УДК 534.222.2

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ГОРЮЧИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

И. Д. Димитриенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва

Разработана модель горения пористых деформируемых сред в случае учета конечных деформаций твердой фазы. Предложен эффективный численно-аналитический метод решения задачи горения для деформируемой пористой среды с системой периодически расположенных трещин. С помощью этого метода проведен численный анализ влияния модуля упругости твердой фазы на характеристики внутреннего тепло- и массопереноса.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамических процессов зажигания и горения твердых пористых сред [1–10] (например, ракетных твердотопливных двигателей) важную роль играет вопрос об устойчивости горения при наличии дефектов типа поры, трещины и т. п. в твердой среде. При определенных условиях в порах и трещинах возникает быстро распространяющееся конвективное горение [2–7, 10–13], приводящее к быстрому росту давления в газовой фазе, которое, в свою очередь, резко изменяет давление в камере сгорания или/и приводит к быстрому распространению трещины, вызывая разрушение пористого материала.

Горение твердого топлива с порами и трещинами является весьма сложным процессом, зависящим от различных параметров (геометрических размеров [2, 3], условий зажигания [8, 12] и т. д.). Одно из наименее изученных явлений — влияние механических факторов: конечных деформаций, диссипации механической энергии, нелинейных свойств твердой фазы и т. п. на горение и тепло- и массоперенос в порах и трещинах.

Впервые влияние механических деформаций твердой фазы на горение пористого топлива было учтено в [3], однако при этом скорость распространения волн в твердой фазе полагалась бесконечно большой (т. е. решалась квазистатическая задача), а механические деформации — малыми. Конечная скорость распространения волн механических напряжений в твердой фазе учитывалась в работах [11–16], но для случая малых деформаций. С другой стороны, теория расчета горения пористой двухфазной среды с конечными механическими деформациями, но без учета волновых процессов в твердой и газовой фазах была предложена в [17].

Цель настоящей работы — разработка модели процессов внутреннего тепло- и массопереноса и горения двухфазной пористой среды с учетом как конечных механических деформаций, так и конечной скорости распространения волн в твердой фазе.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В декартовой системе координат Ox_i, $i = 1, 2, 3$, рассмотрим твердую среду (например, полупространство $x_1 > 0$) с системой плоских трещин, направленных по оси Ox_1. Трещины периодически повторяются вдоль оси Ox_2 (рис. 1), их размер не зависит от координаты x_3.

Вдоль плоскости x_2x_3 движется основной горячий поток газа, параметры которого считаются известными: давление и температура заданы в виде функций времени — $p_e(t)$ и $\theta_e(t)$. Поскольку в начальный момент времени t_0 давление $p_e(t)$ больше начального давления в трещине p_0, при $t \geqslant t_0$ начинается затекание горячих газов в трещины, что приводит к зажиганию твердого топлива. Внешнее давление p_e, а также давление продуктов газификации в трещине воздействуют на твердую фазу, в результате чего происходит ее деформирование. Деформации твердой фазы считаются конечными, и для их описания используется пространственный эйлеров подход.

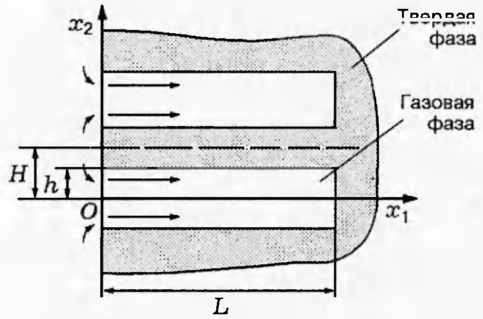

Рис. 1. Схема твердого топлива с продольными трещинами:

H — половина общего поперечного размера трещины, h_1 — полуширина зазора трещины, L — длина трещины

1.1. **Законы сохранения.** Описанная выше задача исследуется в плоской двумерной постановке. Система двумерных законов сохранения для твердой и газовой фаз в системе координат Ox_i записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \rho_\beta v_{\beta,i}}{\partial x_i} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_\beta v_{\beta,i}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_\beta v_{\beta,i} v_{\beta,j} - \sigma_{\beta,ij}) = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\beta\Big(e_\beta + \frac{v_\beta^2}{2}\Big) + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\rho_\beta\Big(e_\beta + \frac{v_\beta^2}{2}\Big)v_{\beta,i} - \sigma_{\beta,ij}v_j\Big) = 0; \quad \beta = s, g; \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь ρ_β — плотность; $v_{\beta,i}$ — компоненты скорости; $\sigma_{\beta,ij}$ — компоненты тензора напряжений; e_β — внутренняя энергия фазы (все эти величины являются истинными, а не осредненными характеристиками фаз); $v_\beta^2 = \sum_{i=1}^{2}(v_{\beta,i})^2$; индекс s соответствует твердой фазе, g — газовой.

1.2. **Определяющие соотношения.** Газовая фаза полагалась линейно-вязкой:

$$\sigma_{g,ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \tag{4}$$

$$p = \rho_g R\theta_g(1 + a\rho_g + b\rho_g^2), \tag{5}$$

$$\tau_{ij} = \lambda_g \frac{\partial v_{g,k}}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu_g \frac{\partial v_{g,i}}{\partial x_j}, \tag{6}$$

$$e_g = c_g\theta_g. \tag{7}$$

Здесь p — давление; τ_{ij} — тензор вязких напряжений в газовой фазе; λ_g и μ_g — коэффициенты вязкости; a, b — экспериментальные константы газа; R — газовая постоянная; θ_g — температура газа; c_g — теплоемкость газа при постоянном объеме; δ_{ij} — тензор Кронекера.

Определяющие соотношения для твердой фазы выберем в виде связи яуманновской производной тензора напряжений $\sigma_{s,ij}^J$ с тензором скорости деформаций $\partial v_{s,i}/\partial x_j$:

$$\sigma_{s,ij}^J = \sum_{k,l=1}^{2} A_{ijkl}\frac{\partial v_{s,k}}{\partial x_l}, \tag{8}$$

$$A_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\Big(\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\alpha}{\rho_c c_s}\delta_{ij}\sigma_{s,kl}\Big), \tag{9}$$

где A_{ijkl} — тензор упругости, отличающийся от общеизвестного тензора модулей упругости наличием последнего слагаемого, учитывающего тепловое расширение твердой фазы для быстропротекающих процессов; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона твердой фазы. Яуманновская производная $\sigma_{s,ij}^J$ от тензора напряжений твердой фазы вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{s,ij}^J = \frac{\partial \sigma_{s,ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2}\Big(v_{s,k}\frac{\partial \sigma_{s,ij}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\Big(\frac{\partial v_{s,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_{s,k}}{\partial x_j}\Big) - \frac{1}{2}\sigma_{kj}\Big(\frac{\partial v_{s,k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{s,i}}{\partial x_k}\Big)\Big), \tag{10}$$

здесь α и c_s — коэффициент теплового расширения и теплоемкость твердой фазы соответственно.

1.3. **Условия на поверхности раздела фаз.** Уравнение поверхности раздела фаз в плоской постановке описываются формулой $x_2 = h_1(x_1, t)$. Изменение положения поверхности раздела фаз в трещине происходит вследствие двух причин: газификации твердой фазы и ее конечных деформаций.

Уравнение для функции h_1 имеет вид [12]

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + v_{s,1}\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = v_{s,2} + u_f, \tag{11}$$

где u_f — скорость горения твердой фазы, h_1 — величина зазора трещины по оси Ox_2.

На поверхности раздела фаз $x_2 = h_1$ имеем следующие граничные условия:

$$\rho_g\Big(u_f + \sum_{i=1}^{2}(v_{s,i} - v_{g,i})n_i\Big) = \rho_s u_f, \tag{12}$$

$$\rho_s u_f (v_{g,i} - v_{s,i}) + (\sigma_{g,ij} - \sigma_{s,ij}) n_j = 0, \quad (13)$$

$$\rho_s \Big(e_g - e_s + \frac{v_g^2}{2} - \frac{v_s^2}{2} \Big) + \\ + \sum_{i,j=1}^{2} (\sigma_{g,ij} v_{g,i} - \sigma_{s,ij} v_{s,i}) n_j - q_{g,n} + q_{s,n} = 0, \quad (14)$$

$$(v_{g,i} - v_{s,i}) b_i = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) является условием отсутствия проскальзывания твердой и газовой фаз. Здесь n_i — компоненты вектора нормали к поверхности раздела фаз; u_f — скорость горения; $q_{g,n}$, $q_{s,n}$ — тепловые потоки к газовой и твердой фазам соответственно; b_i — компоненты вектора в касательной плоскости к поверхности раздела фаз;

$$n_1 = \Big(1 + \Big(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\Big)^2\Big)^{-1/2},$$
$$n_2 = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \Big(1 + \Big(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\Big)^2\Big)^{-1/2}, \quad (16)$$
$$b_1 = (1 - n_1^2)^{1/2}, \qquad b_2 = -n_1.$$

В условиях баланса энергии (14) на поверхности раздела фаз учитываются тепловые потоки

$$q_{g,n} = \alpha^{\text{т}} (\theta_g - \theta_w), \quad q_{s,n} = \alpha^{\text{т}} (\theta_w - \theta_s), \quad (17)$$

где $\alpha^{\text{т}}$ — коэффициент теплопередачи, θ_w — температура поверхности горения.

На внешней поверхности $x_1 = 0$ в соответствии с описанной выше моделью зажигания граничные условия имеют вид

$$\sigma_{s,11} = -p_e(t), \quad \sigma_{s,12} = 0, \quad \theta_s = \theta_e(t). \quad (18)$$

При дозвуковом режиме затекания газа в трещину следует задать две функции газовой фазы у входа трещины ($x_1 = 0$), например p_e и θ_e. В случае дозвукового истечения газа из трещины достаточно задать только одно граничное условие (например, p_e) при $x_1 = 0$; значения остальных необходимых параметров на границе могут быть определены из условий на характеристических линиях, приходящих на границу $x_1 = 0$. Для сверхзвукового газового потока из трещины нет необходимости ставить какие-либо граничные условия для газовой фазы при $x_1 = 0$, так как все характеристические линии приходят на границу $x_1 = 0$ из области $x_1 > 0$, где параметры потока известны (из численного решения задачи на предыдущем временно́м шаге).

Трещину будем считать нераспространяющейся и граничные условия в вершине трещины при $x_1 = L$ полагаем совпадающими с условиями на абсолютно жесткой стенке:

$$v_{s,1} = v_{s,2} = v_{g,1} = v_{g,2} = 0, \quad (19)$$

где L — длина трещины.

Кроме того, из условий симметрии задачи можно искать решение только для одной трещины. Тогда для твердой фазы необходимо записать условие периодичности трещин:

$$x_2 = H: \quad \sigma_{s,12} = 0, \quad v_{s,2} = 0. \quad (20)$$

Поскольку начало координат находится в центре трещины, необходимо также задать условие симметрии:

$$x_2 = 0: \quad v_{g,1} = 0, \quad \sigma_{g,12} = 0. \quad (21)$$

1.4. Начальные условия и общая постановка задачи. Начальные условия к системе уравнений (1)–(3), (8), (11) имеют вид:

$$t = 0: \quad h_1 = h_{1,0}, \ \rho_s = \rho_{s,0}, \ \rho_g = \rho_{g,0}, \\ v_{s,i} = v_{g,i} = 0, \ \theta_s = \theta_g = \theta_0, \quad (22)$$

где $h_{1,0}$, $\rho_{\beta,0}$ и θ_0 — начальные значения соответствующих функций.

Общая постановка задачи заключается в решении двенадцати уравнений (1)–(3), (8), (11) с условиями (12)–(15), (18)–(22), в которые подставлены соотношения (4)–(7), (10) относительно двенадцати функций:

$$\rho_\beta, v_{\beta,i}, e_\beta, \sigma_{s,ij}, h_1 \quad (i, j = 1, 2; \ \beta = s, g), \quad (23)$$

эти функции зависят от координат x_1, x_2 и времени t, изменяющихся в пределах

$$0 < x_1 < L, \quad 0 < x_2 < h_1(t) \quad \text{для} \quad g\text{-фазы}; \\ h_1(t) < x_2 < H \quad \text{для} \quad s\text{-фазы}; \quad t > 0. \quad (24)$$

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

2.1. Основные допущения. Для решения сформулированной выше двумерной задачи применим предложенный в [12] численно-аналитический метод, сущность которого заключается в следующем. Ввиду того, что один геометрический параметр задачи значительно меньше другого: $H \ll L$, зависимость всех неизвестных функций задачи от поперечной координаты x_2 задается в параметрическом виде:

$$v_{g,1} = \begin{cases} v^0_{g,1}(x_1, t), & 0 \leqslant x_2 < h_1, \\ v_{g,1,w}(x_1, t), & x_2 = h_1; \end{cases}$$

$$v_{g,2} = \begin{cases} v^0_{g,2}(x_1, t) \dfrac{2x_2}{h_1}, & 0 \leqslant x_2 < h_1, \\ v_{g,2,w}(x_1, t), & x_2 = h_1; \end{cases}$$

$$v_{s,1} = v^0_{s,1}(x_1, t), \quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H;$$

$$v_{s,2} = v^0_{s,2}(x_1,t)\,\frac{2(H-x_2)}{H-h_1},\quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H;$$

$$\tau_{12} = \tau_{12,w}(x_1,t)\,\frac{2x_2}{h_1},\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant h_1; \tag{25}$$

$$\sigma_{s,12} = \sigma^0_{s,12}(x_1,t)\,\frac{2(H-x_2)}{H-h_1},\quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H;$$

$$\sigma_{s,22} = (2\sigma^0_{s,22}(x_1,t) - \sigma_{s,22,w}(x_1,t))\,\frac{x_2-h_1}{H-h_1} +$$

$$+\sigma_{s,22,w}(x_1,t)\,\frac{H-x_2}{H-h_1},\quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H;$$

$$\sigma_{s,11} = \sigma^0_{s,11}(x_1,t),\quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H;$$

$$\rho_g = \rho^0_g(x_1,t),\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant h_1;$$

$$\rho_s = \rho^0_s(x_1,t),\quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H;$$

$$\theta_g = \begin{cases} \theta^0_g(x_1,t), & 0 \leqslant x_2 < h_1, \\ \theta_w(x_1,t), & x_2 = h_1; \end{cases}$$

$$\theta_s = \theta^0_s(x_1,t),\quad h_1 \leqslant x_2 \leqslant H,$$

индекс w соответствует параметрам на межфазной поверхности. Функции $v^0_{\beta,i}$, ρ^0_β, $\sigma^0_{s,ij}$, θ^0_β, представляющие собой средние значения по фазам от соответствующих функций, а также $v_{g,i,w}$, $\tau_{12,w}$ и θ_w зависят только от одной координаты x_1 и времени t. Распределения (25) удовлетворяют всем граничным условиям (20), (21). На границе газовой и твердой фаз появляются дополнительные четыре функции $v_{g,i,w}$ ($i = 1,\ 2$), $\tau_{12,w}$ и θ_w, отличающиеся от значений $v^0_{g,i}$, θ^0_g в газовой фазе.

Примем следующие допущения:

- вязкие напряжения газовой фазы малы по сравнению с давлением в газе; кроме того, полагаем

$$\sigma_{g,ii} = \sigma^0_{g,ii} \approx -p^0,\quad \sigma_{g,12} = \tau_{12},\quad i = 1, 2, \tag{26}$$

где $p^0 = \rho^0_g\theta^0_g$;

- вязкие напряжения газовой фазы на фазовой поверхности горения τ_{12w} вычисляются на основании соотношений для турбулентного течения газа в каналах:

$$\tau_{12,w} = 0{,}029\rho^0_g v^0_{g,1}\mathrm{Re}^{-0,2},\quad \mathrm{Re} = \rho^0_g v^0_{g,1}\,\frac{L}{\mu_g}, \tag{27}$$

которые могут рассматриваться как приближенное решение уравнений (13) для $i = 2$ на поверхности горения;

- поверхность горения $h_1(x_1,t)$ в трещине меняется достаточно плавно, так что

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \ll 1. \tag{28}$$

Первые два допущения достаточно известны и не требуют дополнительных обоснований, последнее допущение будет подтверждено ниже прямыми вычислениями.

Для коэффициента теплообмена $\alpha^{\text{т}}$ газовой и твердой фаз будем использовать выражение, полученное на основе аналогии Рейнольдса:

$$\alpha^{\text{т}} = 0{,}038 c_g\rho^0_g v^0_{g,1}\mathrm{Re}^{-0,2}, \tag{29}$$

а для скорости горения — выражение [3]

$$u_f = u^0_f\Big(\frac{p}{p_0}\Big)^n, \tag{30}$$

где u^0_f и n — константы горения.

2.2. **Осредненная постановка задачи.** Предположения (25) о характере зависимости неизвестных функций от поперечной координаты x_2 позволяют свести исходную двумерную задачу о горении твердого тела с трещинами в подвижной области в постановке (1)–(3), (8), (11) к одномерной системе динамических уравнений в неподвижной области $0 < x_1 < L$. Для этого распределения (25) подставим в уравнения (1)–(3), (8), (11), а затем осредним по отдельности уравнения для газовой и твердой фаз по координате x_2: от 0 до h_1 и от h_1 до H соответственно:

$$\langle\psi_1\rangle_1 = \frac{1}{h_1}\int\limits_0^{h_1(x_1,t)} \psi(x_1,x_2,t)\,dx_2,$$

$$\langle\psi_2\rangle_2 = \frac{1}{h_2}\int\limits_{h_1(x_1,t)}^{H} \psi(x_1,x_2,t)\,dx_2.$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,h_\beta\rho^0_\beta + \frac{\partial h_\beta\rho^0_\beta v^0_{\beta,1}}{\partial x_1} = J_\beta,$$

$$\frac{\partial h_\beta\rho^0_\beta v^0_{\beta,i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\,h_\beta(\rho^0_\beta(v^0_{\beta,i})^2 - \sigma^0_{\beta,1i}) =$$

$$= J_\beta v_{\beta,i,w} + P_{\beta,i} + F_{\beta,i}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,h_\beta\rho^0_\beta\Big(e^0_\beta + \frac{{v^0_\beta}^2}{2}\Big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\,h_\beta\Big(\sum_{i=1}^{2}\Big(\rho^0_\beta\Big(e_\beta + \frac{{v^0_\beta}^2}{2}\Big) - \sigma^0_{\beta,1i}\Big)v^0_{\beta,i} - E_\beta\Big) =$$

$$= J_\beta E_{\beta,w} + \sum_{i=1}^{2}(P_{\beta,i} + F_{\beta,i})v_{g,i,w},$$

$$i = 1,\, 2, \qquad \beta = s,\, g,$$

а также осредненные определяющие соотношения, имеющие вид дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(\sigma^J_{s,ij})^0 = \sum_{k,l=1}^{2} A^0_{ijkl} v_{kl}, \quad i,\, j = 1,\, 2, \tag{32}$$

где

$$v_{11} = \frac{\partial v^0_{s,1}}{\partial x_1}, \quad v_{22} = -2\,\frac{2v^0_{s,2}}{h_2}, \quad v_{12} = \frac{\partial v^0_2}{\partial x_1} \tag{33}$$

— компоненты осредненного тензора скоростей деформаций,

$$A^0_{ijkl} = \frac{Eh_2}{1+\nu}\Big(\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\alpha}{\rho^0_s c_s}\,\delta_{ij}\sigma^0_{s,kl}\Big), \quad i,\, j,\, k,\, l = 1,\, 2, \tag{34}$$

A^0_{ijkl} — компоненты осредненного тензора упругости,

$$(\sigma^J_{s,ij})^0 = \frac{\partial}{\partial t}h_2\sigma^0_{s,ij} + v^0_{s,1}\frac{\partial}{\partial x_1}h_2\sigma^0_{s,ij} - \sigma^0_{s,ij}\frac{J_s}{\rho^0_s} - \frac{2}{3}(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2})\sigma^0_{s,12}h_2\frac{\partial v^0_{s,2}}{\partial x_1} - (\delta_{i1}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j1}) \times \Big(\sigma^0_{s,11} - \frac{2\sigma^0_{s,22} + \sigma_{s,22,w}}{3}\Big)h_2\,\frac{\partial v^0_{s,2}}{\partial x_1} \tag{35}$$

— осредненная по твердой фазе производная по Яуманну. Функция J_β представляет собой интенсивность (или объемную скорость) межфазного обмена, $P_{\beta,i}$ — удельный импульс межфазного обмена, $F_{\beta,i}$ — удельная сила межфазного трения, а E_β — межфазный обмен энергией.

В уравнениях (31) использованы следующие параметры межфазного обмена:

$$\begin{gathered} J_g = \rho^0_s u_f, \quad P_{g,i} = \sigma^0_{g,1i}\,\frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \quad F_{g,1} = 2\tau_{12,w}, \\ F_{g,2} = 0, \quad E_g = \frac{h_1}{3}v^0_{g,2}\tau_{12,w}; \\ J_s = -J_g, \quad P_{s,i} = -P_{g,i}, \quad F_{s,i} = -F_{g,i}, \\ E_s = \frac{h_2}{3}v^0_{s,2}\sigma^0_{s,12}, \quad i = 1,\, 2. \end{gathered} \tag{36}$$

Кроме того, в (31) приняты следующие обозначения энергий фаз на границе раздела $E_{\beta,w}$ и e^0_β — средние значения внутренних энергий фаз:

$$E_{g,w} = e^0_{g,w} + \frac{1}{2}\,(v^2_{g,1,w} + v^2_{g,2,w}),$$

$$E_{s,w} = e^0_{s,w} + \frac{1}{2}\,(v^0_{s,1} + 4v^0_{s,2}), \quad e^0_g = c_g\theta^0_g, \tag{37}$$

$$e^0_{s,w} = Q + c_s\theta^0_s + \frac{1+\nu}{2E\rho^0_s}\,((\sigma^0_{s,11})^2 + 8(\sigma^0_{s,12})^2 + \sigma^2_{s,22,w}) - \frac{\nu(1+\nu)}{2E\rho^0_s}\,((\sigma^0_{s,11})^2 + \sigma^2_{s,22,w}),$$

$$e_{g,w} = c_g\theta_w; \quad v^2_\beta = (v^0_{\beta,1})^2 + (v^0_{\beta,2})^2.$$

Подставляя распределения (25) в граничные условия на межфазной поверхности (12), (13), (15), получаем соотношение между значениями функций на границе $v_{g,1,w}$, $v_{g,2,w}$, $\sigma_{s,22,w}$ и средними значениями функций $v_{s,1}$, $v_{s,2}$, $\sigma^0_{g\,22}$:

$$\begin{gathered} v_{g,1,w} = v^0_{s,1} + \Big(\frac{\rho^0_s}{\rho^0_g} - 1\Big)u_f\,\frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \\ v_{g,2,w} = v^0_{s,2} - \Big(\frac{\rho^0_s}{\rho^0_g} - 1\Big)u_f, \\ \sigma_{s,22,w} = \sigma^0_{g\,22} + \rho_g u_f^2\Big(\frac{\rho^0_s}{\rho^0_g} - 1\Big). \end{gathered} \tag{38}$$

Температуру поверхности горения θ_w между фазами определим, подставив распределения (25) в условие для скачка энергии фаз (14).

Уравнение (11) после введения распределений (25) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + v^0_{s,1}\,\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = 2v^0_{s,2} + u_f. \tag{39}$$

В результате проведенных преобразований исходная двумерная постановка задачи (1)–(3), (8), (11) о горении двухфазной деформируемой среды сведена к решению одномерной модифицированной системы двенадцати уравнений (31), (32), (39) относительно двенадцати функций ρ^0_β, $v^0_{\beta,i}$, $\sigma^0_{s,ij}$, θ^0_β, h_1 ($\beta = s, g$; $i, j = 1, 2$), зависящих только от x_1 и t. После вычисления этих функций значения параметров на границе определяются по формулам (38), и искомые двумерные распределения функций ρ_β, $v_{\beta,i}$, $\sigma_{s,ij}$, θ_β, зависящие от x_1, x_2 и t, восстанавливаются по формулам (25).

Начальные и граничные условия для осредненной задачи (31), (32), (39) имеют вид:

$$\begin{gathered} t = 0\colon \quad h_1 = h^0_1, \quad \rho^0_s = \rho_{s,0}, \\ \rho_g = \rho_{g,0}, \quad v^0_{s,i} = v^0_{g,i} = 0, \\ \theta^0_s = \theta^0_g = \theta_0, \quad \sigma^0_{s,ij} = 0; \end{gathered} \tag{40}$$

$$x_1 = 0\colon \quad \sigma^0_{s,11} = -p_e(t), \quad \sigma^0_{s,12} = 0, \quad \theta^0_s = \theta_e(t);$$

$$x_1 = L\colon \quad v^0_{s,i} = v^0_{g,i} = 0.$$

Плотность твердой фазы ρ_s^0, кг/м^3	1700
Теплоемкость твердой фазы c_s, кДж/(кг · К)	1,04
Теплоемкость газовой фазы c_g, кДж/(кг · К)	1,00
Коэффициент Пуассона твердой фазы ν	0,4
Модуль упругости E, ГПа	$0{,}023 \div 2{,}3$
Скорость горения при нормальном давлении u_f^0, м/с	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$
Показатель степени в законе горения n	0,6
Теплота горения Q, МДж/кг	3,58
Длина трещины L, м	0,1
Половина общего поперечного размера трещины $H = h_1 + h_2$, м	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$
Начальное давление p_0, МПа	0,1
Начальная температура θ_0, К	295

2.3. **Численный метод.** Система уравнений (31), (32), (39) существенно проще, чем исходная система (1)–(3), (8), (11), так как, во-первых, является одномерной и содержит такое же количество неизвестных функций, а во-вторых, определена в неподвижной области $[0, L] \times [0, t_{\max})$, в то время как исходная система содержит переменную границу раздела фаз $h_1(x_1, t)$, меняющуюся вследствие выгорания и конечных деформаций твердой фазы.

Для численного решения задачи (31), (32), (39), (40) был использован двухшаговый метод Лакса — Вендроффа в модифицированном виде [14]. Система уравнений (31), (32), (39) была представлена в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{y})}{\partial x_1} + \mathbf{Z}_1(y)\,\frac{\partial \mathbf{z}_2(\mathbf{y})}{\partial x_1} + \mathbf{Z}_3(y)\,\frac{\partial \mathbf{z}_4(\mathbf{y})}{\partial x_1} = \mathbf{b}, \tag{41}$$

где $\mathbf{y}$ — обобщенный вектор неизвестных функций размерностью (1×12); $\mathbf{Z}_1(y)$ и $\mathbf{Z}_3(y)$ — обобщенные диагональные матрицы с размерностью (12×12), компоненты которых зависят от $\mathbf{y}$; $\mathbf{z}(y)$, $\mathbf{z}_2(y)$ и $\mathbf{z}_4(y)$ — обобщенные векторы (1×12), компоненты которых зависят от неизвестных функций $\mathbf{y}$, а $\mathbf{b}$ — обобщенный вектор правой части размером (1×12). Вычисление функций $\mathbf{y}$ по схеме (41) на первом и втором шагах метода Лакса — Вендроффа показано в [12, 13].

Система (31), (32), (39) описывает динамические процессы в двухфазной (т. е. двухскоростной) среде, где волны распространяются как в газовой, так и в твердой фазе, следовательно, условие устойчивости Куранта для принятой расчетной схемы записывается в виде

$$\Delta t \leqslant \min\{\Delta t_g^*, \Delta t_s^*\}, \tag{42}$$

$$\Delta t_\beta^* = \frac{\Delta x}{\max(|v_{\beta,1}^0| + a_\beta)}, \quad \beta = s,\, g,$$

где a_s и a_g — местные скорости звука в твердой и газовой фазах соответственно.

Значения констант пористой среды, для которых проводили вычисления, приведены в таблице.

Для анализа эффектов, вызванных конечными деформациями твердой фазы, проведены расчеты с разными значениями модуля упругости E из диапазона $0{,}023 \div 2{,}3$ ГПа. При этом все остальные характеристики пористого материала, включая коэффициент Пуассона, не изменялись. Значение $E = 0{,}023$ ГПа характерно для твердых топлив на основе полибутадиена. Материалы этого класса имеют предельные деформации $\approx 50 \div 60\,\%$ и даже выше. Значение $E = 0{,}23$ ГПа типично для полиуретановых твердых топлив, а также высоконаполненных (до $40 \div 50\,\%$ наполнителя) полибутадиеновых топлив. Предельные деформации таких топлив тоже весьма значительны и обычно составляют $20 \div 30\,\%$. Значение $E = 2{,}3$ ГПа, по-видимому, близко к максимальным значениям упругих характеристик современных твердых топлив. Деформации таких топлив являются малыми ($\leqslant 1 \div 3\,\%$).

В качестве характерных значений времени t_0, скорости V_0 и давления p_0 принимались следующие:

$$t_0 = H/u_f^0; \quad V_0 = \sqrt{R\theta_0}; \quad p_0 = \rho_{g,0} R\theta_0.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2–5 представлены результаты расчетов механических и газодинамических параметров при горении твердого топлива с про-

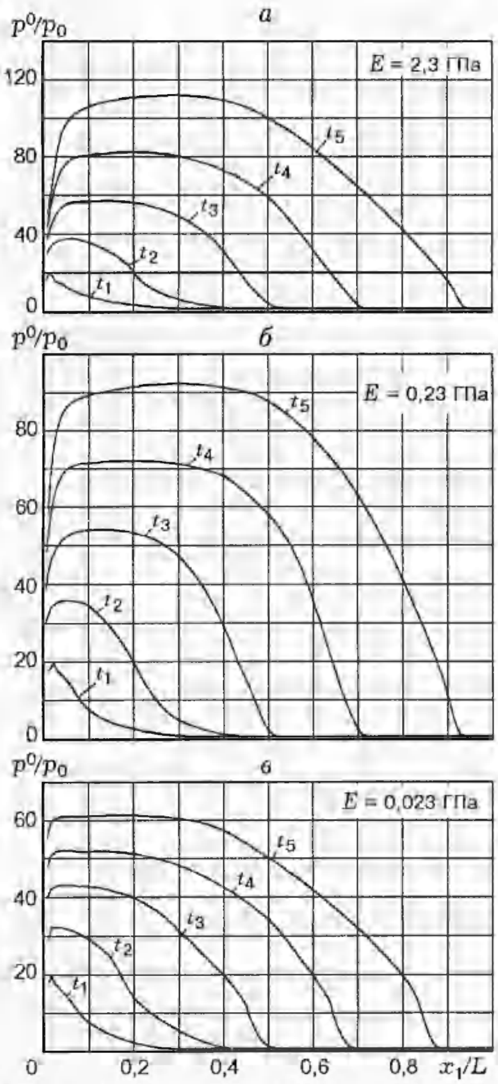

Рис. 2. Распределение давления газа p^0 по длине канала для различных моментов времени и различных значений модуля упругости E

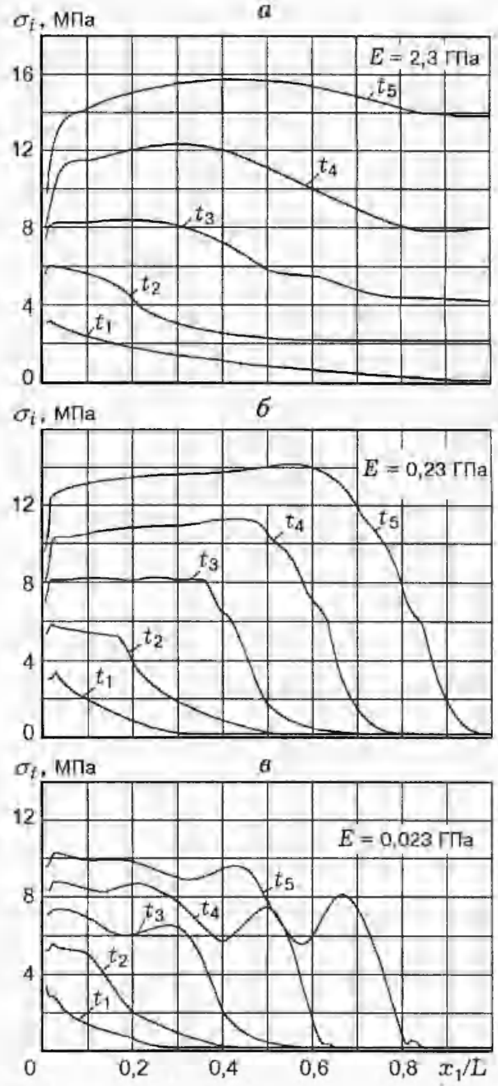

Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений σ_i по длине канала для различных моментов времени и различных значений модуля упругости E

дольными трещинами для различных моментов времени: $t_1 = 0{,}067$, $t_2 = 0{,}116$, $i_3 = 0{,}152$, $t_4 = 0{,}183$, $t_5 = 0{,}212$ мс.

Граничное условие задавалось в виде скорости роста давления на входе трещины $2{,}5 \cdot 10^4$ МПа/с. Поверхность пороха воспламенялась, когда температура поверхности твердого топлива достигала некоторого критического значения $\theta_w^* = 3{,}2\,\theta_0$. Общая картина распространения горения в трещине деформируемого твердого топлива была следующей.

Образующиеся при горении твердой фазы газы формируют волну сжатия в газовой фазе, которая движется вглубь трещины. При этом движущиеся горячие газы поджигают новые участки твердой фазы, тем самым начинает продвигаться и сама зона горения; таким образом, реализуется механизм конвективного горения. Образование большого количества газов в трещине в процессе горения приводит к возникновению значительного уровня давления в газе вблизи зоны горения (см. рис. 2). Это давление воздействует на твердую фазу, в результате в ней возникает волна сжатия, распространяющаяся вглубь твердой фазы. Отличными от нуля оказываются все напряжения $\sigma_{s,11}$, $\sigma_{s.12}$

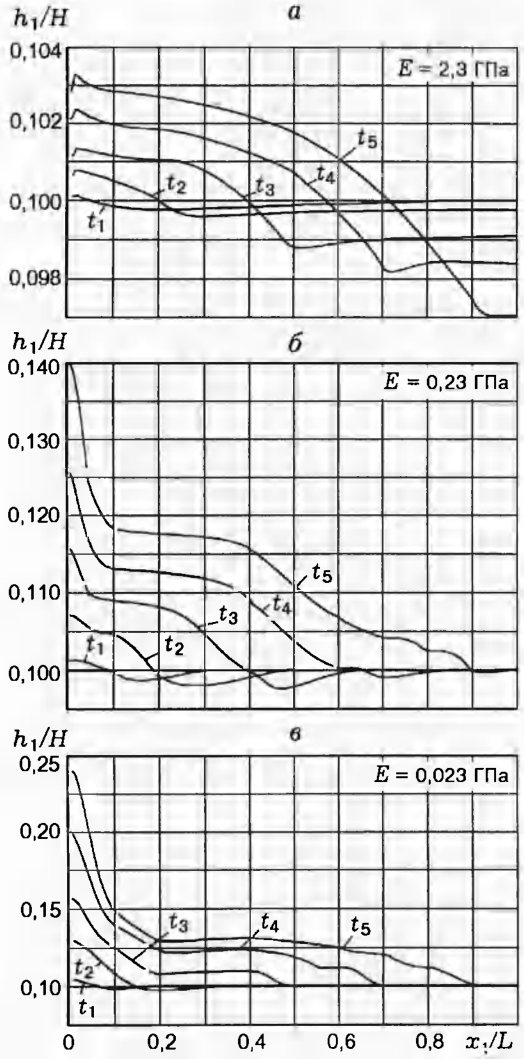

Рис. 4. Зависимость ширины зазора канала h_1 от его длины для различных моментов времени и различных значений модуля упругости E

и $\sigma_{s,22}$ в твердой фазе. На рис. 3 показаны распределения суммарной волны механических напряжений, выраженной интенсивностью σ_i напряжений:

$$\sigma_i = (\sigma_{s,11}^2 + \sigma_{s,22}^2 + \sigma_{s,11}\sigma_{s,22} + 3\sigma_{s,12}^2)^{1/2}.$$

Таким образом, при конвективном горении пористого топлива образуются два типа волн сжатия: в газовой и твердой фазах. Кроме того, в твердой фазе движутся поперечные волны растяжения/сжатия. Скорости их распространения различны и зависят от свойств газовой и твердой фаз. Скорость распространения волн в твердой фазе определяется, главным образом, модулем E. Картина распространения

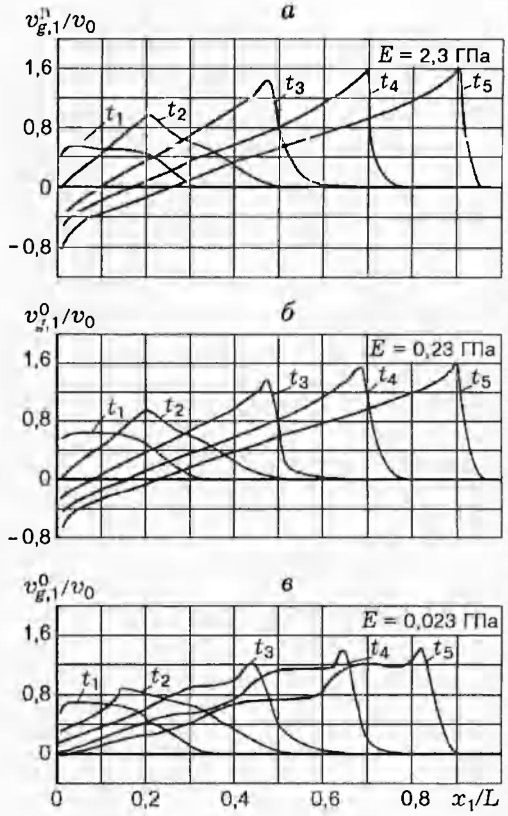

Рис. 5. Распределение скорости газа $v_{g,1}^0$ по длине канала для различных моментов времени и различных значений модуля упругости E

волн при различных значениях E оказывается различной.

Для больших значений модуля $E \approx 2{,}3$ ГПа скорость распространения поперечных волн существенно больше скорости волны сжатия в газе. Поэтому поперечная волна в твердой фазе опережает волну сжатия в газе. Вследствие этого непосредственно перед фронтом горения в трещине происходит расширение твердой фазы (увеличение значения h_2) и сужение зазора трещины h_1 (см. рис. 4,*а*). Волна расширения твердой фазы в процессе горения перемещается вглубь трещины практически со скоростью поперечных волн (см. рис. 4,*а*). Однако, поскольку максимальные упругие деформации твердой фазы для случая $E = 2{,}3$ ГПа невелики, абсолютные значения сужения зазора трещины также малы: $\Delta h_1 \approx (h_0 - h_1)/h_0 \sim 3\,\%$.

Иная ситуация наблюдается для случая $E \leqslant 2{,}3$ ГПа, когда деформации твердой фазы достаточно большие. Твердая фаза при таких значениях E дает более высокие значения су-

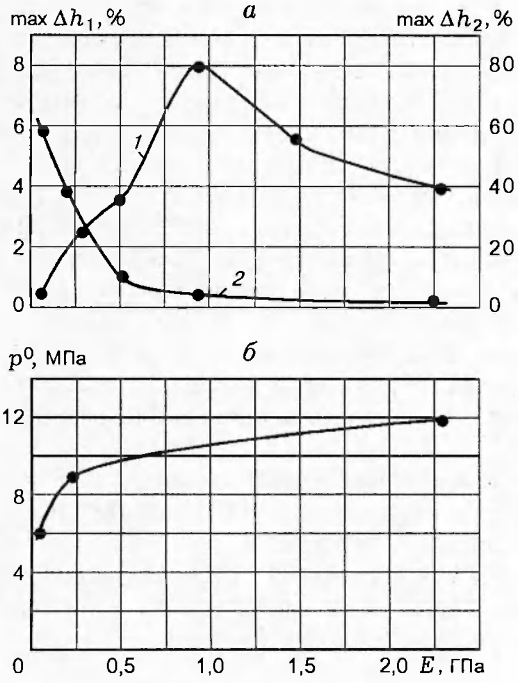

Рис. 6. Зависимость максимального сужения зазора канала Δh_1 (кривая *1*) и сжатия твердой фазы Δh_2 (кривая *2*) (*а*) и максимального давления газа p^0 (*б*) от модуля упругости E

жения Δh_1 зазора (см. рис. 4,*б*). Максимальные значения сужения достигают $\approx 9\,\%$ для данных условий конвективного горения.

Однако дальнейшее уменьшение значений E приводит к одновременному увеличению сжимаемости твердой фазы и снижению скорости распространения поперечных волн большой амплитуды в твердой фазе. Вследствие этого по твердой фазе впереди фронта горения и волны сжатия в газе распространяется только волна малой интенсивности — звуковая. Волна с большой амплитудой деформаций с уменьшением значений E замедляется, и ее скорость приближается к скорости распространения волн в газе (см. рис. 4,*в*). Вследствие этого эффекта зависимость максимального сужения зазора трещины h_1 от механических характеристик твердой фазы (модуля E) имеет экстремум (рис. 6,*а*), который для данных условий горения достигает значения $\approx 9\,\%$ для $E = 0{,}9$ ГПа. При более низких значениях E величина Δh_1 уменьшается.

В зоне горения, где давление газа достигает максимальных значений, происходит сжатие твердой фазы (уменьшение значений h_2) и расширение зазора трещины h_1. Абсолютная величина сжатия твердой фазы $\Delta h_2 = (h_2^0 - h_2)/h_2^0$ зависит от модуля E (см. рис. 6,*а*): с уменьшением значений E значения Δh_2 возрастают. При $E = 2{,}3$; $0{,}23$; $0{,}023$ ГПа соответственно $\Delta h_2 = 3, 35, 70\,\%$.

Из данных, представленных на рис. 4, можно сделать оценку изменения функции $\partial h/\partial x_1$. Максимальные значения $|\partial h/\partial x_1|$ достигаются вблизи входа в канал $x_1 = 0$ для всех значений E. Наибольшее значение, достигаемое в рассматриваемой задаче, составляет $|\partial h/\partial x_1| \approx 0{,}05 \ll 1$. Таким образом, допущение (28) вполне оправдано.

Увеличение зазора трещины h_1 приводит к увеличению объема, занятого газовой фазой. Вследствие этого давление газа p^0 уменьшается (см. рис. 2). На рис. 6,*б* показаны зависимости максимального значения давления в газовой фазе p^0 при $t = 0{,}212$ мс от модуля E. С уменьшением значений модуля E, происходит падение давления газа p^0. Если при $E = 2{,}3$ ГПа максимальное давление в трещине составляет 12 МПа, то для $E = 0{,}023$ ГПа $p^0 = 6$ МПа. Таким образом, увеличение сжимаемости твердой фазы, т. е. способности к большим деформациям, ведет к снижению давления в газовой фазе.

Влияние больших деформаций твердой фазы на продольную скорость газовой фазы $v_{g,1}$ показано на рис. 5. Общий характер распределения скорости $v_{g,1}^0$ для всех значений E таков. В начальный момент времени $t \leqslant 0{,}067$ мс при отсутствии горения профиль скорости $v_{g,1}^0$ в трещине имеет форму плато. С ростом давления газа p^0 скорость газовой фазы у открытого конца поры начинает падать, и при преобладающем росте давления в трещине газ начинает вытекать из нее. Увеличение давления в процессе горения приводит к возрастанию скорости $v_{g,1}^0$, образуется вторичная волна (см. пик скорости $v_{g,1}^0$ на рис. 5), которая догоняет фронт головной ударной волны. При этом формируется самораспространяющаяся волновая структура, содержащая головную ударную волну и примыкающую к ней зону горения.

Вместе с тем имеются отличия в волновом характере движения газа при разных значениях E. С уменьшением значения E уменьшается скорость, и значение времени начала истечения газа из канала t_{out} возрастает. Для $E = 2,3$; $0{,}23$; $0{,}023$ ГПа соответственно $t_{out} = 0{,}1$; $0{,}12$; $0{,}183$ мс. С уменьшением E уменьшаются также абсолютные значения скорости $v_{g,1}^0$ (см.

рис. 5) и скорость распространения возмущений в газовой фазе.

Влияние конечных деформаций на напряженно-деформированное состояние твердой фазы показано на рис. 3. Из этого рисунка видно, что с уменьшением значения E максимальное значение интенсивности механических напряжений σ_i падает: оно равно 16, 14 и 10 МПа для $E = 2,3$; 0,23 и 0,023 ГПа соответственно. Кроме того, меняется характер распределения параметра σ_i по длине канала. Если при малых деформациях твердой фазы (см. рис. 3,*а*) максимальное значение σ_i достигается на фронте головной волны горения (см. рис. 2,*а* и 3,*а*), то для конечных деформаций твердой фазы максимальные значения σ_i, так же как и значения p^0 в трещине, достигаются вблизи свободного конца поры при $x_1 = 0$ (см. рис. 2,*в* и 3,*в*).

Таким образом, несмотря на то, что с уменьшением модуля E сжимаемость твердой фазы растет, таких явлений, как закрытие трещины и прерывание процесса конвективного горения, не происходит (в рамках данной здесь постановки задачи), так как с уменьшением E скорость распространения волн в твердой фазе падает. В окрестности границы $x_1 = 0$ не происходит прерывания истечения газа при уменьшении E, так как рост сжимаемости твердой фазы приводит к росту объема трещины (как было указано ранее).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В настоящей работе развита предложенная ранее в [12, 13] модель горения пористой деформируемой среды для случая конечных деформаций твердой фазы.

2. Предложен эффективный метод численно-аналитического решения задачи горения для случая деформируемой пористой среды с системой периодически расположенных трещин, перпендикулярных поверхности зажигания.

3. С помощью этого метода проведен численный анализ влияния модуля упругости твердой фазы на характеристики внутреннего тепло- и массопереноса.

4. Установлено, что чем больше деформации твердой фазы, тем меньше максимальные значения давления в газовой фазе при горении, а также меньше скорость истечения газообразных продуктов горения во внешнюю среду, скорость конвективного горения и скорость распространения возмущений в газовой фазе.

5. Установлено, что в пористой среде распространяется волна сужения зазора трещины, опережающая волну сжатия в газе. Абсолютное значение амплитуды волны сужения трещины достигает максимума при некотором конкретном значении модуля упругости E_*. При уменьшении модуля E по сравнению с E_* скорость распространения поперечной волны сжатия большой амплитуды в твердой фазе уменьшается, поэтому уменьшается и абсолютное значение амплитуды волны сужения зазора канала. При увеличении модуля E по сравнению с E_* деформации твердой фазы, а также амплитуда сужения зазора канала уменьшаются.

Эти явления имеют важное значение для задач проектирования процессов горения твердых топлив с дефектами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-03-09519).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Krier H., Rajan S., Tassel W.** Flame spreading and combustion in packed beds of propellant grains // AIAA Journal. 1976. V. 14, N 3. P. 301.
2. **Kumar M., Kovacic S. M., Kuo K. K.** Flame propagation and combustion processes in solid propellant cracks // AIAA Journal. 1981. V. 19, N 6. P. 610.
3. **Kumar M., Kuo K. K.** Effect of deformation on flame spreading and combustion in propellant cracks // AIAA Journal. 1981. V. 19, N 12. P. 1580.
4. **Вилюнов В. Н., Кузьминых П. В., Шрагер Э. Р.** О гидродинамике и закономерностях распространения пламени в плоской щели конденсированного вещества // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17, № 1. С. 17.
5. **Дубовицкий В. Ф., Коростелев В. Г., Коротков А. И. и др.** Горение пористых конденсированных систем и порохов // Физика горения и взрыва. 1974. Т. 10, № 6. С. 811.
6. **Ермолаев Б. С., Хасаинов Б. А., Борисов А. А. и др.** Распространение конвективного горения в пористых порохах и ВВ // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11, № 5. С. 720.
7. **Гостинцев Ю. А., Похил П. Ф.** Полная система уравнений для нестационарных процессов при горении в полузамкнутом объеме // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195, № 1. С. 137.
8. **Ассовский И. Г., Закиров З. Г., Лейпунский О. И.** О влиянии условий зажигания на

горение топлива // Физика горения и взрыва. 1983. Т. 19, № 1. С. 41.
9. **Липанов А. М., Алиев А. В.** Распространение пламени в несимметричном глухом деформируемом канале // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 1. С. 26.
10. **Ермолаев Б. С., Новожилов Б. В., Посвянский В. С., Сулимов А. А.** Результаты численного моделирования конвективного горения порошкообразных взрывчатых систем при возрастании давления // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21, № 5. С. 3.
11. **Смирнов Н. Н., Димитриенко И. Д.** Режим конвективного горения в деформируемом твердом топливе с продольными каналами // Физика горения и взрыва. 1986. Т. 22, № 3. С. 59.
12. **Смирнов Н. Н., Димитриенко И. Д.** Исследование конвективного горения в сжимаемом твердом топливе с продольными каналами // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 4. С. 14.
13. **Smirnov N. N., Dimitrienko I. D.** Convective combustion of porous compressible propellants // Combust. Flame. 1992. V. 89. P. 260.
14. **Dimitrienko I. D.** Behavior of porous materials under impulse thermal effects // Proc. the Second Intern. Conf. on Composite Engineering. New Orleans, USA, 1995. P. S31–S32.
15. **Smirnov N. N., Dimitrienko I. D., Rumyantseva S. I.** Anomalous combustion regimes of solid propellants with defects // Proc. of 27th Intern. Conf. of ICT «Energetic Materials — Technology, Manufacturing and Processing». Karlsruhe, Germany, 1996. P. 146.1–146.11.
16. **Smirnov N. N., Dimitrienko I. D.** Emergency pressure rise in combustion of solid propellants with defects // Proc. of Intern. Symp. on Heat and Mass Transfer in Chemical Process Industry Accidents. Roma, Italy, 1994. P. 283–292.
17. **Dimitrienko Y. I.** Effect of finite deformations on internal heat-mass-transfer in elastomer ablative materials // Intern. J. of Heat Mass Transfer. 1997. V. 40, N 1. P. 699.

Поступила в редакцию 15/VII 1997 г.