости собственных акустических колебаний с частотами, удовлетворяющими неравенству $k_{0j} < k_0^{(1)}$, необходимо, чтобы скорость истечения удовлетворяла неравенству

$$M > M_0.$$

6. Расчет критической скорости истечения струи из ограниченной области простейшей геометрии и сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными. Возникновение акустических автоколебаний в ограниченной области при истечении струи и некоторые их закономерности, описанные в подп. 5.3, согласуются с экспериментальными данными, полученными в работе [12]. Экспериментальная установка представляла собой трубку длиной L и радиусом R_0 , один конец которой был соединен с камерой достаточно большого объема по сравнению с объемом трубки. Под действием избыточного давления в камере из нее истекал газ с заданной скоростью U_0 через

цилиндрическое отверстие радиусом r_0 , выполненное в крышке. На рис. 5 представлена зависимость частоты акустических колебаний различной интенсивности от скорости истечения струи для трех трубок различной длины. Частота колебаний газа в трубке совпадает с частотами собственных акустических колебаний в ней. Экспериментальная зависимость числа мод, возникающих одновременно, от скорости истечения струи качественно согласуется с зависимостью, полученной в подп. 5.3. Что касается амплитуд соответствующих колебаний, то их непредсказуемость не противоречит соответствующей теоретической модели, так как их величина зависит от начальных условий, которые в данном случае были случайными.

Для проведения количественного сравнения результатов расчетов, полученных в данной работе, с экспериментальными данными [12] выполним расчет критической скорости истечения струи из трубки, имеющей следующие геометрические размеры: $L = 300$ мм, $R_0 = 25$ мм, $r_0 = 7,5$ мм. При этом отверстие в торцевой крышке толщиной $t \ll L$, через которое происходит истечение газа, рассматривается в качестве сопла радиусом r_0 и длиной $l = t$.

Введем цилиндрическую систему координат, начало которой расположено в центре сечения трубки на входе в нее из камеры, а ось x направлена вдоль потока. Рассмотрим несколько первых мод акустических колебаний, распространяющихся в продольном направлении. В этом случае согласно предположению $l \ll L$ зависимостью амплитуды колебаний от координаты x в сопле можно пренебречь. В качестве неопределенной константы, характеризующей уровень акустических колебаний в трубке, примем амплитуду скорости акустических колебаний на выходе из сопла u_0 . Амплитудная функция акустических колебаний в трубке должна удовлетворять уравнению (2.1) и краевым условиям

$$p = -\tilde{z}_0 u \quad (x = 0), \quad p = z u_0 \quad (x = L).$$

При этом значения вещественной и мнимой частей акустического импеданса \tilde{z}_0 , в отличие от соответствующих значений в выражениях (3.2)–(3.4), согласно [10] следует принять равными их значениям при излучении акустических волн из трубки с фланцем:

$$\tilde{\chi}_{01} = (kR_0)^2/2, \quad \tilde{\chi}_{02} = 8kR_0/(3\pi). \quad (6.1)$$

Значение $z = \tilde{z}_0 - z_\gamma$ определяется с учетом выражений (3.3), (3.4), (4.8).

Для замыкания системы уравнений относительно неопределенных констант принимается условие неразрывности течения при $x = L$ в виде

$$u|_{x=L-\varepsilon} = (r_0/R_0)^2 u_0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

В результате получаем однородную систему трех алгебраических уравнений относительно произвольных констант c_1 , c_2 , u_0 . Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\exp\left(\frac{2ikL}{1-M^2}\right) \left[1 + z\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2\right] = \frac{1-z_0}{1+z_0} \left[1 - z\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2\right].$$

Корнями этого уравнения являются значения параметров k_0 , M , при которых выполняется условие (1.1). Представим выражения для искомых величин $k_0 = kr_0$ в виде

$$k_{0n} = (r_0/L)(n\pi + \Delta_n)(1 - M^2) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N).$$

Тогда характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$e^{2i\Delta_n} = \frac{(1 - z_{0n})(r_0^2 - z_n R_0^2)}{(1 + z_{0n})(r_0^2 + z_n R_0^2)}.$$

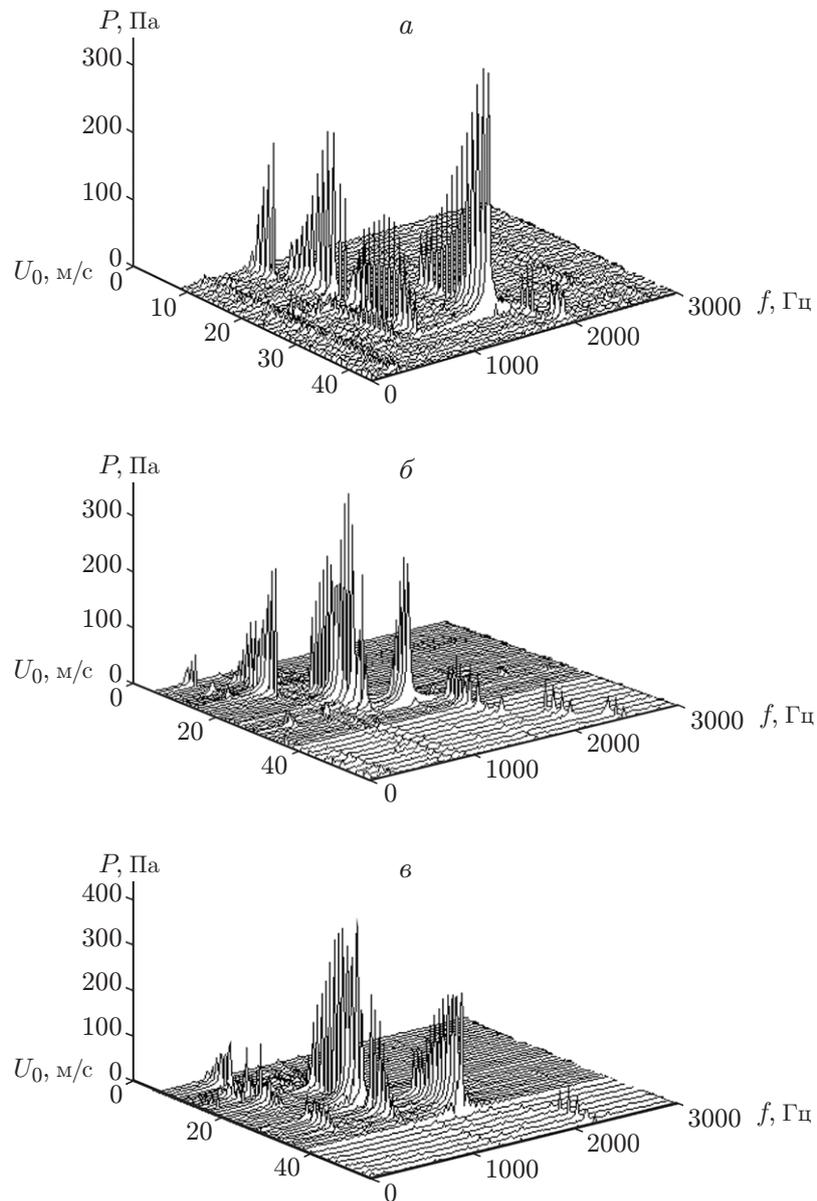


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики акустических колебаний в трубке, возникающих при протекании через нее потока газа с различными скоростями:

a — $L = 750$ мм, *b* — $L = 450$ мм, *c* — $L = 300$ мм

С учетом выражений (3.3), (3.4), (4.8), (6.1) это комплексное уравнение эквивалентно следующим двум вещественным уравнениям:

$$\frac{3k_{0n}^2}{4} - \frac{\mu\alpha_1(\mu_n)}{k_{0n}} = 0, \quad \Delta_n = -\frac{2k_{0n}}{\pi} \frac{R_0}{r_0} \left[\frac{4}{3} + \frac{R_0}{r_0} \left(1 + \frac{\mu\alpha_2(\mu_n)}{2k_{0n}^2} \right) \right].$$

На рис. 4 штриховой линией показана зависимость $M(k_0)$, удовлетворяющая первому из этих уравнений. Ее несовпадение со сплошной линией обусловлено потерей акустической энергии на излучение, которая имеет место на открытом конце при входе в трубку. Точками показаны экспериментальные значения параметров M и k_0 , при которых собственные акустические колебания в трубке теряют устойчивость по первым четырем модам. Сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей $M(k_0)$ показывает, что они хорошо согласуются.

Заключение. Установленная в данной работе положительная обратная связь между акустическими колебаниями в ограниченной области и вихревыми колебаниями, возникающими при истечении струи из этой области, по-видимому, имеет место при любых условиях. При этом величина энергии, поступающей в колебательную систему, а также ее потери на излучение через открытые границы области зависят от решения соответствующей задачи во внешней области, которое в свою очередь зависит от геометрии сопла. Условием возникновения акустических автоколебаний в камере при истечении струи является баланс энергии, поступающей в систему за счет энергии потока, со всеми возможными ее потерями. Возникающие при этом дополнительные потери (помимо потерь на излучение) с достаточной точностью могут быть определены путем решения вспомогательной задачи в более общей постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахмадеев В. Ф., Сухинин С. В.** Частоты Струхала камеры сгорания РДТТ // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2001. Вып. 117. С. 113–121.
2. **Каравасов Р. К., Прозоров А. Г.** О принципиально однотипном источнике возбуждения резонанса в аэродинамической трубе и гидротурбинном тракте ГЭС // Инж.-физ. журн. 2012. Т. 85, № 1. С. 79–83.
3. **Ахметов Д. Г.** Вихревые кольца. Новосибирск: Гео, 2007.
4. **Курзин В. Б.** Модель возникновения неустойчивости акустических колебаний в камере при истечении струи через ее сопло // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 195–198.
5. **Голдстейн М. Е.** Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
6. **Курзин В. Б.** Об одном методе склеивания для решения линейных краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9. С. 1184–1188.
7. **Харкевич А. А.** Автоколебания. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
8. **Некрасов А. И.** Теория крыла в нестационарном потоке. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
9. **Горелов Д. Н.** Аэродинамика решеток в нестационарном потоке / Д. Н. Горелов, В. Б. Курзин, В. Э. Сарен. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1971.
10. **Морз Ф.** Колебания и звук. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
11. **Курзин В. Б.** Низкочастотные собственные акустические колебания в проточной части гидротурбин // ПМТФ. 1993. № 2. С. 96–105.
12. **Karthik V., Chakravarthy S. R., Sujith R. I.** Mechanism of pipe-tone excitation by flow through an orifice in a duct // Aeroacoustics. 2008. V. 7, N 364. P. 321–348.

*Поступила в редакцию 28/X 2014 г.,
в окончательном варианте — 14/IX 2016 г.*